Quaternions

Théorème 1. Notons $\mathbb{H}$ l'anneau à division, non commutatif des quaternions. Si l'on note G l'ensemble des quaternions de norme 1, $\{a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \in \mathbb{H},\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$, alors :

$$G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R}).$$

Démonstration. Pour $q \in G$, notons $S_q : q' \in \mathbb{H} \mapsto qq'q^{-1} = qq'\overline{q}$. L'application S_q est $\mathbb{R}$-linéaire et bijective, de réciproque $S_{q^{-1}} = S_{\overline{q}}$. Donc l'application suivante est bien définie :

$$S : q \in G \mapsto S_q \in GL_4(\mathbb{R}).$$

De plus, sans difficulté, $S_{q_1 q_2} = S_{q_1} \circ S_{q_2}$, donc S est un morphisme et pour tout $q \in G$, on vérifie que $S_{q|\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Aussi, S_q conserve la norme puisque :

$$N(S_q(q')) = N(qq'q^{-1}) = N(q)N(q')N(q^{-1}) = N(q').$$

Autrement dit, l'application S est à valeurs dans $O(N) \simeq O_4(\mathbb{R})$ car $H \simeq \mathbb{R}^4$.

Notons $P = \{b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \in \mathbb{H},\ b, c, d \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des quaternions purs, l'orthogonal de $\mathbb{R}$ pour N (i.e. pour la forme polaire $(q_1, q_2) \mapsto (q_1\overline{q_2} + q_2\overline{q_1})/2$). Puisque $S_{q|\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, et en identifiant $O(N)$ et $O_4(\mathbb{R})$, $S_q \in O_4(\mathbb{R})$, l'espace P est stable par S_q. Pour $q \in G$, on pose maintenant $s_q = S_{q|P} \in O(N_{|P}) \simeq O_3(\mathbb{R})$. Avec ce qui précède, l'application, $s : G \to O_3(\mathbb{R})$ est bien définie et un morphisme de noyau $\{\pm 1\}$ (car le centre de $\mathbb{H}$ est $\mathbb{R}$).

Si $q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$, alors les coefficients de la matrice s_q sont des expressions polynomiales de degré 2 en a, b, c, d. En particulier, s est continue. De là, $\det \circ s : G \to \{\pm 1\}$ est continue sur $G \simeq \mathbb{S}^3$ connexe, donc constante, égale à $\det(\mathrm{id}) = 1$. Ainsi, $s(G) \subset SO_3(\mathbb{R})$.

Soit $p \in P \cap G$. Remarquons que $s_p(p) = pp\overline{p} = p$. Par $\mathbb{R}$-linéarité, s_p fixe $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(p)$, donc s_p est une rotation d'axe (p).
De plus, $p^2 = p(-\overline{p}) = -pp^{-1} = -1$ car $p \in P$, donc $s_p^2 = s^{-1} = \mathrm{id}$. Ainsi, s_p est un renversement ($s_p \neq \mathrm{id}$ car $p \notin \{\pm 1\}$).
L'ensemble $s(G)$ contient tous les renversements de $O_3(\mathbb{R})$, qui engendrent $SO_3(\mathbb{R})$, donc s est surjectif, et par théorème d'isomorphisme :

$$G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R}).$$

□