ANNÉE 2019-2020

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Séminaire de Master 2

Rémi Moreau

Renormalisations et Limites de Champs Aléatoires

encadré par **Jean-Christophe Breton**

Table des matières

L'objectif de ce document est de présenter des résultats de convergence pour des champs aléatoires normalisés, générés par un système de grains aléatoires. La première section expose les différentes notions nécessaires à la bonne compréhension de la suite, ainsi que des outils d'analyse, utiles dans les preuves des sections suivantes. La Section 2 présente le modèle étudié dans [4], et des premiers résultats sur le champ aléatoire considéré. Les deux dernières sections contiennent les résultats principaux de l'article : la Section 3 présente les théorèmes de convergence et la dernière partie propose quelques propriétés des champs limites obtenus.

1 Outils pour l'étude

Cette section présente des notions nécessaires à la compréhension des parties suivantes. On se réfèrera aux ouvrages de la bibliographie pour plus de détails. Les trois premières sous-sections sont inspirées de [2], [3] et [5].

1.1 Mesure aléatoire - Bruit blanc gaussien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On prendra souvent $E = \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.1 (Mesure aléatoire)**.** Une mesure aléatoire sur $(E, \mathcal{A})$ est une application $\xi : \Omega \times \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :

(i) pour tout $B \in \mathcal{A}$, l'application $\xi(\cdot, B)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(ii) pour presque tout $\omega \in \Omega$, l'application $\xi(\omega, \cdot)$ est une mesure et si $\mu(B) < \infty$, alors $\xi(\cdot, B) < \infty$ presque sûrement.

Notation 1.1. Pour $B \in \mathcal{A}$, on note $\xi B = \xi(\cdot, B)$. Pour une fonction simple f, on étend cette définition par linéarité. Si $f = c_1 A_1 + \cdots + c_n A_n$ avec $c_i \geq 0$ et $A_i \in \mathcal{A}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, alors $\xi f = c_1 \xi A_1 = \cdots + c_n \xi A_n$. Le théorème de convergence monotone permet de définir ξf pour f positive, puis pour f intégrable.

Définition 1.2 (Bruit blanc gaussien)**.** Le bruit blanc gaussien W est une mesure aléatoire sur $(E, \mathcal{A})$, telle que :

$$\forall B, C \in \mathcal{A},\ W(B) \sim \mathcal{N}(0, \mu(B)) \text{ et } \mathbb{E}\left[W(B)W(C)\right] = \mu(B \cap C).$$

Remarque 1.1. Le bruit blanc peut aussi être défini comme un processus gaussien $(X_B)_{B \in \mathcal{A}}$ centré de covariance $\mathrm{Cov}(X_B, X_C) = \mu(B \cap C)$. Lorsqu'il est considéré comme l'application $\phi \mapsto W(\phi)$ définie ci-dessus, le bruit blanc gaussien est encore appelé fonctionnelle linéaire gaussienne.

1.2 Lois fini-dimensionnelles et convergence

Définition 1.3. L'ensemble des lois fini-dimensionnelles d'un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est l'ensemble des lois :

$$\left\{\mathcal{L}(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}),\ t_1, \ldots, t_k \in T,\ k \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Notation 1.2 (Convergence lois fini-dimensionnelles)**.** On définit l'ensemble des mesures signées sur $\mathbb{R}^d$ à variation totale finie par :

$$\mathcal{M}^1 = \left\{\mu \text{ mesure signée} \mid \|\mu\|_1 = |\mu|(\mathbb{R}^d) < +\infty\right\}.$$

Les résultats obtenus dans la Section 3 sont des résultats de convergence des lois fini-dimensionnelles. Pour $\mathcal{M}$ partie de $\mathcal{M}^1$, on note $X_\rho \xrightarrow[\rho \to 0]{\mathcal{M}} X$ si :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall \mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathcal{M},\ (X_\rho(\mu_1), \ldots, X_\rho(\mu_k)) \xrightarrow[\rho \to 0]{\mathcal{L}} (X(\mu_1), \ldots, X(\mu_k)).$$

Remarque 1.2 (Cramér-Wold)**.** La remarque suivante sert à caractériser la convergence des lois fini-dimensionnelles dans le cas d'opérateurs linéaires (Z_ρ) et Z :

$$Z_\rho \xrightarrow[\rho \to 0]{\mathcal{M}} Z \iff \forall \phi \in \mathcal{M},\ Z_\rho(\phi) \xrightarrow[\rho \to 0]{\mathcal{L}} Z(\phi).$$

Cela repose sur le fait que la fonction caractéristique d'une variable caractérise sa loi et sur la linéarité des opérateurs.

1.3 Mesure aléatoire de Poisson

Pour un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$, souvent $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, on note E^* l'ensemble :

$$E^* = \left\{\sum_{i \in I} \delta_{x_i},\ I \text{ dénombrable},\ (x_i) \in E^I\right\}$$

muni de la tribu engendrée par les applications $(\pi^A : m \in E^* \mapsto m(A))_{A \in \mathcal{A}}$, notée $\mathcal{A}^*$.

Définition 1.4. Soit μ une mesure positive, σ-finie sur $(E, \mathcal{A})$. Une mesure aléatoire de Poisson sur $(E, \mathcal{A})$ d'intensité μ est une variable aléatoire M à valeurs dans $(E^*, \mathcal{A}^*)$, telle que pour toute suite de parties de $\mathcal{A}$ disjointes $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

(i) les variables aléatoires $(M(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes,

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire $M(A_n)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(A_n)$.

Par convention, si X suit une loi de Poisson de paramètre $+\infty$, alors $X = +\infty$ presque sûrement.

Remarque 1.3. Dans ce qui suit, si $A \in \mathcal{A}$, la variable $M(A)$ s'interprète comme un nombre de points placés uniformément sur A. Pour pouvoir compter ces points, il faut supposer l'intensité μ sans atome. En effet, si $\mu(\{x\}) > 0$,

$$\mathcal{P}(M(\{x\}) \geq 2) = 1 - e^{-\mu(\{x\})} - \mu(\{x\})e^{-\mu(\{x\})} > 0$$

ce qui signifie qu'on pourrait tirer plusieurs points (impossibles à distinguer) sur $\{x\}$.

Théorème 1.1. Si μ est une mesure σ-finie, positive et sans atome, alors il existe une mesure aléatoire de Poisson d'intensité μ.

On peut maintenant définir une notion d'intégrale pour les mesures de Poisson, en posant $\int_E \mathbb{1}_A(x)M(\mathrm{d}x) = M(A)$ et en généralisant cette définition aux fonctions étagées par linéarité. Le résultat suivant explicite des conditions sur f pour que $M(f) = \int_E f(x)M(\mathrm{d}x)$ existe, en tant que limite obtenue par convergence monotone, où $\mu(f) = \int_E f(x)\mu(\mathrm{d}x)$.

Proposition 1.1. Soit M une mesure aléatoire de Poisson d'intensité μ sur $(E, \mathcal{A})$.

(i) La quantité $M(f)$ existe si et seulement si $(|f| \wedge 1) \in L^1(\mu)$.

(ii) La quantité $(M - \mu)(f)$ existe si et seulement si $(|f| \wedge f^2) \in L^1(\mu)$.

(iii) Si $(|f| \wedge f^2) \in L^1(\mu)$ et $(|g| \wedge g^2) \in L^1(\mu)$, alors la covariance entre f et g pour la mesure de Poisson M s'écrit :

$$\mathbb{E}\left[(M - \mu)(f)(M - \mu)(g)\right] = \int f(x)g(x)\,\mu(\mathrm{d}x). \tag{1}$$

On définit enfin la fonction caractéristique associée à $M(f)$, utile pour caractériser ensuite les lois limites.

Proposition 1.2. Soit M une mesure aléatoire de Poisson d'intensité μ sur $(E, \mathcal{A})$. Si $\mu(|f| \wedge 1) < \infty$, alors :

$$\mathbb{E}\left[\exp(\mathrm{i}M(f))\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}\int_E f(x)\,M(\mathrm{d}x)\right)\right] = \exp\left(\int_E \left(e^{\mathrm{i}f(x)} - 1\right)\mu(\mathrm{d}x)\right).$$

1.4 Fonctions maximales

Les résultats de cette sous-section sont issus des Sections 7 et 8 de [6]. Dans cette sous-section, C désigne un ensemble mesurable borné de $\mathbb{R}^d$ de mesure $|C| = 1$.

Définition 1.5. Si ϕ est localement intégrable, on définit sa fonction moyenne et sa fonction maximale sur C par :

$$m_\phi(x, v) = \frac{1}{v}\int_{x+v^{1/d}C} \phi(y)\,\mathrm{d}y \text{ et } \phi_*(x) = \sup_{v>0}\frac{1}{v}\int_{x+v^{1/d}C} |\phi(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Les résultats suivants sont utiles pour donner des majorations intégrables (en vue d'appliquer le théorème de convergence dominée) dans la preuve des théorèmes de convergence.

Lemme 1.1. Si $\phi \in L^1$, alors $m_\phi(x, v) \xrightarrow[v\to 0]{} \phi(x)$ et $\phi_*(x) < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.
Si de plus $\phi \in L^p$, avec $1 < p \leq +\infty$, alors $\phi_* \in L^p$.

Démonstration. Notons B_1 la boule unité et posons $a > 0$ tel que $C \subset a^{1/d}B_1$. Si $\phi \in L^1$, alors presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ est un point de Lebesgue de ϕ ([6], Théorème 7.7), donc pour $v > 0$:

$$\left|\frac{1}{v}\int_{x+v^{1/d}C} \phi(y)\,\mathrm{d}y - \phi(x)\right| \leq \frac{a}{av}\int_{x+(av)^{1/d}B} |\phi(y) - \phi(x)|\,\mathrm{d}y \xrightarrow[v\to 0]{} 0.$$

En se ramenant encore à B_1, le Théorème 7.4 de [6] assure que $|\phi_* > \lambda| \leq C/\lambda$ pour $\lambda > 0$, ce qui donne le résultat. Le dernier point est détaillé dans [6], Théorème 8.18. □

1.5 Théorie de Karamata

Les résultats de cette sous-section sont issus de [1].

Théorème 1.2. Supposons que F, fonction de répartition, est à queue lourde de paramètre $\gamma > 0$, c'est-à-dire :

$$\forall a > 0,\ \frac{\overline{F}(av)}{\overline{F}(v)} \xrightarrow[v\to+\infty]{} a^{-\gamma}$$

où $\overline{F} = 1 - F$ désigne la queue de la distribution. Si $0 < p < \gamma < q$, alors :

$$\int_a^{+\infty} v^p\,F(\mathrm{d}v) \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{\gamma}{\gamma - p}\overline{F}(a)a^p \text{ et } \int_0^a v^q\,F(\mathrm{d}v) \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{\gamma}{q - \gamma}\overline{F}(a)a^q.$$

Corollaire 1.1. En notant $F_\rho = F\left(\frac{\cdot}{\rho}\right)$, si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant pour $0 < p < \gamma < q$:

$$\limsup_{v\to+\infty} \frac{|f(v)|}{v^p} < +\infty \text{ et } \limsup_{v\to 0} \frac{|f(v)|}{v^q} < +\infty,$$

alors lorsque ρ tend vers 0, on a l'équivalent suivant :

$$\int_0^{+\infty} f(v)\, F_\rho(\mathrm{d}v) \underset{\rho\to 0}{\sim} \overline{F}_\rho(1) \int_0^{+\infty} f(v)\gamma\, v^{-\gamma-1}\,\mathrm{d}v.$$

Corollaire 1.2. Soit (f_ρ) une famille de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$. Si pour $0 < p < \gamma < q$:

$$\forall a > 0,\ \lim_{\rho\to 0} \sup_{v>a} \left\{v^{-p}\overline{F}_\rho(1)|f_\rho(v)|\right\} = 0 \text{ et } \forall \rho, v > 0,\ \overline{F}_\rho(1)|f_\rho(v)| \le cv^q,$$

alors $\int_0^{+\infty} f_\rho(v)\, F_\rho(\mathrm{d}v)$ tend vers 0 lorsque ρ tend vers 0.

Remarque 1.4. Le dernier corollaire reste vrai si l'on suppose (de manière symétrique entre p et q) :

$$\forall a > 0,\ \lim_{\rho\to 0} \sup_{v>a} \left\{v^{-q}\overline{F}_\rho(1)|f_\rho(v)|\right\} = 0 \text{ et } \forall \rho, v > 0,\ \overline{F}_\rho(1)|f_\rho(v)| \le cv^p.$$

2 Modèle poissonien de grains aléatoires

Le modèle qui suit est présenté dans l'article [4]. Soit C un ensemble mesurable borné de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue $|C| = 1$, tel que $|\partial C| = 0$. Un grain est un ensemble de la forme $x + v^{1/d}C$, donné par un point $x \in \mathbb{R}^d$ et un volume $v \in \mathbb{R}_+^*$. On considère une famille de grains aléatoires $(X_j + (\rho V_j)^{1/d}C)_{j\in\mathbb{N}^*}$, où les points X_j sont distribués uniformément selon une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}^d$ d'intensité $\lambda > 0$ par rapport à la mesure de Lebesgue et les variables (V_j) sont strictement positives, indépendantes identiquement distribuées à densité avec $\mathbb{E}(V_1) = 1$. Pour étudier la distribution générée par cette famille de grains, on introduit les quantités suivantes :

$$J_{\lambda,\rho}(x) = Card\{j \in \mathbb{N}^* \mid x \in X_j + (\rho V_j)^{1/d}C\}$$

$$J_{\lambda,\rho}(A) = \sum_{j=1}^{+\infty} |A \cap (X_j + (\rho V_j)^{1/d}C)|.$$

Ces variables aléatoires s'interprètent comme le nombre de grains recouvrant un point x et la mesure commune entre un ensemble mesurable A et la famille de grains.
On note F la fonction de répartition de V_1 (commune aux variables V_j), et F_ρ celle de ρV_1, i.e. $F_\rho = F\left(\frac{\cdot}{\rho}\right)$.
En remplaçant la mesure $|A \cap \cdot|$ par une mesure positive ϕ (pour que la somme ait toujours un sens), la fonction $J_{\lambda,\rho}$ ci-dessus se réécrit comme une fonctionnelle intégrale :

$$J_{\lambda,\rho}(\phi) = \sum_{j=1}^{+\infty} \phi\left(X_j + (\rho V_j)^{1/d}C\right) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+} \phi\left(x + v^{1/d}C\right)\, N_{\lambda,\rho}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}v), \tag{2}$$

où $N_{\lambda,\rho}$ est une mesure aléatoire de Poisson d'intensité $\lambda \mathrm{d}x F_\rho(\mathrm{d}v)$. Les quantités λ et ρ désignent respectivement la densité moyenne et le volume moyen des grains.
Afin d'étudier la structure linéaire de $J_{\lambda,\rho}$, on l'étend à l'espace de mesures signées à variation totale finie $\mathcal{M}^1$. À l'aide du théorème de Fubini, on vérifie, en écrivant $\phi(A) = \int_A \phi(\mathrm{d}x)$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+} \left|\phi\left(x + v^{1/d}C\right)\right| \lambda \mathrm{d}x F_\rho(\mathrm{d}v) &\le \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{x+v^{1/d}C} |\phi|(\mathrm{d}y)\, \lambda \mathrm{d}x F_\rho(\mathrm{d}v) \\ &\le \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{y-v^{1/d}C} \lambda \mathrm{d}x\right) F_\rho(\mathrm{d}v)|\phi|(\mathrm{d}y) \\ &\le \lambda \int_{\mathbb{R}^d} |\phi|(\mathrm{d}y) \int_{\mathbb{R}_+} vF_\rho(\mathrm{d}v) = \lambda\rho\, \|\phi\|_1 < \infty\end{aligned} \tag{3}$$

ce qui assure la bonne définition de l'intégrale contre la mesure aléatoire de Poisson dans l'équation (2).
L'objectif est d'écrire un résultat de convergence pour une version renormalisée de $J_{\lambda,\rho}$ de la forme :

$$\frac{J_{\lambda,\rho} - \mathbb{E}(J_{\lambda,\rho})}{V(\lambda,\rho)} \xrightarrow[\substack{\rho\to 0\\ \lambda\to+\infty}]{\mathcal{M}} W$$

où $V(\lambda,\rho)$ est une renormalisation assurant la convergence. Cette forme rappelle le théorème central limite.

Notation 2.1. À une fonction $\phi \in L^1$, on associe la mesure signée $\tilde{\phi}(\mathrm{d}x) = \phi(x)\mathrm{d}x$ qui définit un élément de $\mathcal{M}^1$. On identifiera ainsi L^1 à son image dans $\mathcal{M}^1$ par cette transformation.
Si A est un ensemble mesurable de mesure finie, on l'identifie à $\mathbb{1}_A \in L^1$, de sorte à pouvoir écrire $J_{\lambda,\rho}(A)$ ou $J_{\lambda,\rho}(\mathbb{1}_A)$ indifféremment (ce qui est en accord avec l'équation (2)).

Lemme 2.1. Notons B_r la boule ouverte centrée en 0 de rayon r de $\mathbb{R}^d$. On a l'équivalence :

$$\lim_{r\to\infty} |\mathrm{Cov}\left(J_{\lambda,\rho}(B_1), J_{\lambda,\rho}(B_r \backslash B_1)\right)| = +\infty \iff \mathbb{E}\left(V^2\right) = +\infty. \tag{4}$$

Dans ce cas, $J_{\lambda,\rho}$ est dit à dépendance à longue portée.

Démonstration. Posons $A_r = \mathrm{Cov}\left(J_{\lambda,\rho}(B_1), J_{\lambda,\rho}(B_r \backslash B_1)\right)$. En utilisant l'équation (1), il vient :

$$A_r = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+} |B_1 \cap (x + v^{1/d}C)||(B_r\backslash B_1) \cap (x + v^{1/d}C)|\, \lambda \mathrm{d}x F_\rho(\mathrm{d}v).$$

Or, $|(B_r\backslash B_1)\cap(x+v^{1/d}C)| \xrightarrow[r\to+\infty]{} |B_1^c\cap(x+v^{1/d}C)|$ et $|B_1\cap(x+v^{1/d}C)| = 0$ dès que $\|x\| > 1 + v^{1/d}\sup_{y\in C}\|y\|$, donc :

$$A_\infty = \lim_{r\to\infty} A_r = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+} |B_1 \cap (x + v^{1/d}C)||B_1^c \cap (x + v^{1/d}C)|\, \lambda \mathrm{d}x F_\rho(\mathrm{d}v)$$

par convergence dominée. Le calcul de l'intégrale suivante sera utile pour la fin de la preuve :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |B_1 \cap (x + v^{1/d}C)|\mathrm{d}x = \int_{B_1}\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{x\in y - v^{1/d}C}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = v|B_1|.$$

D'une part, puisque $|B_1^c \cap (x + v^{1/d}C)| \leq |x + v^{1/d}C| = v$, on a la majoration :

$$A_\infty \leq \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+} |B_1 \cap (x + v^{1/d}C)| v\, \lambda \mathrm{d}x F_\rho(\mathrm{d}v) = \lambda|B_1|\int_{\mathbb{R}_+} v^2\, F_\rho(\mathrm{d}v) = \lambda\rho^2|B_1|\mathbb{E}\left(V^2\right).$$

D'autre part, en utilisant $|B_1^c \cap (x + v^{1/d}C)| \geq v - |B_1| \geq \frac{v}{2}$ dès que $v \geq 2|B_1|$, il vient :

$$\begin{aligned}
A_\infty &\geq \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+} |B_1 \cap (x + v^{1/d}C)|(v - |B_1|)\, \lambda \mathrm{d}x F_\rho(\mathrm{d}v)\\
&\geq \int_0^{2|B_1|}\int_{\mathbb{R}^d} |B_1 \cap (x + v^{1/d}C)|(v - |B_1|)\, \lambda \mathrm{d}x F_\rho(\mathrm{d}v) + \int_{2|B_1|}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} |B_1 \cap (x + v^{1/d}C)|\frac{v}{2}\, \lambda \mathrm{d}x F_\rho(\mathrm{d}v)\\
&\geq C + \frac{\lambda|B_1|}{2}\rho^2\mathbb{E}\left(V^2\right)
\end{aligned}$$

où C est une constante, somme de deux intégrales sur $[0, 2|B_1|]$. On en déduit l'encadrement :

$$C + \frac{\lambda|B_1|}{2}\rho^2\mathbb{E}\left(V^2\right) \leq A_\infty \leq \lambda\rho^2|B_1|\mathbb{E}\left(V^2\right).$$

D'où l'équivalence souhaitée. ◻

Le lemme suivant résume des propriétés utiles sur la fonction $\Psi : u \mapsto e^{iu} - 1 - iu$, qui apparaît lorsque l'on considère la fonction caractéristique pour la mesure aléatoire de Poisson.

Lemme 2.2. La fonction Ψ ci-dessus vérifie :

$$\forall u, v \in \mathbb{R},\ |\Psi(v) - \Psi(u)| \leq \left(2|v - u| \wedge \frac{|v^2 - u^2|}{2}\right) \text{ et } \left|\Psi(v) + \frac{v^2}{2}\right| \leq \left(v^2 \wedge \frac{|v|^3}{6}\right). \tag{5}$$

Démonstration. Puisque $\Psi(v + 2n\pi) - \Psi(u + 2n\pi) = \Psi(v) - \Psi(u)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, il suffit de vérifier les propriétés pour u, v positifs. Supposons sans perte de généralité $0 \leq u \leq v$. On écrit :

$$|\Psi(v) - \Psi(u)| = \left|\int_u^v e^{is} - 1\,\mathrm{d}s\right| \leq \int_u^v (2 \wedge |s|)\,\mathrm{d}s = \left(2|v - u| \wedge \frac{|v^2 - u^2|}{2}\right)$$

étant donné que $|e^{is} - 1| = 2\left|\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right| \leq 2 \wedge |s|$. Pour le second point, on remarque que :

$$\left|\Psi(v) + \frac{v^2}{2}\right| = \left|\mathrm{i}\int_0^v \Psi(u)\,\mathrm{d}u\right| \leq \int_0^v \left(2|u| \wedge \frac{|u^2|}{2}\right)\,\mathrm{d}u = \left(v^2 \wedge \frac{|v|^3}{6}\right)$$

en prenant $u = 0$ dans la première relation. ◻

Dans le cas où le volume V est à variance finie, on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.1. Si V admet un moment d'ordre 2, alors :

$$\frac{J_{\lambda,\rho} - \mathbb{E}(J_{\lambda,\rho})}{\rho\sqrt{\lambda \mathbb{E}\left(V^2\right)}} \xrightarrow[\substack{\rho \to 0 \\ \lambda \to +\infty}]{L^1 \cap L^2} W \tag{6}$$

où W est le bruit blanc gaussien centré sur L^2 de covariance :

$$\mathbb{E}\left[W(\phi)W(\psi)\right] = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Posons $b = \rho\sqrt{\lambda \mathbb{E}\left(V^2\right)}$. Soit $\phi \in L^1 \cap L^2$. Puisque ϕ est une fonction, on peut écrire :

$$\phi(x + v^{1/d}C) = \int_{x+v^{1/d}C} \phi(y)\mathrm{d}y = vm_\phi(x,v)$$

où m_ϕ est la fonction moyenne définie dans la première section. En utilisant la transformée de Fourier pour une mesure aléatoire de Poisson et en notant $\Psi : u \mapsto e^{iu} - 1 - iu$, on écrit :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}\frac{J_{\lambda,\rho}(\phi) - \mathbb{E}(J_{\lambda,\rho}(\phi))}{b}\right)\right] = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+} \lambda\Psi\left(\frac{vm_\phi(x,v)}{\sqrt{\lambda\mathbb{E}\left(V^2\right)}}\right)F(\mathrm{d}v)\mathrm{d}x\right). \tag{7}$$

Avec l'inégalité (5) et la propriété de limite de la fonction moyenne $m_\phi(x,\rho v) \to \phi(x)$, on a pour presque tout x :

$$\lim_{\substack{\rho \to 0 \\ \lambda \to +\infty}} \lambda\Psi\left(\frac{vm_\phi(x,v)}{\sqrt{\lambda\mathbb{E}\left(V^2\right)}}\right) = -\frac{v^2\phi(x)^2}{2\mathbb{E}\left(V^2\right)},$$

car $\Psi(v) = \frac{-v^2}{2} + O(v^3)$. Si ϕ_* désigne la fonction maximale associée à ϕ, l'équation (5) assure enfin que :

$$\left|\lambda\Psi\left(\frac{vm_\phi(x,v)}{\sqrt{\lambda\mathbb{E}\left(V^2\right)}}\right)\right| \le \frac{v^2\phi_*(x)^2}{2\mathbb{E}\left(V^2\right)}.$$

Puisque $\phi^2 \in L^1$, d'après le résultat sur les fonctions maximales, la fonction ϕ_*^2 est dans L^1, ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence dominée dans l'équation (7) :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\rho \to 0 \\ \lambda \to +\infty}} \mathbb{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}\frac{J_{\lambda,\rho}(\phi) - \mathbb{E}(J_{\lambda,\rho}(\phi))}{b}\right)\right] &= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+} -\frac{v^2\phi(x)^2}{2\mathbb{E}\left(V^2\right)}F(\mathrm{d}v)\mathrm{d}x\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)^2\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

Ce calcul détermine la fonction caractéristique de la variable limite par linéarité, et l'on reconnaît la fonction caractéristique de $W(\phi)$ pour W bruit blanc gaussien sur L^2. Le résultat de Cramér-Wold permet de conclure quant à la convergence des lois fini-dimensionnelles. □

Le cas $V \in L^2$ est donc traité, le passage à la limite sur ρ et λ ne nécessitant aucune hypothèse supplémentaire. On suppose à partir de maintenant que V suit une distribution à queue lourde de paramètre $\gamma \in]1,2[$. Cela implique en particulier que V n'admet pas de moment d'ordre 2 fini (d'après la sous-section sur la théorie de Karamata).
Comme on le verra dans la Section 3, différents comportements limites apparaissent selon la limite de $\lambda\overline{F}_\rho(1)$, qui intervient lorque l'on considère le nombre moyen de grains de rayon supérieur à 1, couvrant l'origine.
Dans le cas où V n'admet pas de moment d'ordre 2, il faudra imposer des conditions supplémentaires aux mesures, ce qui mène à la définition des espaces suivants.

Définition 2.1. Pour $\alpha \in]0,1[$, on définit l'espace $\mathcal{M}^\alpha$, sous-espace de $\mathcal{M}^1$, par :

$$\mathcal{M}^\alpha = \left\{\phi \in \mathcal{M}^1 \mid \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\phi|(\mathrm{d}x)|\phi|(\mathrm{d}y)}{|x-y|^{(1-\alpha)d}} < +\infty\right\}.$$

Proposition 2.1. Les espaces $\mathcal{M}^\alpha$ sont croissants et contiennent $L^1 \cap L^2$, i.e. si $0 < \alpha < \beta < 1$, alors :

$$L^1 \cap L^2 \subset \mathcal{M}^\alpha \subset \mathcal{M}^\beta \subset \mathcal{M}^1.$$

Démonstration. Notons $D = \{(x,y) \in \left(\mathbb{R}^d\right)^2 \mid |x-y| \leq 1\}$. Soient $0 < \alpha < \beta < 1$ et $\phi \in L^1 \cap L^2$. Puisque ϕ est une fonction, on écrit :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\phi|(\mathrm{d}x)|\phi|(\mathrm{d}y)}{|x-y|^{(1-\alpha)d}} &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\phi|(x)|\phi|(y)}{|x-y|^{(1-\alpha)d}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_D \frac{|\phi|(x)|\phi|(y)}{|x-y|^{(1-\alpha)d}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{D^c} \frac{|\phi|(x)|\phi|(y)}{|x-y|^{(1-\alpha)d}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leq \int_D \frac{|\phi|(x)}{|x-y|^{(1-\alpha)d/2}}\frac{|\phi|(y)}{|x-y|^{(1-\alpha)d/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{D^c} |\phi|(x)|\phi|(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leq \int_D \frac{\phi(x)^2}{|x-y|^{(1-\alpha)d}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \|\phi\|_1^2 \leq \|\phi\|_2^2 \int_{B_1} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^{(1-\alpha)d}} + \|\phi\|_1^2\end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder et le théorème de Fubini.
Si maintenant $\phi \in \mathcal{M}^\alpha$, en particulier $\phi \in \mathcal{M}^1$, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\phi|(\mathrm{d}x)|\phi|(\mathrm{d}y)}{|x-y|^{(1-\beta)d}} \leq \int_D \frac{|\phi|(\mathrm{d}x)|\phi|(\mathrm{d}y)}{|x-y|^{(1-\alpha)d}} + \|\phi\|_1^2\,.$$

Cela assure que $\phi \in \mathcal{M}^\beta$ et conclut la preuve de la proposition. □

3 Changement d'échelle et résultats de convergence

Dans cette section, C désigne un ensemble mesurable borné de $\mathbb{R}^d$, avec $|C| = 1$ et $|\partial C| = 0$. Sans précision supplémentaire, les limites de cette partie seront données pour $\rho \to 0$ et $\lambda \to +\infty$. Il est utile de rappeler que :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}\frac{J_{\lambda,\rho}(\phi) - \mathbb{E}(J_{\lambda,\rho}(\phi))}{b}\right)\right] = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+} \Psi\left(\frac{\phi\left(x + v^{1/d}C\right)}{b}\right)\lambda F_\rho(\mathrm{d}v)\mathrm{d}x\right). \tag{8}$$

3.1 Régime "grand rayon"

Théorème 3.1. Supposons V à queue lourde de paramètre $\gamma \in]1,2[$. Si $\lambda\overline{F}_\rho(1) \to +\infty$, alors pour $\alpha \in]0, 2-\gamma[$:

$$\frac{J_{\lambda,\rho} - \mathbb{E}(J_{\lambda,\rho})}{\sqrt{\gamma\lambda\overline{F}_\rho(1)}} \xrightarrow[\substack{\rho\to 0\\ \lambda\to+\infty}]{\mathcal{M}^\alpha} W_{\gamma,C}$$

où $W_{\gamma,C}$ désigne le bruit blanc gaussien centré sur $\mathcal{M}^{2-\gamma}$ de covariance :

$$\mathbb{E}\left[W_{\gamma,C}(\phi)W_{\gamma,C}(\psi)\right] = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K_{\gamma,C}(x-y)\,\phi(\mathrm{d}x)\psi(\mathrm{d}y)$$

avec l'opérateur $K_{\gamma,C}(x) = \int_0^{+\infty} |(v^{-1/d}x + C) \cap C| v^{-\gamma}\mathrm{d}v$.

Démonstration. Commençons par vérifier que $W_{\gamma,C}$ ci-dessus définit bien une fonctionnelle linéaire gaussienne. Il suffit pour cela de voir que $(\phi,\psi) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K_{\gamma,C}(x-y)\,\phi(\mathrm{d}x)\psi(\mathrm{d}y)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}^{2-\gamma}$. La bilinéarité est claire. Pour $\phi \in M^{2-\gamma}$, le théorème de Fubini-Tonelli entraîne :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \phi\left(x + v^{1/d}C\right)^2 \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \left|\left(x - v^{1/d}C\right) \cap \left(y - v^{1/d}C\right)\right| |\phi|(\mathrm{d}x)|\phi|(\mathrm{d}y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} v\left|v^{-1/d}(x-y) + C \cap C\right| |\phi|(\mathrm{d}x)|\phi|(\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

puis en multipliant par $v^{-\gamma-1}$ et en intégrant selon v sur $\mathbb{R}_+$, on reconnaît l'expression de $K_{\gamma,C}$:

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+} \phi\left(x + v^{1/d}C\right)^2 v^{-\gamma-1}\mathrm{d}v\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K_{\gamma,C}(x-y)\,|\phi|(\mathrm{d}x)|\phi|(\mathrm{d}y). \tag{9}$$

Pour $a > 0$ tel que $C \subset aB_1$, un vecteur unitaire e et $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, $K_{\gamma,C}(x) \leq K_{\gamma,aB}(x) = K_{\gamma,aB}(e)\,|x|^{(1-\gamma)d}$, donc :

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+} \phi\left(x + v^{1/d}C\right)^2 v^{-\gamma-1}\mathrm{d}v\mathrm{d}x \leq K_{\gamma,aB}(e)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\phi|(\mathrm{d}x)|\phi|(\mathrm{d}y)}{|x-y|^{(1-(2-\gamma))d}} \leq K_{\gamma,aB}(e)\,\|\phi\|_{2-\gamma}\,. \tag{10}$$

Le théorème de Fubini assure enfin que l'équation (9) reste vraie pour ϕ (et non plus seulement $|\phi|$), dont le terme de gauche est strictement positif si $\phi \neq 0$.
On a donc bien vérifié que $W_{\gamma,C}$ définit une fonctionnelle linéaire gaussienne. Le lemme suivant résume des résultats utiles pour la suite de la preuve.

Lemme 3.1. Si C est un ensemble mesurable borné de $\mathbb{R}^d$ tel que $|\partial C| = 0$, alors $\lim_{r\to 1} |C\Delta rC| = 0$, où Δ désigne la différence symétrique : $A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B) = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.
Pour tout $\phi \in \mathcal{M}^1$, les applications suivantes sont continues sur $\mathbb{R}_+$:

$$v \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \phi\left(x + v^{1/d}C\right)^2 \mathrm{d}x \text{ et } v \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \Psi\left(\phi\left(x + v^{1/d}C\right)\right) \mathrm{d}x.$$

Si de plus $\phi \in \mathcal{M}^\alpha$ avec $\alpha \in]0,1[$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall v \in \mathbb{R}_+,\ \int_{\mathbb{R}^d} \phi\left(x + v^{1/d}C\right)^2 \mathrm{d}x \leq c\left(v \wedge v^{2-\alpha}\right).$$

Preuve du lemme. Pour le premier point, on écrit simplement :

$$|c\Delta rC| = |C| - |C\cap rC| + |rC| - |C\cap rC| = (1+r^d)|C| - 2|C\cap rC| \xrightarrow[r\to 1]{} 0$$

puisque, par convergence dominée, $|C\cap rC| = \int_C \mathbb{1}_{rC} \to |C|$ (car $|\partial C| = 0$).
Soit $\phi \in \mathcal{M}^1$. Posons pour $u, v \geq 0$, la quantité $d(u,v) = \int_{\mathbb{R}^d} \left|\phi\left(x + v^{1/d}C\right) - \phi\left(x + u^{1/d}C\right)\right| \mathrm{d}x$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} d(u,v) &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\phi|\left(\left(x + u^{1/d}C\right)\Delta\left(x + v^{1/d}C\right)\right) \mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\phi|\left(x + \left(u^{1/d}C\Delta v^{1/d}C\right)\right) | \,\mathrm{d}x \\ &\leq \|\phi\|_1\, u\, |C\Delta\,(v/u)^{1/d}\, C| \xrightarrow[u\to v]{} 0 \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\int_{\mathbb{R}^d} |\phi|(\cdot + A) = \|\phi\|_1 |A|$ et le résultat précédent. Les bornes suivantes suffisent à conclure la continuité des applications considérées :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|\phi\left(x + v^{1/d}C\right)^2 - \phi\left(x + u^{1/d}C\right)^2\right| \mathrm{d}x \leq 2\|\phi\|_1\, d(u,v),$$

et puisque $|\Psi(v) - \Psi(u)| \leq 2|v-u|$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|\Psi\left(\phi\left(x + v^{1/d}C\right)\right) - \Psi\left(\phi\left(x + u^{1/d}C\right)\right)\right| \mathrm{d}x \leq 2d(u,v).$$

Soit $\phi \in \mathcal{M}^\alpha$. Quitte à considérer $|\phi|$, supposons sans perte de généralité ϕ positive. Dans un premier temps,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi\left(x + v^{1/d}C\right)^2 \mathrm{d}x \leq |C|\, \|\phi\|_1^2\, v.$$

D'autre part, pour $a > 0$ tel que $C \subset aB_1$, il vient en utilisant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \phi\left(x + v^{1/d}C\right)^2 \mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \phi\left(x + (av)^{1/d}B_1\right)^2 \mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \left|\left(x - (av)^{1/d}B_1\right)\cap\left(y - (av)^{1/d}B_1\right)\right| \phi(\mathrm{d}x)\phi(\mathrm{d}y) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} av\mathbb{1}_{|x-y|<2(av)^{1/d}}\, \phi(\mathrm{d}x)\phi(\mathrm{d}y) \leq 2^{(1-\alpha)d} a^{2-\alpha}\, \|\phi\|_\alpha^2\, v^{2-\alpha}. \end{aligned}$$

On déduit le résultat des deux inégalités ci-dessus. □

Soit $\phi \in \mathcal{M}^\alpha$. Notons $b = \sqrt{\gamma\lambda\overline{F}_\rho(1)}$. Posons :

$$g_\rho : v \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \Psi\left(\frac{\phi\left(x + v^{1/d}C\right)}{b}\right) \mathrm{d}x \text{ et } g : v \mapsto -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \phi\left(x + v^{1/d}C\right)^2 \mathrm{d}x,$$

continues d'après le lemme ci-dessus. Le corollaire 1.1 appliqué pour $p = 1$ et $q = 2 - \alpha$, entraîne par définition de b :

$$\frac{\lambda}{b^2}\int_{\mathbb{R}_+} g(v)\, F_\rho(\mathrm{d}v) \sim \int_{\mathbb{R}_+} g(v)\, v^{-\gamma-1}\, \mathrm{d}v.$$

Posons maintenant $G_\rho : v \mapsto \lambda g_\rho(v) - \lambda b^{-2} g(v)$. Par propriété de Ψ, il vient :

$$\begin{aligned} |G_\rho(v)| &= \left|\lambda\int_{\mathbb{R}^d} \Psi\left(\frac{\phi\left(x + v^{1/d}C\right)}{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\phi\left(x + v^{1/d}C\right)}{b}\right)^2 \mathrm{d}x\right| \\ &\leq \frac{\lambda}{6b^3}\int_{\mathbb{R}^d} \left|\phi\left(x + v^{1/d}C\right)\right|^3 \mathrm{d}x \leq \frac{\lambda}{6b^3}\, \|\phi\|_1^3\, v. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de b et le dernier résultat du lemme précédent, on obtient :

$$\frac{\overline{F}_\rho(1)}{v}|G_\rho(v)| \leq \frac{\|\phi\|_1^3}{6\gamma b} \text{ et } \frac{\overline{F}_\rho(1)}{v^{2-\alpha}}|G_\rho(v)| \leq \frac{c}{\gamma}.$$

Le corollaire 1.2 pour $p = 1$ et $q = 2 - \alpha$ permet de conclure que $\int_{\mathbb{R}_+} G_\rho(v)\, F_\rho(\mathrm{d}v) \to 0$. On en déduit :

$$\int_{\mathbb{R}_+} g_\rho(v)\, F_\rho(\mathrm{d}v) \xrightarrow[\rho\to 0]{} \int_{\mathbb{R}_+} g(v)\, v^{-\gamma-1}\,\mathrm{d}v.$$

En passant à l'exponentielle et en rappelant la fonction caractéristique pour une mesure aléatoire de Poisson, il vient d'après l'équation (9) :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}\frac{J_{\lambda,\rho}(\phi) - \mathbb{E}\left[J_{\lambda,\rho}(\phi)\right]}{b}\right)\right] = \exp\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+}\Psi\left(\frac{\phi\left(x + v^{1/d}C\right)}{b}\right)\lambda F_\rho(\mathrm{d}v)\mathrm{d}x$$
$$\xrightarrow[\rho\to 0]{} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K_{\gamma,C}(x-y)\,\phi(\mathrm{d}x)\phi(\mathrm{d}y)\right).$$

On reconnaît pour le terme de droite l'expression de la fonction caractéristique de $W_{\gamma,C}(\phi)$ et le résultat de Cramér-Wold permet de conclure. □

3.2 Régime intermédiaire

Théorème 3.2. Supposons V à queue lourde de paramètre $\gamma \in]1,2[$. Si $\lambda\overline{F}_\rho(1) \to \sigma_0 > 0$, alors pour $\alpha \in]0, 2-\gamma[$:

$$J_{\lambda,\rho} - \mathbb{E}(J_{\lambda,\rho}) \xrightarrow[\substack{\rho\to 0\\ \lambda\to+\infty}]{\mathcal{M}^\alpha} J^*_{\gamma,C}$$

où $J^*_{\gamma,C}$ désigne une fonctionnelle centrée sur $\mathcal{M}^{2-\gamma}$ qui s'écrit, pour la mesure de Poisson N_γ d'intensité $\mathrm{d}x\, v^{-\gamma-1}\mathrm{d}v$:

$$J^*_{\gamma,C}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^{+\infty}\phi\left(\sigma\left(x + v^{1/d}C\right)\right)\left(N_\gamma(\mathrm{d}x,\mathrm{d}v) - \mathrm{d}x\, v^{-\gamma-1}\mathrm{d}v\right)$$

avec $\sigma = (\gamma\sigma_0)^{\frac{1}{(\gamma-1)d}}$.

Démonstration. Pour $\phi \in \mathcal{M}^{2-\gamma}$, on a vu à l'équation (10) que $\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+}\phi\left(x + v^{1/d}C\right)^2 v^{-\gamma-1}\mathrm{d}v\mathrm{d}x < \infty$ ce qui assure la bonne définition de $J^*_{\gamma,C}(\phi)$ pour $\phi \in \mathcal{M}^{2-\gamma}$ d'après la Proposition 1.1 et l'inéquation (3), car $\gamma > 1$.
Soit $\phi \in \mathcal{M}^\alpha$, avec $0 < \alpha < 2-\gamma$. Considérons comme précédemment l'application :

$$g : v \mapsto \int_{\mathbb{R}^d}\Psi\left(\phi\left(x + v^{1/d}C\right)\right)\mathrm{d}x.$$

Le corollaire 1.1 pour $p = 1$ et $q = 2 - \alpha$ (applicable d'après le lemme de la preuve précédente et celui sur la fonction Ψ) donne :

$$\int_{\mathbb{R}_+} g(v)\,\lambda F_\rho(\mathrm{d}v \sim \lambda\overline{F}_\rho(1)\int_{\mathbb{R}_+} g(v)\gamma\, v^{-\gamma-1}\,\mathrm{d}v.$$

L'équation (8) s'écrit à la limite, étant donné que $\lambda\overline{F}_\rho(1) \to \sigma_0$:

$$\mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}(J_{\lambda,\rho}(\phi) - \mathbb{E}[J_{\lambda,\rho}(\phi)])}\right] \xrightarrow[\rho\to 0]{} \exp\left(\gamma\sigma_0\int_{\mathbb{R}_+} g(v)\, v^{-\gamma-1}\,\mathrm{d}v\right).$$

Pour $\sigma > 0$, par changement de variables, en notant $\phi_\sigma : A \mapsto \phi(\sigma A)$:

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+}\Psi\left(\phi\left(x + v^{1/d}C\right)\right) v^{-\gamma-1}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x = \sigma^{d(1-\gamma)}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+}\Psi\left(\phi_\sigma\left(y + u^{1/d}C\right)\right) v^{-\gamma-1}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}y,$$

donc pour $\sigma = (\gamma\sigma_0)^{\frac{1}{(\gamma-1)d}}$:

$$\mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}(J_{\lambda,\rho}(\phi) - \mathbb{E}[J_{\lambda,\rho}(\phi)])}\right] \xrightarrow[\rho\to 0]{} \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+}\Psi\left(\phi_\sigma\left(x + v^{1/d}C\right)\right) v^{-\gamma-1}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\right)$$

et on reconnaît la formule de la fonction caractéristique de $\Lambda_\gamma(\phi)$ avec la formule donnée à la Proposition 1.2. □

3.3 Régime "petit rayon"

Théorème 3.3. Supposons V à queue lourde de paramètre $\gamma \in]1,2[$. Si $\lambda \overline{F}_\rho(1) \to 0$, alors :

$$\frac{J_{\lambda,\rho} - \mathbb{E}(J_{\lambda,\rho})}{c_\gamma \left(1/\overline{F}_\rho\right)^{-1}(\gamma\lambda)} \xrightarrow[\substack{\rho\to 0\\ \lambda\to+\infty}]{L^1\cap L^2} \Lambda_\gamma$$

où $\left(1/\overline{F}_\rho\right)^{-1}$ désigne l'inverse généralisée de $1/\overline{F}_\rho$, définie par $\left(1/\overline{F}_\rho\right)^{-1}(v) = \inf\{t \geq 0 \mid \frac{1}{\overline{F}_\rho(t)} \geq v\}$, c_γ est une constante et Λ_γ désigne une fonctionnelle centrée sur $L^1 \cap L^2$ caractérisée par :

$$\forall \phi \in L^1 \cap L^2,\ \mathbb{E}\left[e^{i\Lambda_\gamma(\phi)}\right] = \exp\left(-\sigma_\phi^\gamma \left(1 - \mathrm{i}\beta_\phi \tan\frac{\pi\gamma}{2}\right)\right)$$

avec $\sigma_\phi = \|\phi\|_\gamma$ et $\beta_\phi = \frac{\|\phi_+\|_\gamma^\gamma - \|\phi_-\|_\gamma^\gamma}{\|\phi\|_\gamma^\gamma}$.

Démonstration. La preuve qui suit est peu détaillée. Pour plus de précisions, on renvoie à l'article [4] et au livre [7]. En utilisant les résultats sur la fonction Ψ, les corollaires du théorème de Karamata (avec $p = 1$ et $q = 2$) et les fonctions maximales de la sous-section 1.4 pour une domination, on commence par montrer que pour $\phi \in L^1 \cap L^2$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \Psi\left(vm_\phi(x, bv)\right) \lambda\, F_{\rho/b}(\mathrm{d}v) \xrightarrow[\rho\to 0]{} \int_{\mathbb{R}_+} \Psi\left(v\phi(x)\right) v^{-\gamma-1}\, \mathrm{d}v \tag{11}$$

où l'on a noté $b = \left(1/\overline{F}_\rho\right)^{-1}(\gamma\lambda)$. L'étape suivante est d'intégrer cette relation limite sur $\mathbb{R}^d$. En choisissant $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma \in [1+\varepsilon, 2-\varepsilon]$, puisque $|\Psi(v)| \leq 2\min(|v|, v^2) \leq 2\min(|v|^{\gamma-\varepsilon}, |v|^{\gamma+\varepsilon})$ et par définition de la fonction maximale associée à ϕ,

$$|\Psi\left(vm_\phi(x, bv)\right)| \leq 2\left(\phi_*(x)^{\gamma-\varepsilon} + \phi_*(x)^{\gamma+\varepsilon}\right)\left(v^{\gamma-\varepsilon} \wedge v^{\gamma+\varepsilon}\right).$$

En utilisant le Corollaire 1.1 avec $p = \gamma - \varepsilon$ et $q = \gamma + \varepsilon$, on voit que pour ρ assez petit (pour avoir une inégalité à partir de l'équivalence) :

$$\int_{\mathbb{R}_+} |\Psi\left(vm_\phi(x, bv)\right)|\ \lambda\, F_{\rho/b}(\mathrm{d}v) \leq \frac{2\varepsilon + 4}{\varepsilon}\left(\phi_*(x)^{\gamma-\varepsilon} + \phi_*(x)^{\gamma+\varepsilon}\right).$$

Le lemme 1.1 assure alors que la borne ci-dessus est intégrable, et en rappelant l'équation (8) :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}\frac{J_{\lambda,\rho}(\phi) - \mathbb{E}\left[J_{\lambda,\rho}(\phi)\right]}{b}\right)\right] \xrightarrow[\rho\to 0]{} \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+} \Psi(v\phi(x))\, v^{-\gamma-1}\, \mathrm{d}v\mathrm{d}x\right) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}c_\gamma\Lambda_\gamma(\phi)\right)\right].$$

où la dernière égalité repose sur des résultats issus de [4] et [7]. Le résultat de Cramér-Wold permet à nouveau de conclure quant à la convergence des lois fin-dimensionnelles. □

4 Propriétés des limites

Cette section présente quelques résultats sur les limites obtenues dans la partie précédente.

4.1 Régime "grand rayon"

Proposition 4.1. La fonctionnelle aléatoire $W_{\gamma,C}$ est auto-similaire. Plus précisément, pour $s > 0$, si $\phi_s : A \mapsto \phi(sA)$, alors les processus $\phi \mapsto W_{\gamma,C}(\phi_s)$ et $\phi \mapsto s^{\frac{(\gamma-1)d}{2}} W_{\gamma,C}(\phi)$ ont les mêmes lois fini-dimensionnelles.

Démonstration. Pour vérifier que les processus ont les mêmes lois fini-dimensionnelles, il suffit de voir qu'ils ont même moyenne et même opérateur de covariance, car ils sont gaussiens. Ils sont tous deux centrés et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[W_{\gamma,C}(\phi_s)W_{\gamma,C}(\psi_s)\right] &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K_{\gamma,C}(x-y)\, \phi_s(\mathrm{d}x)\psi_s(\mathrm{d}y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K_{\gamma,C}\left(\frac{x-y}{s}\right) \phi(\mathrm{d}x)\psi(\mathrm{d}y) \\
&= s^{(\gamma-1)d}\mathbb{E}\left[W_{\gamma,C}(\phi)W_{\gamma,C}(\psi)\right] = \mathbb{E}\left[s^{\frac{(\gamma-1)d}{2}} W_{\gamma,C}(\phi)\, s^{\frac{(\gamma-1)d}{2}} W_{\gamma,C}(\psi)\right],
\end{aligned}$$

puisque l'opérateur $K_{\gamma,C}$ a la propriété d'auto-similarité suivante :

$$\begin{aligned}
K_{\gamma,C}(ax) = \int_0^{+\infty} \left|\left((a^{-d}v)^{-1/d}x + C\right) \cap C\right| v^{-\gamma}\, \mathrm{d}v &= \int_0^{+\infty} \left|\left(u^{-1/d}x + C\right) \cap C\right| (a^d u)^{-\gamma}\, a^d \mathrm{d}u \\
&= a^{(1-\gamma)d} K_{\gamma,C}(x).
\end{aligned}$$

□

Théorème 4.1 (Long range dependence)**.** La fonctionnelle aléatoire $W_{\gamma,C}$ est à dépendance à longue portée, i.e. :

$$\lim_{r\to\infty} |\mathrm{Cov}\,(W_{\gamma,C}(B_1), W_{\gamma,C}(B_r\backslash B_1))\,| = +\infty.$$

Démonstration. On commence par écrire, en rappelant que $K_{\gamma,C}$ est positif :

$$|\mathrm{Cov}\,(W_{\gamma,C}(B_1), W_{\gamma,C}(B_r\backslash B_1))\,| = \int_{B_1}\int_{B_r\backslash B_1} K_{\gamma,C}(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Par convergence monotone,

$$\lim_{r\to\infty} |\mathrm{Cov}\,(W_{\gamma,C}(B_1), W_{\gamma,C}(B_r\backslash B_1))\,| = \int_{B_1}\int_{B_1^c} K_{\gamma,C}(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Or, en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli à x fixé :

$$\begin{aligned}\int_{B_1^c} K_{\gamma,C}(x-y)\,\mathrm{d}y &= \int_{B_1^c}\int_0^{+\infty} \left|\left(v^{-1/d}(x-y)+C\right)\cap C\right|\, v^{-\gamma}\mathrm{d}v\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{+\infty}\int_{B_1^c}\int_{v^{1/d}C} \mathbb{1}_{u\in x-y+v^{1/d}C}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}y\, v^{-\gamma-1}\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{+\infty}\int_{x-v^{1/d}C} \left|B_1^c\cap\left(y+v^{1/d}C\right)\right|\,\mathrm{d}y\, v^{-\gamma-1}\mathrm{d}v \geq \frac{1}{2}\int_{2|B_1|}^{+\infty} v^{-\gamma+1}\,\mathrm{d}v = +\infty\end{aligned}$$

puisque $\left|B_1^c\cap\left(y+v^{1/d}C\right)\right| \geq v-|B_1| \geq \frac{v}{2}$ dès que $v\geq 2|B_1|$. La dernière intégrale diverge car $-\gamma+1\in]-1,0[$. On en déduit immédiatement le résultat voulu (car $|B_1|>0$). □

4.2 Régime intermédiaire

Théorème 4.2 (Long range dependence)**.** La fonctionnelle aléatoire $J^*_{\gamma,C}$ est aussi à dépendance à longue portée.

Démonstration. On remarque en fait que $J^*_{\gamma,C}$ et $W_{\gamma,C}$ ont même covariance, en écrivant d'après l'équation (1) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[J^*_{\gamma,C}(\phi)J^*_{\gamma,C}(\psi)\right] &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+} \phi(x+v^{1/d}C)\psi(x+v^{1/d}C)\,\mathrm{d}x\,v^{-\gamma-1}\mathrm{d}v \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{x+v^{1/d}C}\phi(\mathrm{d}y)\int_{x+v^{1/d}C}\psi(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x\,v^{-\gamma-1}\mathrm{d}v \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^{+\infty}\left|\left(y-v^{1/d}C\right)\cap\left(z-v^{1/d}C\right)\right| v^{-\gamma-1}\mathrm{d}v\,\phi(\mathrm{d}y)\psi(\mathrm{d}z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K_{\gamma,C}(y-z)\,\phi(\mathrm{d}y)\psi(\mathrm{d}z) = \mathbb{E}\left[W_{\gamma,C}(\phi)W_{\gamma,C}(\psi)\right].\end{aligned}$$

Cela suffit à conclure. □

Remarque 4.1. Contrairement à $W_{\gamma,C}$, la fonctionnelle $J^*_{\gamma,C}$ n'est pas auto-similaire.

4.3 Régime "petit rayon"

Proposition 4.2. La fonctionnelle aléatoire Λ_γ est auto-similaire. Plus précisément, pour $s>0$, si $\phi_s : x\mapsto s^d\phi(sx)$, alors les processus $\phi\mapsto\Lambda_\gamma(\phi_s)$ et $\phi\mapsto s^{\frac{(\gamma-1)d}{\gamma}}\Lambda_\gamma(\phi)$ ont les mêmes lois fini-dimensionnelles.

Démonstration. Par linéarité de Λ_γ, il suffit de vérifier que les variables $\Lambda_\gamma(\phi_s)$ et $s^{\frac{(\gamma-1)d}{\gamma}}\Lambda_\gamma(\phi)$ ont même loi (Cramér-Wold). Pour cela, considérons la fonction caractéristique. On commence par écrire :

$$\|\phi_s\|_\gamma^\gamma = \int_{\mathbb{R}^d}|s^d\phi(sx)|^\gamma\,\mathrm{d}x = s^{(\gamma-1)d}\int_{\mathbb{R}^d}|\phi(y)|^\gamma\,\mathrm{d}y.$$

Donc $\|\phi_s\|_\gamma = s^{\frac{(\gamma-1)d}{\gamma}}\|\phi\|_\gamma$, dont on déduit : $\sigma_{\phi_s} = s^{\frac{(\gamma-1)d}{\gamma}}\sigma_\phi$ et $\beta_{\phi_s}=\beta_\phi$. De là :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{i\Lambda_\gamma(\phi_s)}\right] &= \exp\left(-\sigma_{\phi_s}^\gamma\left(1-\mathrm{i}\beta_{\phi_s}\tan\frac{\pi\gamma}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left(-s^{(\gamma-1)d}\sigma_\phi^\gamma\left(1-\mathrm{i}\beta_\phi\tan\frac{\pi\gamma}{2}\right)\right) = \mathbb{E}\left[e^{i\Lambda_\gamma\left(s^{\frac{(\gamma-1)d}{\gamma}}\phi\right)}\right].\end{aligned}$$

□

Références

[1] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels. *Regular variation.* Cambridge University Press, 1987.

[2] J. C. Breton. *Processus stochastiques.* Notes de cours.

[3] A. Clarenne. *Asymptotiques dans des modèles de boules aléatoires poissoniennes et non poissoniennes.* PhD thesis, 2019.

[4] I. Kaj, L. Leskelä, I. Norros, and V. Schmidt. Scaling limits for random fields with long-range dependence. *The Annals of Probability*, 2007.

[5] O. Kallenberg. *Foundations of Modern Probability.* Springer, 1997.

[6] W. Rudin. *Real and complex Analysis.* McGraw-Hill, 1987.

[7] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu. *Scaling limits for random fields with long-range dependence.* Chapman and Hall.