# Dénombrement des diagonalisables de $M_n\left(\mathbb{F}_q\right)$

**Théorème 1.** Si l'on note $D_n(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{F}_q)$, alors :

$$\left|D_n\left(\mathbb{F}_q\right)\right| = \sum_{m_1+\cdots+m_q=n} \frac{\left|GL_n\left(\mathbb{F}_q\right)\right|}{\prod\limits_{i=1}^{q}\left|GL_{m_i}\left(\mathbb{F}_q\right)\right|}.$$

*Démonstration.* Le groupe $GL_n\left(\mathbb{F}_q\right)$ agit par conjugaison sur $D_n\left(\mathbb{F}_q\right)$. Pour $M \in D_n\left(\mathbb{F}_q\right)$, notons

$$\mathrm{Orb}(M) = \left\{PMP^{-1},\ P \in GL_n(\mathbb{F}_q)\right\}$$

l'orbite de $M$ sous cette action. Par diagonalisabilité, il existe $m$ tel que $m_1 + \cdots + m_q = n$ et $D_m = \mathrm{diag}\left(\alpha_i I_{m_i}\right) \in \mathrm{Orb}(M)$, où l'on a noté $\mathbb{F}_q = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$. Si $D_{m'} = PD_mP^{-1} \in \mathrm{Orb}(D_m)$, alors :

$$\chi_{D_{m'}} = \det\left(P\left(XI_n - D_m\right)P^{-1}\right) = \chi_{D_m} = \prod_{i=1}^{q}(X-\alpha_i)^{m_i}.$$

Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles, il vient donc $m = m'$. Finalement, puisque les orbites forment une partition :

$$D_n\left(\mathbb{F}_q\right) = \bigsqcup_{m_1+\cdots+m_q=n} \mathrm{Orb}(D_m).$$

Par la relation orbite-stabilisateur, $|\mathrm{Orb}(D_m)| = \frac{\left|GL_n\left(\mathbb{F}_q\right)\right|}{|\mathrm{Stab}(D_m)|}$. Or, si $P \in \mathrm{Stab}(D_m)$, alors $PD_m = D_mP$, donc $P$ laisse stable les sous-espaces propres de $D_m$. D'autre part,

$$\mathbb{F}_q^n = \bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(D_m)} E_\lambda(D_m)$$

donc $P$ est de la forme $\mathrm{diag}(P_i)$, avec $P_i \in GL_{m_i}\left(\mathbb{F}_q\right)$. Ainsi, calculer $|\mathrm{Stab}(D_m)|$ revient à compter les matrices de la forme précédente. On conclut donc :

$$\left|D_n\left(\mathbb{F}_q\right)\right| = \sum_{m_1+\cdots+m_q=n} \frac{\left|GL_n\left(\mathbb{F}_q\right)\right|}{\prod\limits_{i=1}^{q}\left|GL_{m_i}\left(\mathbb{F}_q\right)\right|}.$$

$\square$

Il reste donc à calculer le cardinal de $GL_n\left(\mathbb{F}_q\right)$, ce qui revient à compter les bases de $\mathbb{F}_q^n$ (les colonnes d'une matrice inversible formant une base de cet espace). Il y a $q^n - 1$ choix pour le premier vecteur de base $e_1$ ; ensuite, $\left|\mathbb{F}_q^n \backslash \mathrm{Vect}\{e_1\}\right| = q^n - q$ choix pour le deuxième, et ainsi de suite. De là :

$$\left|GL_n\left(\mathbb{F}_q\right)\right| = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i).$$