Simplicité de $\mathcal{A}_n$

Lemme 1. Soit $n \geq 3$. Si $a_1, \dots, a_n$ (resp. $b_1, \dots, b_n$) dans $\{1, \dots, n\}$ sont deux à deux distincts, alors il existe $\sigma \in \mathcal{A}_{n-2}$ tel que $\sigma(a_i) = b_i$ pour $i \in \{1, \dots, n-2\}$.

Démonstration. Une telle permutation σ existe toujours dans $\mathcal{S}_n$. Si $\varepsilon(\sigma) = 1$, alors σ convient, sinon $\sigma \circ (a_{n-1} \ \ a_n)$ convient. □

Corollaire 2. Les 3-cycles (resp. les doubles transpositions à supports disjoints) sont conjugué(e)s dans $\mathcal{A}_n$ pour $n \geq 5$.

Démonstration. Le lemme précédent donne le résultat pour les 3-cycles pour $n \geq 5$ et pour les doubles transpositions à supports disjoints pour $n \geq 6$. Si $n = 5$, alors $\rho = (a \ \ b)(c \ \ d)(e)$ et $\tau = (a' \ \ b')(c' \ \ d')(e')$ sont conjugués via $\sigma \in \mathcal{A}_5$ telle que $\sigma(a) = a'$, $\sigma(b) = b'$ et $\sigma(e) = e'$ (par le lemme) : $\tau = \sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1}$. □

Lemme 3. Le groupe $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

Démonstration. Puisque $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions, $\mathcal{A}_n$ est engendré par les doubles transpositions.

$$(a \ \ b)(b \ \ c) = (a \ \ b \ \ c) \quad \text{et} \quad (a \ \ b)(c \ \ d) = (a \ \ c \ \ b)(a \ \ c \ \ d).$$

Cela suffit pour remarquer que toute double transposition est obtenue par opérations sur les 3-cycles. □

Théorème 4. Si $n \geq 5$, alors $\mathcal{A}_n$ est simple.

Démonstration. Commençons par le cas $n = 5$. Le groupe $\mathcal{A}_5$ est de cardinal $\frac{5!}{2} = 60$. Il contient :

(i) 1 élément d'ordre 1
(ii) $\frac{1}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 15$ doubles transpositions à supports disjoints : le terme $\frac{1}{2}$ est dû à la commutativité
(iii) $2\binom{5}{3} = 20$ 3-cycles car choisir i, j, k donne les 3-cycles $(i \ \ j \ \ k)$ et $(i \ \ k \ \ j)$
(iv) $\frac{5!}{5} = 24$ 5-cycles : $5!$ possibilités, chacune obtenue en 5 exemplaires.

Soit $H \triangleleft \mathcal{A}_5$ non trivial. Tout d'abord, H contient id. De plus :

- si H contient un 3-cycle, alors il les contient tous (car ils sont tous conjugués).
- si H contient une double transposition à supports disjoints, alors il les contient toutes (car toutes conjuguées).
- si H contient un 5-cycle σ, alors il contient $\langle \sigma \rangle$ un 5-Sylow de $\mathcal{A}_5$. Ceux-ci étant tous conjugués dans $\mathcal{A}_5$, le sous-groupe H contient tous les éléments d'ordre 5 de $\mathcal{A}_5$.

Or $|H|$ divise 60 et les seules possibilités, au vu de la discussion précédente, sont $16 = 1 + 15$, $21 = 1 + 20$, $25 = 1 + 24$, $36 = 1 + 15 + 20$, $40 = 1 + 15 + 24$, $45 = 1 + 20 + 24$ et 60. Donc $H = \mathcal{A}_5$. Autrement dit, $\boxed{\mathcal{A}_5 \text{ est simple.}}$

Traitons maintenant le cas général. Soit $H \triangleleft \mathcal{A}_n$ non trivial. Soient $\sigma \in H \backslash \{\mathrm{id}\}$ et $a \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a \neq \sigma(a) = b$. Fixons $c \notin \{a, b, \sigma(b)\}$, $\tau = (a \ \ c \ \ b)$ et $\rho = [\tau, \sigma] = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}$. On vérifie que :

$$\rho = (a \ \ c \ \ b)(\sigma(a) \ \ \sigma(b) \ \ \sigma(c)).$$

Puisque $b = \sigma(a)$, la permutation ρ agit sur au plus 5 éléments, plus précisément sur $E = \{a, b, c, \sigma(b), \sigma(c)\}$. Quitte à rajouter des éléments, on peut supposer sans perte de généralité que $|E| = 5$. De plus, $\rho(b) = \tau\sigma(b) \neq b$ car $c \neq \sigma(b)$, donc $\rho_E \neq \mathrm{id}_E$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ des permutations paires de E est clairement isomorphe à $\mathcal{A}_5$ et on a l'injection suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \hookrightarrow & \mathcal{A}_n \\ u & \mapsto & \overline{u} \end{array} \quad \text{avec } \overline{u} : x \mapsto \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in E \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons $H_0 = \{u \in \mathcal{A} \mid \overline{u} \in H\}$. Par hypothèse sur H, $H_0 \triangleleft \mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_5$. Étant donné que ρ_E est un élément non trivial de H_0 : $H_0 = \mathcal{A}$. Pour conclure, il reste à remarquer que pour $u \in \mathcal{A}$ un 3-cycle, $\overline{u} \in H$ (puisque $u \in \mathcal{A} = H_0$) est un 3-cycle de $\mathcal{A}_n$ car l'injection précédente conserve le cardinal du support. Donc H contient tous les trois cycles, qui engendrent $\mathcal{A}_n$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{A}_n \text{ est simple}}$. □