ANNÉE 2017

RAPPORT DE STAGE

Rémi MOREAU

DYNAMIQUE HOLOMORPHE - THÉORÈME DE LINÉARISATION DE BRJUNO

sous la tutelle de **Arnaud CHÉRITAT**

Institut de Mathématiques de Toulouse

Table des matières

1. Systèmes dynamiques holomorphes

1.1. Définitions

L'objectif est d'étudier les systèmes dynamiques holomorphes au voisinage d'un point fixe. Sauf indication contraire, f^n désigne la n-ième itérée de f dans la suite du document.

(i) Un système dynamique holomorphe est un système de la forme

$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{C} \\ z_{n+1} = f(z_n) \end{cases}$$

où f est une fonction holomorphe, (z_n) une suite de nombres complexes.

(ii) La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des itérés de z_0 est appelée orbite de z_0. Une orbite est dite périodique s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p(z_0) = z_0$. L'entier $\min\{p \in \mathbb{N}^* \mid f^p(z_0) = z_0\}$ est appelé période de l'orbite.

(iii) En supposant que f admet un point fixe p, quitte à considérer $\tilde{f} : z \mapsto f(z+p) - p$, on se ramènera toujours au cas où $p = 0$, i.e. $f(0) = 0$, sans perte de généralité.

(iv) Dans ce cadre, $f'(0)$ est communément noté λ, coefficient de la partie linéaire de f. Le complexe λ est aussi appelé *multiplicateur* du point fixe considéré. L'étude s'oriente alors autour des différentes valeurs possibles de λ. La fonction f s'écrit en particulier sur un voisinage du point fixe :

$$f : z \mapsto \lambda z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

(v) Une application f de la forme $z \mapsto \lambda z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ avec $\lambda \neq 0$ définit un *germe* de difféomorphisme centré en 0 si son rayon de convergence R est strictement positif.

Définition 1.1. Une application est dite *conforme* si elle est à la fois holomorphe et bijective. Elle conserve en particulier les mesures d'angles orientés : l'angle entre deux courbes au point où elle se croisent est conservé.

Remarque 1.2. Si ϕ est conforme, alors ϕ^{-1} l'est aussi.

Définition 1.3. Une fonction $f : U \to U$ est dite *conformément conjuguée* à $g : V \to V$ s'il existe $\phi : U \to V$ conforme telle que $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$.

L'objectif est de conjuguer conformément f au premier terme non nul de son développement en série entière : ce procédé est appelé *linéarisation*. On verra par la suite que ce n'est pas toujours possible. Introduisons alors ces quelques notions supplémentaires.
L'application f est dite :

(i) *topologiquement linéarisable* si f est conjuguée à sa partie linéaire par une application continue

(ii) *formellement linéarisable* si f est conjuguée à sa partie linéaire par une série formelle

(iii) *holomorphiquement linéarisable* si f est conjuguée à sa partie linéaire par une application holomorphe

(iv) *conformément linéarisable* si f est conjuguée à sa partie linéaire par une application conforme.

Remarque 1.4. La notion la plus forte ici est la linéarisabilité conforme. En classification locale il n'y a pas de distinction entre (iii) et (iv) : ϕ^{-1} doit être bien définie pour assurer une conjugaison.

On se ramène sans perte de généralité au cas où le point fixe de f est l'origine. La suite de l'étude se fait donc au voisinage de 0, avec $f : z \mapsto \lambda z + a_2 z^2 + \cdots$. Plusieurs cas se présentent :

(i) $\lambda = 0$: le point fixe est dit super-attractif

(ii) $0 < |\lambda| < 1$: le point fixe est dit attractif

(iii) $|\lambda| > 1$: le point fixe est dit répulsif

(iv) $|\lambda| = 1$: le point fixe est dit indifférent ou neutre

Dans le dernier cas, on distinguera deux sous-cas selon la nature du complexe λ, si λ est racine de l'unité (rationnellement neutre) ou non (irrationnellement neutre). Ce dernier cas est le plus riche : de nombreux problèmes restent encore à résoudre aujourd'hui.

1.2. Résultats arithmétiques

1.2.1. Fractions continues

Définition 1.5. Pour des entiers positifs $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, la fraction continue notée $[a_0, \cdots, a_n]$ désigne la quantité

$$[a_0, \cdots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}$$

Remarque 1.6. En définissant $\Gamma_\alpha : z \mapsto \alpha + \frac{1}{z}$ et $\Gamma_\alpha(\infty) = \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$, la définition précédente peut être réécrite :

$$[a_0, \cdots, a_n] = \Gamma_{a_0} \circ \cdots \circ \Gamma_{a_n}(\infty)$$

Remarquons que l'application linéaire $T_\alpha : (x, y) \mapsto (\alpha x + y, x)$ de matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ correspond via la projection $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ à Γ_α.

Définition 1.7. Pour une suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée, définissons les suites (p_n) et (q_n) par :

$$p_{-1} = 1,\ q_{-1} = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 1.8. Notons en particulier que $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = T_{a_0} \circ \cdots \circ T_{a_n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc via la projection $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{p_n}{q_n} = \Gamma_{a_0} \circ \cdots \circ \Gamma_{a_n}(\infty) = [a_0, \cdots, a_n]$$

De plus, $\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $T_{a_0} \circ \cdots \circ T_{a_n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T_{a_0} \circ \cdots \circ T_{a_{n-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}$.

Les images de la base canonique par $T_{a_0} \circ \cdots \circ T_{a_n}$ sont donc connues :

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

Chacune des applications T_{a_n} correspond en fait à un changement d'orientation. Pour expliquer cela, introduisons la notion d'espace projectif.

Définition 1.9. L'espace projectif est défini comme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\mathbb{R}^*$ et noté $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$: il peut être vu comme l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, en associant chacune de ces droites à leur pente (ou l'inverse de leur pente), $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Proposition 1.10. *Le plan projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est invariant par l'action du groupe linéaire $GL_2(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$. Considérons une droite du plan projectif de pente $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ (par convention nulle si $x = \infty$), constituée des points $\{(tx, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} tx \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} ax + b \\ cx + d \end{pmatrix}$$

Cela peut-être vu comme l'homographie $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ qui envoie une droite de pente $\frac{1}{x}$ sur une droite de pente $\frac{cx+d}{ax+b}$ (en se ramenant à la définition par le produit matriciel, la droite de pente nulle, $x = \infty$, est envoyée sur la droite de pente $\frac{c}{a}$) : $GL_2(\mathbb{R})$ laisse $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ invariant. □

On déduit alors l'interprétation géométrique proposée plus haut en remarquant que les applications T_{a_n} sont inversibles (toutes de déterminant $-1 \neq 0$).

Proposition 1.11.

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \ p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}$ *et* $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \ p_{n-1} q_n - q_{n-1} p_n = (-1)^n$

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour le second point, il suffit de prendre le déterminant dans l'égalité plus haut. □

Remarque 1.12. Par le théorème de Bézout, pour $n \in \mathbb{N}$, p_n et q_n sont en particulier premiers entre eux. La distance entre deux quotients consécutifs est donnée par :

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

1.2.2. Approximations rationnelles

Pour $r \in \mathbb{R}$ on note $\lfloor r \rfloor$ la partie entière de r et $\{r\} = r - \lfloor r \rfloor$ sa partie fractionnaire. Définissons récursivement les suites (r_n) et (a_n) par :

$$a_0 = \lfloor r \rfloor, \quad r_0 = \{r\}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \lfloor \frac{1}{r_n} \rfloor, \quad r_{n+1} = \{\frac{1}{r_n}\}$$

Définissons ensuite les suites (p_n) et (q_n) comme précédemment :

$$\begin{aligned} &p_{-1} = 1, \quad p_0 = a_0, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \\ &q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \end{aligned}$$

Comme à la sous-section précédente, les rapports $\frac{p_n}{q_n}$ appelés approximations rationnelles vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{p_n}{q_n} = [a_0, \cdots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}$$

Ici le reste (partie fractionnaire à l'ordre n) permet même une description plus précise :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + r_n}}} = \lim_{n\to\infty} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$$

De cette dernière remarque découlent les deux résultats suivants :

Théorème 1.13. *Les approximations $\frac{p_n}{q_n}$ convergent vers r.*

Corollaire 1.14. *Une suite d'entiers positifs (a_n) détermine entièrement le réel r.*

Démonstration. La suite (a_n) permet de définir les suites (p_n) et (q_n), donc en particulier la suite des quotients $(\frac{p_n}{q_n})$ dont la limite est r. □

Proposition 1.15. *Il existe $c \in]\frac{1}{2}, 1[$ tel que $d_n = |q_n r - p_n| = \frac{c}{q_{n+1}}$.*

Démonstration. (q_n) est (exponentiellement) croissante et (d_n) décroissante de limite nulle (cela découle des expressions précédentes). Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = q_n r + (-1)^{n+1} d_n$, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{p_n}{q_n} = r + (-1)^{n+1}\frac{d_n}{q_n}$$

Puisque $\frac{d_n}{q_n}$ tend rapidement vers 0, on retrouve la convergence des approximations rationnelles vers r.
De là, pour $n \in \mathbb{N}$, en faisant la différence entre le rang n et le rang $n+1$,

$$\frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = (-1)^n \left(\frac{d_n}{q_n} + \frac{d_{n+1}}{q_{n+1}}\right)$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ q_n d_{n+1} + q_{n+1} d_n = 1$. Puisque $q_{n+1}d_n > q_n d_{n+1}$ par croissance de (q_n) et décroissance de (d_n), il vient : $\frac{1}{2} < q_{n+1}d_n < 1$. □

1.2.3. Nombres diophantiens

Définition 1.16. Soit $\alpha \geq 2$. Un irrationnel x est dit diophantien d'ordre α si

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall\ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\quad \left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{\varepsilon}{q^\alpha}$$

.

Proposition 1.17. *Un irrationnel $x \in]0,1[$ est diophantien d'ordre inférieur ou égal à α si et seulement si $\exists C > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ q_{n+1} \leq C q_n^{\alpha-1}$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $q_n < q < q_{n+1}$ alors pour $p \in \mathbb{Z}$:

$$|qx - p| \geq d_n = |q_n x - p_n|$$

Or $d_n = \frac{C}{q_{n+1}}$ avec $C \in]\frac{1}{2}, 1[$ (d'après la sous-section précédente), donc puisque $q^{\alpha-1} > q_n^{\alpha-1}$,

$$|x - \frac{p}{q}|q^\alpha = |qx - p|q^{\alpha-1} > d_n q_n^{\alpha-1} = C\frac{q_n^{\alpha-1}}{q_{n+1}}$$

Si les quotients $\frac{q_{n+1}}{q_n^{\alpha-1}}$ sont bornés alors leurs inverses sont loin de 0 (il existe un disque centré en 0 qui n'en contient aucun) donc $\exists \varepsilon > 0,\ |x - \frac{p}{q}|q^\alpha > \varepsilon$: x est diophantien.
Réciproquement, si x est diophantien d'ordre α, alors par définition,

$$\exists \varepsilon > 0,\ \frac{1}{q_n} d_n = \frac{1}{q_n}|q_n x - p_n| > \frac{\varepsilon}{q_n^\alpha}$$

Or $d_n = \frac{C}{q_{n+1}}$ avec $C \in]\frac{1}{2}, 1[$, donc : $\frac{C}{q_{n+1}} > \frac{\varepsilon}{q_n^{\alpha-1}}$, ce qui conclut : en notant $\tilde{C} = \frac{C}{\varepsilon} > 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ q_{n+1} \leq \tilde{C} q_n^{\alpha-1}$$

□

Théorème 1.18. *Si $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ satisfait une équation de la forme $P(\xi) = 0$ où P est un polynôme de degré d à coefficients entiers, alors ξ est diophantien d'ordre d.*

Démonstration. Remarquons d'abord qu'il suffit de montrer le caractère diophantien pour des rationnels dans un intervalle centré en ξ de la forme $[\xi - \alpha, \xi + \alpha]$. Cela découle de l'inégalité triangulaire (en effet, pour $\frac{p}{q} \in [\xi - \alpha, \xi + \alpha]$, $\forall \frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q} \setminus [\xi - \alpha, \xi + \alpha]$, $|\xi - \frac{p'}{q'}| > |\xi - \frac{p}{q}|$).

Quitte à restreindre le domaine d'étude en un intervalle centré en ξ noté $[\xi - a, \xi + a]$, on peut supposer que P (qui est un polynôme non nul) ne s'annule pas sur $\mathbb{Q} \cap [\xi - a, \xi + a]$ (zéros isolés). Il ne reste donc qu'à considérer les $\frac{p}{q}$ tels que $P(\frac{p}{q}) \neq 0$.

Or, P est à coefficients entiers, donc nécessairement

$$|P(\frac{p}{q})| \geq \frac{1}{q^d}$$

D'autre part, l'inégalité des accroissements finis appliquée à P sur l'intervalle $[\xi-a,\xi+a]$ (P est de classe $\mathcal{C}^\infty$) assure,

$$\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [\xi-a,\xi+a], \ \left| P(\xi) - P(\frac{p}{q}) \right| = |P(\frac{p}{q})| \leq \sup_{[\xi-a,\xi+a]} |P'| \left| \xi - \frac{p}{q} \right|$$

(Le polynôme P ne peut pas être constant, sinon il serait nul, donc $\sup\limits_{[\xi-a,\xi+a]} |P'| > 0$.)

De là, pour $0 < \varepsilon < \left(\sup\limits_{[\xi-a,\xi+a]} |P'| \right)^{-1}$, il vient : $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{\varepsilon}{q^d}$, ce qui conclut. □

1.3. Rotations

Soit $\mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ le cercle unité. Soit $\lambda = e^{2i\pi\xi} \in \mathcal{S}^1$. ξ est appelé nombre de rotation.
Considérons le système dynamique $z \mapsto \lambda z$. Pour étudier le comportement d'une orbite, puisque deux orbites sont isométriques (via une rotation du cercle), il suffit de considérer $1 \mapsto \lambda \mapsto \lambda^2 \mapsto \cdots$, sans perte de généralité.

(i) Si ξ est rationnel, alors l'ordre de λ est fini, l'orbite contient un nombre fini de points.

(ii) Sinon, λ n'est pas une racine de l'unité, il n'y a pas de point périodique (hormis le point fixe).

Remarque 1.19. En associant le cercle $\mathcal{S}^1$ au quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (premier théorème d'isomorphismes appliqué à $\xi \mapsto e^{2i\pi\xi}$), cela revient à étudier le système dynamique $x \mapsto x + \xi$ et l'orbite $0 \mapsto \xi \mapsto 2\xi \mapsto \cdots$.

Définition 1.20. La suite $\lambda, \lambda^2, ...$ admet un retour proche à $\lambda^0 = 1$ au temps q si

$$\forall k \in \{1, ..., q-1\}, \quad |\lambda^q - 1| < |\lambda^k - 1|$$

Ce sont des temps que l'on pourrait qualifier de "temps records".

Définition-Proposition 1.21. On définit une distance d sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ comme la longueur de l'arc le plus court entre deux points du cercle (entre 0 et $\frac{1}{2}$: un tour du cercle compte pour 1). On notera par la suite $\|.\|$ l'application $\xi \mapsto \|\xi\| = d(\xi, 0)$ définie sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

La condition de retour proche au temps q se réécrit alors : $\forall k \in \{1, ..., q-1\}, \ \|q\xi\| < \|k\xi\|$.

Démonstration. Le résultat découle de $|\lambda^k - 1| = 2\sin(\pi \|k\xi\|)$ et de la stricte croissance de $x \mapsto \sin(\pi x)$ sur $[0, \frac{1}{2}]$. □

Le cas $\xi \in \mathbb{Q}$ fournit un nombre fini de retours proches (la suite $(\lambda^k)_k$ est alors cyclique).

Considérons par la suite le cas où ξ est irrationnel.
Il y a alors une infinité de retours numérotés : $1 = q_0 < q_1 < q_2 < \cdots$ (on les considère tous).
Posons ensuite $d_n = \|q_n\xi\|$, de sorte que : $\frac{1}{2} > d_0 > d_1 > d_2 > \cdots > 0$.

Lemme 1.22. *Les q_n premiers points $0, \xi, ..., (q_n-1)\xi$ divisent le cercle en q_n arcs de longueur au moins $d_{n-1} < \frac{1}{q_n}$.*

Démonstration. Pour $0 \leq j < k < q_n$, $d(j\xi, k\xi) = \|(k-j)\xi\|$. Si $\|(k-j)\xi\| < d_{n-1}$ alors :

— si $k - j \leq q_{n-1}$ alors il y a contradiction de la définition de q_{n-1} (la distance minimale atteinte est d_{n-1}).

— si $q_{n-1} < k-j < q_n$ alors il y a contradiction de la définition de q_n. En effet, la distance suivante, strictement inférieure à d_{n-1}, est atteinte en q_n, n-ième temps record.

De là, $\|(k-j)\xi\| \geq d_{n-1}$. Puisque ξ est irrationnel, ces longueurs ne peuvent être toutes égales, donc d_{n-1} est strictement inférieure à la distance moyenne $\frac{1}{q_n}$. □

Par convention (et c'est aussi plus pratique pour ce qui suit), $q_{-1} = 0$ et $d_{-1} = 1$.

Théorème 1.23. *La suite des temps de retour vérifie $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_{n+1} \equiv q_{n-1} \ (mod\ q_n)$. Autrement dit, il existe des entiers positifs (a_n) (quotients partiels) tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \ \textit{avec en particulier}\ q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = a_1$$

Similairement, la suite (d_n) des distances associées vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_{n+1} = d_{n-1} - a_{n+1}d_n \ \textit{avec en particulier}\ d_{-1} = 1, \quad d_0 = \|\xi\|, \quad d_1 = 1 - a_1 \|\xi\|$$

Démonstration. Pour $k \geq 0$, notons x_k l'unique réel de $]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ tel que $|x_k| = \|k\xi\|$ et tel que $n = k\xi - x_k$ est le plus proche entier de $k\xi$. Pour deux retours consécutifs q_{n-1} et q_n, $d_{n-1} = |x_{q_{n-1}}| > |x_{q_n}| = d_n$. De plus, $x_{q_{n-1}}x_{q_n} < 0$ car les retours à zéro sont tantôt au-dessus, tantôt en dessous de 0. Notons a_{n+1} le plus grand entier tel que $a_{n+1}d_n < d_{n-1}$.

Remarquons que si $0 < k \leq q_{n+1}$ alors

$$x_k \in \,]x_{q_{n-1}}, x_{q_n}[\ \Leftrightarrow \ k \in \{k_j = q_{n-1} + jq_n \mid 1 \leq j \leq a_{n+1}\}$$

En effet, si $x_k \in]x_{q_{n-1}}, x_{q_n}[$ alors $|x_k| < d_{n-1}$ donc $k > q_n$ (car $x_k < x_{q_n}$ donc $k \neq q_n$). Posons $l = k - q_n > 0$, de sorte que $x_l = x_k - d_n$.

— si $|x_l - x_{q_{n-1}}| < d_n$ alors $x_l = x_{q_{n-1}}$ donc $l = q_{n-1}$ (par le lemme précédent appliqué à $l < q_n$).

— sinon, en itérant suffisamment (α fois) ce procédé ($m = k - \alpha q_n > 0$), x_m vérifie la même propriété $|x_m - x_{q_{n-1}}| < d_n = |x_{q_n}|$, et α ne peut excéder a_{n+1} (sinon, $d_{n-1} - \alpha d_n \leq 0$ par choix de a_{n+1}, i.e. $|x_k| - \alpha d_n \leq |x_{q_{n-1}}| - \alpha |x_{q_n}| < 0$ mais $k - \alpha q_n \geq 0$). Comme dans le premier cas, $m = q_{n-1}$.

Réciproquement, si $k = k_j = q_{n-1} + jq_n$ alors $k > \max\{q_{n-1}, q_n\}$ donc $x_k \in]x_{q_{n-1}}, x_{q_n}[$.

De là, pour $j = a_{n+1}$, $q_{n+1} = k_{a_{n+1}} = q_{n-1} + a_{n+1}q_n$ et $d_{n+1} = d_{n-1} - a_{n+1}d_n$. □

Corollaire 1.24. *Le temps de retour q_n croît exponentiellement, la distance associée d_n décroît exponentiellement vers 0.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1} \geq 2q_{n-1}$ et $2d_{n+1} \leq d_{n-1}$. □

Les deux théories présentées dans les dernières sous-parties, à savoir fractions continues et temps de retour, coïncident : la suite (a_n) permet dans les deux cas de déterminer entièrement les autres quantités. Ainsi, les temps de retour associés à $\lambda = e^{2i\pi\xi}$ et les dénominateurs des approximations rationnelles de ξ sont égaux.

1.4. Théorèmes préliminaires

1.4.1. Théorème d'inversion locale holomorphe

Pour la suite du document, il est nécessaire d'introduire le théorème d'inversion locale holomorphe.

Théorème 1.25. *Soit f une fonction holomorphe sur Ω, partie ouverte non vide de $\mathbb{C}$.*
Si $a \in \Omega$ et $f'(a) \neq 0$, alors il existe V voisinage ouvert de a dans Ω et W voisinage ouvert de $f(a)$ dans $f(\Omega)$ tels que f réalise une bijection entre V et W. De plus, sa fonction inverse est holomorphe sur W et même :

$$\forall z \in V,\ g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$$

Autrement dit, puisque f est bijective sur V,

$$\forall w \in W,\ g'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$

Démonstration. L'idée de la preuve est de construire un voisinage de a sur lequel f est injective, puis de se ramener, en restreignant le domaine image, à f bijective. Il restera ensuite à montrer que la réciproque est bien holomorphe.

Soit $r > 0$ tel que $\Delta_r(a) \subset \Omega$. Observons que pour $z_1, z_2 \in \Delta_r(a)$ distincts,

$$f(z_2) - f(z_1) - f'(a)(z_2 - z_1) = \int_{[z_1,z_2]} f'(\xi) - f'(a)\, d\xi$$

L'inégalité triangulaire sur les intégrales curvilignes assure alors l'inégalité suivante :

$$|f(z_2) - f(z_1) - f'(a)(z_2 - z_1)| \leq \sup_{\xi\in\Delta_r(a)} |f'(\xi) - f'(a)|\, |z_2 - z_1|$$

car la longueur du segment $[z_1, z_2]$ est exactement $|z_2 - z_1|$.

Cela se réécrit de la manière suivante :

$$\left|\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} - f'(a)\right| \leq M_r = \sup_{\xi\in\Delta_r(a)} |f'(\xi) - f'(a)| = \sup_{\Delta_r(a)} |f' - f'(a)|$$

Puisque la fonction $f' - f'(a)$ est nulle en a et holomorphe (donc continue) au voisinage de a, la quantité M_r tend vers 0 lorsque r tend vers 0.

Il est donc possible de choisir r tel que $M_r < |f'(a)|$ puisque $f'(a) \neq 0$. Montrons dans ce cas l'injectivité de f sur $\Delta_r(a)$. Si $z_1 \neq z_2$ dans $\Delta_r(a)$ et $f(z_1) = f(z_2)$, alors d'après la dernière inégalité,

$$|0 - f'(a)| \leq M_r < |f'(a)|$$

ce qui est visiblement absurde : f est injective sur $\Delta_r(a)$.

Ainsi, en considérant $V = \Delta_r(a)$, avec le r choisi ci-dessus, et $W = f(V)$, f réalise une bijection entre V et W. Montrons maintenant que W est ouvert. Par continuité de l'application

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{si } z \neq a \\ f'(a) & \text{sinon} \end{cases}$$

sur un voisinage de a, on déduit l'inégalité :

$$\exists r_0 > 0,\ \forall z_1, z_2 \in \Delta_{r_0}(a),\ |f(z_2) - f(z_1)| \geq \frac{1}{2}|f'(a)||z_2 - z_1|$$

Quitte à restreindre V à $\Delta_{r_0}(a)$ (que l'on continuera de noter V), pour $z \in V$ et r tel que $\Delta_r(z) \subset V$, il vient :

$$\exists c > 0,\ \forall \theta \in]-\pi, \pi],\ |f(z + re^{i\theta}) - f(z)| > 2c$$

De plus, si $w \in \Delta(f(z), c)$, alors par inégalité triangulaire renversée,

$$\forall \theta \in]-\pi, \pi],\ |w - f(z + re^{i\theta})| > c$$

Le théorème du maximum assure que $w - f$ s'annule dans $\Delta_r(z)$ (dans le cas contraire, le théorème du maximum appliqué à $\frac{1}{w-f}$ mène à une absurdité), donc $\Delta_c(f(z)) \subset f(V)$: $W = f(V)$ est un voisinage de chacun de ses points, autrement dit W est ouvert. Notons désormais g l'application réciproque de f sur W :

$$\forall z \in V,\ g(f(z)) = z \text{ et } \forall w \in W,\ f(g(w)) = w$$

La continuité de g découle de ce qui précède :

$$\forall w_1, w_2 \in W,\ \frac{2}{f'(a)}|w_2 - w_1| \geq |g(w_2) - g(w_1)|$$

C'est aussi une donnée du théorème d'inversion locale usuel appliqué sur $\mathbb{C}$. Montrons maintenant le caractère holomorphe de g. Soient $w \in W$ et $h \neq 0$ tels que $w + h \in W$ (un tel h existe car W est ouvert).

$$\frac{g(w+h) - g(w)}{h} = \frac{z_2 - z_1}{f(z_2) - f(z_1)}$$

où z_1 et z_2 sont (les seuls éléments de V) tels que

$$f(z_1) = w \text{ et } f(z_2) = w + h$$

$$g(w) = z_1 \text{ et } g(w+h) = z_2$$

Autrement dit, la limite suivante existe (par continuité de g) et puisque $f'(z_1) \neq 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(w+h) - g(w)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{z_2 - z_1}{f(z_2) - f(z_1)} = \frac{1}{f'(z_1)}$$

□

1.4.2. Lemme de Schwarz

Lemme 1.26. *Si $f : \Delta \to \Delta$ est une application holomorphe et $f(0) = 0$, alors $|f'(0)| \leq 1$, avec égalité si f est une rotation. Si $|f'(0)| < 1$ alors $\forall z \neq 0,\ |f(z)| < |z|$.*

Démonstration. Notons

$$q : z \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{sinon} \end{cases}$$

L'application q est holomorphe sur Δ (car $f(0) = 0$, le développement en série entière est "divisible par z") et $q(0) = f'(0)$. Or, si $|z| \leq r \in]0,1[$, alors par le principe du maximum, $|q(z)| < \frac{1}{r}$. Ainsi, $\forall z \in \Delta,\ |q(z)| \leq 1$.

- Si $\exists z \in \Delta,\ |q(z)| = 1$ alors par le principe du maximum, q est constante de module 1, f est une rotation.
- Sinon, $\forall z \neq 0,\ |q(z)| < 1$ donc par le principe du maximum appliqué à q sur un disque compact inclus dans Δ, $|q(0)| = |f'(0)| < 1$.

□

1.4.3. Théorème de Montel

Définition 1.27. Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes sur Ω est dite *normale* si de toute suite de fonctions de $\mathcal{F}$ on peut extraire une sous-suite uniformément convergente sur tout compact de Ω.

Théorème 1.28. *Si $\mathcal{F}$ famille de fonctions holomorphes sur Ω est uniformément bornée sur tout compact de Ω alors $\mathcal{F}$ est normale.*

Démonstration. Soit (f_n) suite bornée de $\mathcal{F}$ sur tout compact de Ω. Soient K et A compacts de Ω tels que $K \subset \mathring{A}$. Les formules de Cauchy assurent l'existence de $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|f'_n\|_K \leq c\,\|f_n\|_A$. La constante $c = d(K,A)^{-2}$ convient par exemple.
Par compacité de A, $(\|f_n\|_A)$ est bornée donc (f'_n) est uniformément bornée sur K. Le théorème des accroissements finis assure que les applications f_n sont lipschitziennes, donc uniformément continues sur K. La suite (f_n) est bornée sur K donc $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est ponctuellement compacte. D'après le théorème d'Ascoli, $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie compacte de l'ensemble des applications holomorphes sur Ω.
Considérons maintenant une suite exhaustive (croissante) (K_n) de compacts (qui épuise Ω) : si $q \leq p$, alors toute sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ uniformément convergente sur K_p converge uniformément sur K_q.

La suite de la preuve repose sur une extraction diagonale. Si $(f_{\varphi(n)})$ est convergente sur K_p, posons $(g_n^p = f_{\varphi(n)})_n$. Par hypothèse, cette sous-suite est uniformément bornée sur K_{p+1} donc il existe une suite extraite $(g_n^{p+1} = g_{\psi(n)}^p)_n$ uniformément convergente sur K_{p+1}. En itérant, on construit une sous-suite $(\tilde{f}_n = g_n^n)$ (en ne sélectionnant que le n-ième terme de la n-iéme suite extraite) de (f_n) qui converge uniformément sur tous les K_p.
Soit κ compact de Ω. Puisque la suite de compacts (K_p) épuise Ω (et par croissance),

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \kappa \subset \bigcup_{p=0}^{n_0} K_p = K_{n_0}$$

Il existe donc (telle que construite ci-dessus) une sous-suite uniformément convergente sur κ. Par le théorème de Weierstrass, cette limite est holomorphe.
Il est possible d'extraire une sous-suite uniformément convergente sur tout compact : $\mathcal{F}$ est normale. $\square$

2. Théorème de Böttcher

Dans cette partie, on s'intéresse au cas très particulier où $\lambda = 0$: le point fixe est dit super-attractif. On se ramène usuellement au cas où le point fixe $z = 0$, i.e.

$$f : z \mapsto a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \cdots \text{ où } n \geq 2 \text{ et } a_n \neq 0$$

L'entier n (première puissance non nulle) est appelé degré local.

Théorème 2.1. ***Théorème de* Böttcher**
Avec f définie comme ci-dessus, il existe un changement de variable local holomorphe ϕ vérifiant $\phi(0) = 0$, qui conjugue f avec $z \mapsto z^n$ sur un voisinage de 0 : $\phi \circ f \circ \phi^{-1} : w \mapsto w^n$. De plus, ϕ est unique à multiplication par une racine $(n-1)$-ème de l'unité près.

Démonstration.

(i) *Unicité* : Il suffit d'étudier le cas particulier (les autres sont obtenus par conjugaison) où $f : z \mapsto z^n$. Soit $\phi : z \mapsto c_1 z + c_k z^k + \cdots$ holomorphe qui conjugue f à $z \mapsto z^n$ (à f elle-même)

$$\phi(z^n) = c_1 z^n + c_k z^{nk} + \cdots = c_1^n z^n + n c_1^{n-1} c_k z^{n+k-1} + \cdots = \phi(z)^n$$

Puisque $nk > n + k - 1$, en identifiant les coefficients, $c_1^{n-1} = 1$ et $c_k = 0$. En itérant le raisonnement, tous les autres coefficients de ϕ sont nuls.

(ii) *Existence* : Quitte à considérer c solution de $c^{n-1} = a_n$ et poser $g : z \mapsto cf(\frac{z}{c})$, on se ramène sans perte de généralité à $f : z \mapsto z^n(1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots) = z^n(1 + \eta(z))$. Choisissons $0 < r < \frac{1}{2}$ tel que $|\eta(z)| < \frac{1}{2}$ sur Δ_r.

$$z \in \Delta_r \Rightarrow |f(z)| \leq |z|^n + |z|^n |\eta(z)| < \frac{3}{2} r^n < r$$

Donc f envoie le disque Δ_r dans lui-même : $f : \Delta_r \to \Delta_r$. Par une récurrence immédiate, f^k envoie Δ_r dans lui-même et s'écrit :

$$f^k : z \mapsto z^{n^k}(1 + n^{k-1} b_1 z + \cdots)$$

Posons maintenant

$$\phi_k(z) = \sqrt[n^k]{f^k(z)} = z\left(1 + n^{k-1} b_1 z + \cdots\right)^{\frac{1}{n^k}}$$

Commençons par justifier la bonne définition de cette racine. Un premier argument est la simple connexité du domaine, qui assure (par théorème) l'existence d'une telle racine. Mais il est aussi possible de raisonner par le calcul en cherchant une suite $(\eta_k)_k$ vérifiant :

$$\forall z \in \Delta_r,\ f^k(z) = z^{n^k} \left(1 + \eta_k(z)\right)^{n^k} \text{ et } |\eta_k(z)| < \frac{1}{2}$$

Déterminons la par récurrence. Elle est initialisée par $\eta_1 = \eta$. Ensuite,

$$\forall z \in \Delta_r,\ f^{k+1}(z) = z^{n^{k+1}} \left(1 + \eta_{k+1}(z)\right)^{n^{k+1}} = f \circ f^k(z)$$

Or pour $z \in \Delta_r,\ f \circ f^k(z) = f^k(z)^n \left(1 + \eta \circ f^k(z)\right)$, donc par la branche principale du logarithme (bien définie ici par hypothèse sur η) :

$$\forall z \in \Delta_r,\ 1 + \eta_{k+1}(z) = (1 + \eta_k(z)) \sqrt[n^{k+1}]{1 + \eta \circ f^k(z)}$$

Ce raisonnement montre qu'il suffit de définir la suite des itérées de f par les formules ci-dessus, puisque dans ce cadre, la racine est alors bien définie par :

$$\sqrt[n^k]{f^k(z)} = z(1 + \eta_k(z))$$

Par un développement limité, l'expression peut être réécrite :

$$\phi_k(z) = \sqrt[n^k]{f^k(z)} = z\left(1 + \frac{b_1}{n} z + \cdots\right)$$

Par définition, $\phi_k \circ f(z) = \phi_{k+1}(z)^n$. Posons le changement de variable $z = e^Z$ où $Re(Z) < \log r$, $\eta = \eta(e^Z)$ avec $|\eta| < \frac{1}{2}$ et $F : Z \mapsto \log f(e^Z)$.

$$F(Z) = \log(e^{nZ}(1 + \eta)) = nZ + \log(1 + \eta) = nZ + \eta - \frac{\eta^2}{2} + \cdots$$

F est une fonction holomorphe bien définie. De plus, puisque $|\eta| < \frac{1}{2}$,

$$\forall Z,\ Re(Z) < \log(r),\ |F(z) - nZ| = |\log(1 + \eta)| < \log(2) < 1$$

Similairement, on définit (via le même changement de variable)

$$\Psi_k(Z) = \log \phi_k(e^Z) = \frac{1}{n^k} F^k(Z)$$

De même Ψ_k est holomorphe sur le demi-plan $\{Z \in \mathbb{C} \mid Re(Z) < \log r\}$. Puisque le changement de variable exponentiel réduit les distances, pour $|z| < r$,

$$|\phi_{k+1}(z) - \phi_k(z)| \leq |\Psi_{k+1}(Z) - \Psi_k(Z)| = \frac{1}{n^{k+1}} |F^{k+1}(Z) - nF^k(Z)| < \frac{1}{n^{k+1}}$$

Ainsi (ϕ_k) converge uniformément vers une limite holomorphe ϕ. Si $|z| < r$, alors facilement, $\phi(f(z)) = \phi(z)^n$.

□

Corollaire 2.2. *Si f a un point fixe p super-attractif, alors la fonction $z \mapsto |\phi(z)|$ s'étend de manière unique en une application continue $|\phi|$ sur $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid \lim_{n \to \infty} f^n(z) = p\}$ (appelé bassin d'attraction), telle que $\forall z \in \mathcal{A},\ |\phi(f(z))| = |\phi(z)|^n$.*

3. Points attractifs et points répulsifs

Considérons une application holomorphe f de la forme

$$f : z \mapsto \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

admettant 0 pour point fixe. Cette somme est convergente pour $|z|$ suffisamment petit.
Le multiplicateur du point fixe (l'origine) de f, $\lambda = f'(0)$, joue un rôle dominant dans la suite de l'étude.

3.1. Points attractifs

Définition 3.1. Un point fixe p d'une application f est dit topologiquement *attractif* s'il existe un voisinage ouvert U de p tel que la suite des itérés $(f^n(z_0))$ reste dans U pour tout $z_0 \in U$ et que $(f^n_{|U})$ converge uniformément vers l'application constante égale à p sur U.

Lemme 3.2. *Un point fixe d'une application holomorphe est topologiquement attractif si et seulement si son multiplicateur λ vérifie $|\lambda| < 1$.*

Démonstration. On se ramène par des opérations élémentaires au cas où le point fixe est $0 : f(0) = 0$. Au voisinage de 0, $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$ donc il existe $r_0, C \in \mathbb{R}^*$ tels que $|z| < r_0 \Rightarrow |f(z) - \lambda z| < C|z^2|$.
Si $|\lambda| < 1$, alors choisissons $c \in]|\lambda|, 1[$ et $r \in]0, r_0]$ tels que $|\lambda| + Cr < c$.

$$|z| < r \Rightarrow |f(z)| \leq |\lambda z| + C|z^2| \leq c|z| \Rightarrow |f^n(z)| \leq c^n|z| < c^n r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Réciproquement, si p est un point fixe topologiquement attractif, alors il existe U voisinage ouvert de p tel que $(f^n_{|U})$ converge uniformément vers l'application constante égale à p sur U. Par le théorème de Weierstrass, la suite des dérivées $(f^n_{|U}{}')$ converge uniformément vers la fonction nulle sur U. En particulier, $\lambda^n = f^n{}'(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ainsi, $|\lambda| < 1$. □

3.2. Points répulsifs

Définition 3.3. Un point fixe p d'une application f est dit topologiquement répulsif s'il existe un voisinage ouvert U de p tel que : $\forall z \in U \setminus \{p\}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $f^n(z) \notin U$. Autrement dit, la seule orbite contenue dans U est l'orbite de p (orbite réduite au point p).

Lemme 3.4. *Un point fixe d'une application holomorphe est topologiquement répulsif si et seulement si son multiplicateur λ vérifie $|\lambda| > 1$.*

Démonstration. Si $|\lambda| > 1$, alors par des calculs similaires à ce qui précède, le point fixe est topologiquement répulsif.
Réciproquement, si p est répulsif, alors il ne peut pas être attractif (contradiction des définitions) et donc $|\lambda| \geq 1$. Considérons un voisinage compact isolant N de p (la seule orbite

contenue dans N est celle de p), tel que $f : N \to f(N)$ soit homéomorphe ($f(N)$ est un voisinage ouvert de p). Notons pour $k \in \mathbb{N}$:

$$N_k = N \cap f^{-1}(N) \cap \cdots \cap f^{-k}(N) \text{ vérifiant } N = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots$$

Immédiatement, $f(N_k) = N_{k-1} \cap f(N)$. Puisque l'intersection de tous les N_k est réduite au singleton $\{p\}$ (caractère isolant du voisinage compact N) et que la suite des (N_k) est décroissante au sens de l'inclusion, $diam(N_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} diam(\{p\}) = 0$.
Donc pour k suffisamment grand, $f(N_k) = N_{k-1}$ car alors $N_{k-1} \subset f(N)$. L'application f^{-1} envoie donc la composante connexe de l'intérieur de N_{k-1} contenant p sur celle de N_k strictement plus petite (en effet, p est topologiquement répulsif, donc $f^{-k}(N)$ contient de moins en moins de points lorsque k croît). Son multiplicateur (λ^{-1}) est donc, par le lemme de Schwarz appliqué à un disque ouvert inclus dans N_{k-1} (en tant que voisinage de p compact, il contient en particulier un disque ouvert centré en p), de module strictement inférieur à 1, i.e. $|\lambda| > 1$. □

3.3. Théorème de Kœnigs

Théorème 3.5. ***Théorème de linéarisation de*** **Kœnigs**
Si $|\lambda| \notin \{0, 1\}$ alors il existe un changement de variable local holomorphe ϕ tel que $\phi(0) = 0$ et $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ est l'application linéaire $z \mapsto \lambda z$ au voisinage de l'origine. ϕ est de plus unique à multiplication par un scalaire (non nul) près.

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & f(U) \arrow[d] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "\lambda"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Démonstration.

(i) *Unicité* : Pour ϕ et Ψ deux tels changements de variables holomorphes, $\phi \circ \Psi^{-1} : z \mapsto \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots$ commute avec $\lambda : z \mapsto \lambda z$. En composant par λ à gauche et à droite et en identifiant les coefficients terme à terme, $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda\alpha_n = \lambda^n \alpha_n$. Puisque λ n'est ni 0, ni une racine de l'unité, $\phi \circ \Psi^{-1} = \alpha_1 \mathrm{id}$.

(ii) *Existence* :

— si $|\lambda| < 1$, alors pour $c \in \left]|\lambda|, \sqrt{|\lambda|}\right[$, comme pour la preuve précédente, $\exists r > 0,\ \forall z \in \Delta_r,\ |f(z)| \le c|z|$. En particulier (c<1), pour $z_0 \in \Delta_r$ l'orbite $(z_n = f^n(z_0))$ est dans Δ_r.

$$|f(z_n) - \lambda z_n| = |z_{n+1} - \lambda z_n| \le C|z_n|^2 \le C r^2 c^{2n} \text{ car } |z_n| \le r c^n$$

$$|\frac{z_{n+1}}{\lambda^{n+1}} - \frac{z_n}{\lambda^n}| \le C \frac{r^2}{|\lambda|} \left(\frac{c^2}{|\lambda|}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

De là, les $f_n : z_0 \mapsto \frac{z_n}{\lambda^n}$ convergent uniformément sur Δ_r vers ϕ. De plus, $\phi \circ f = \lambda \circ \phi$ et $\phi'(0) = 1$. Ce qui conclut.

— si $|\lambda| > 1$, alors on se ramène au cas précédent en étudiant f^{-1}, bien définie et holomorphe sur un voisinage de 0, admettant λ^{-1} pour multiplicateur de module strictement inférieur à 1.

$\square$

Corollaire 3.6. *Si p est un point fixe attractif de $f : X \to X$, X voisinage ouvert de p, alors il existe une application holomorphe $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, où $\mathcal{A} = \{z \in X \mid \lim_{n\to\infty} f^n(z) = p\}$ est le bassin d'attraction de p, telle que $\phi(p) = 0$ et $\phi \circ f = \lambda \circ \phi$, i.e. rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{f} & \mathcal{A} \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{C} \end{array}$$

Il est unique à multiplication par un scalaire (non nul) près.

Corollaire 3.7. *Si p est un point fixe répulsif d'une application holomorphe $f : X \to X$, X voisinage ouvert de p, alors il existe une application holomorphe $\psi : \mathbb{C} \to X$ vérifiant $\psi(0) = p$ et rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{C} \end{array}$$

Il est unique à changement de variable linéaire ($w \mapsto \psi(cw)$ avec $c \neq 0$) près.

4. Multiplicateur rationnellement neutre

Considérons ici le cas où $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$ avec $\lambda = e^{2i\pi\frac{p}{q}}$ (racine de l'unité, $p \wedge q = 1$). Dans ce cas, $f^q : z \mapsto z + Cz^m + \mathcal{O}(z^{m+1})$, où $m \geq 2$. A moins que $f^q = id$, C est choisi comme le premier terme non nul dans la suite des coefficients $([f]_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ de f.

Le résultat suivant permet de caractériser le cas où $f^q = id$.

Théorème 4.1. *Si $\lambda = e^{2i\pi\frac{p}{q}}$, alors f est linéarisable si et seulement si $f^q = id$.*

Démonstration. Si f est linéarisable, alors elle est conjuguée à la rotation d'argument $\frac{p}{q}$ (sa partie linéaire) :

$$\exists\phi,\ \phi \circ f \circ \phi^{-1} = \lambda$$

De là, f^q est conjuguée à cette rotation λ composée q fois, i.e. à id. Or la seule application conjuguée à l'identité est l'identité elle-même : $f^q = id$.

Réciproquement, si $f^q = id$ alors considérons $\phi = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{f^k}{\lambda^k}$. Cette application (holomorphe) vérifie en particulier $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$ et :

$$\phi \circ f = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{f^{k+1}}{\lambda^k} = \frac{\lambda}{q}\sum_{k=1}^{q}\frac{f^k}{\lambda^k} = \frac{\lambda}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{f^k}{\lambda^k} = \lambda \circ \phi$$

car $f^q = id$ et $\lambda^q = 1$, ce qui permet de décaler l'indexation de la somme. Ainsi, f est linéarisable, conjuguée à la rotation d'argument $\frac{p}{q}$, sa partie linéaire :

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1} = \lambda$$

□

Considérons maintenant le cas où $f^q \neq id$, i.e. f non linéarisable ($C \neq 0$).

Lemme 4.2. *Il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = 1 + rq$. Autrement dit, $m - 1$ est un multiple de q.*

Démonstration. Il suffit d'écrire $f^q \circ f = f \circ f^q$ (f commute avec elle-même) et de considérer le coefficient de z^m. En écrivant $f : z \mapsto \lambda z + \cdots + \alpha_m z^m + \mathcal{O}(z^{m+1})$ et $f^q : z \mapsto z + Cz^m + \mathcal{O}(z^{m+1})$:

$$f^q \circ f(z) = f^q(\lambda z + \cdots + \alpha_m z^m + \mathcal{O}(z^{m+1})) = f(z + Cz^m + \mathcal{O}(z^{m+1})) = f \circ f^q(z)$$

$$C\lambda^m z^m + \mathcal{O}(z^{m+1}) = C\lambda z^m + \mathcal{O}(z^{m+1})$$

En identifiant les termes en z^m, puisque C est non nul (choisi comme le premier terme non nul),

$$\lambda^m = \lambda,\quad \lambda^{m-1} = 1$$

L'ordre de λ, à savoir q, divise donc $m - 1$. Il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = 1 + rq$. □

5. Multiplicateur irrationnellement neutre

Considérons dans cette partie le cas où le multiplicateur λ est de module 1, mais n'est pas une racine de l'unité. L'application holomorphe considérée s'écrit toujours sur un voisinage de 0 (quitte à translater le point fixe considéré) :

$$f : z \mapsto \lambda z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ où } \lambda = e^{2i\pi\xi} \text{ avec } \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

5.1. Points de Cremer - Points de Siegel

Théorème 5.1. *Soit z_0 un point fixe irrationnellement neutre de f. L'application f est holomorphiquement linéarisable au voisinage de z_0 si et seulement si (f^n) est une famille normale sur un voisinage de z_0.*

Démonstration. Si f est holomorphiquement linéarisable sur un voisinage U de 0, alors il existe ϕ holomorphe sur U tel que $f^n = \phi^{-1}\lambda^n\phi$. Donc pour tout compact de U, (f^n) est uniformément bornée. Par le théorème de Montel, (f^n) est normale.
Réciproquement, considérons K compact de U. Par normalité de (f^n),

$$\exists C_K > 0,\ \forall z \in K,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f^n(z)| \leq C_K$$

La suite (ϕ_n) définie sur U par :

$$\phi_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^j(z)}{\lambda^j}$$

est uniformément bornée sur tout compact de U (par le caractère uniformément borné de (f_n)) donc normale (car il existe une sous-suite convergente sur tout compact par le caractère borné).

$$\forall z \in K,\ |\phi_n \circ f(z) - \lambda\phi_n(z)| = \frac{1}{n}\left|\frac{f^n(z)}{\lambda^{n-1}} - \lambda z\right| \leq \frac{C_K + |z|}{n} \leq \frac{2\max\{C_K, S_K\}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

où S_K désigne le plus grand des modules atteint sur K : $S_K = \sup_{z\in K}\{|z|\}$.
Par normalité, il existe une sous-suite de (ϕ_n) convergente de limite ϕ vérifiant $\phi \circ f = \lambda \circ \phi$ et $\phi'(0) = 1$ (car $\forall n \in \mathbb{N},\ \phi_n'(0) = 1$). Par théorème d'inversion locale, ϕ est localement inversible au voisinage de 0 : f est holomorphiquement linéarisable. □

Définitions 5.2. Soit z_0 un point fixe irrationnellement neutre.
Le point z_0 est dit de Siegel si f est holomorphiquement linéarisable au voisinage de z_0.
Le point z_0 est dit de Cremer sinon.

La suite de cette partie consiste à déterminer des conditions sur λ pour qu'un point fixe de multiplicateur λ soit de Siegel ou de Cremer.

Théorème 5.3. *Il existe une série formelle $T \in \mathbb{C}[[X]]$ telle que $T(0) = 0$, $T'(0) \neq 0$ et $T \circ f = \lambda T$. Cette série formelle T est unique à multiplication par un scalaire près.*

Autrement dit, dans la cas où le point fixe est irrationnellement neutre, f est toujours formellement linéarisable.

Démonstration.

(i) *Existence* : Construisons une suite d'applications holomorphes (T_n) (simples) telles que

$$(T_n \circ T_{n-1} \circ \cdots \circ T_2) \circ f \circ (T_n \circ T_{n-1} \circ \cdots \circ T_2)^{-1} = \lambda z + \mathcal{O}(z^{n+1})$$

Pour cela, il suffit de poser :

$$T_n : z \mapsto z + \alpha_n z^n \text{ où } \alpha_n = -\frac{[(T_{n-1} \circ \cdots \circ T_2) \circ f \circ (T_{n-1} \circ \cdots \circ T_2)^{-1}]_n}{\lambda^n - \lambda}$$

avec la notation $[g]_n$ coefficient de z^n dans la série formelle ou le polynôme g.
(Ici, les calculs sont longs, bien que simples, c'est pourquoi ils ne sont pas explicités.)

Ainsi, en considérant la série formelle obtenue (au sens des séries formelles) par :

$$T = \lim_{n\to\infty} (T_n \circ T_{n-1} \circ \cdots \circ T_2)$$

T est une série formelle (au sens où son rayon de convergence peut être nul - T n'est notamment pas nécessairement holomorphe) qui vérifie la propriété voulue : $T \circ f = \lambda T$.

(ii) *Unicité* : Soient U et V deux telles séries formelles. En posant $T = V \circ U^{-1}$, sur un voisinage de 0 : $T(\lambda z) = \lambda T(z)$. En écrivant $T : z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^n$ et en identifiant l'égalité précédente terme à terme,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (\lambda^n - \lambda)\beta_n = 0$$

Autrement dit, puisque (par irrationalité de l'argument de λ) pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\lambda^n \neq \lambda$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \ \beta_n = 0$$

Ainsi, $V \circ U^{-1} = \beta_1 id$ ce qui permet de conclure.

□

Corollaire 5.4. *Au voisinage d'un point fixe irrationnellement neutre, f est holomorphiquement conjuguée à $z \mapsto \lambda z + \mathcal{O}(z^{n+1})$. Ceci est valable pour tout entier naturel n.*

Démonstration. Il suffit de considérer l'application holomorphe $(T_n \circ T_{n-1} \circ \cdots \circ T_2)$ introduite dans la preuve d'existence précédente : les éléments donnés ci-dessus permettent de vérifier la conjugaison souhaitée. □

Proposition 5.5. *La série formelle T vérifiant $T(0)=0$, $T'(0)=1$ et linéarisant formellement $f : z \mapsto \lambda z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ est donnée explicitement (récursivement) par :*

$$T : z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^n \text{ où } \beta_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 2,\ \beta_n = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{k=2}^{n} a_k \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n \\ i_1,\cdots,i_k \geq 1}} \beta_{i_1} \cdots \beta_{i_k}$$

Démonstration.
Il s'agit de résoudre $f \circ T = T \circ \lambda$ avec $f : z \mapsto \lambda z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ et $T : z \mapsto z + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n z^n$.
Il s'agit de développer les deux membres de l'égalité $f \circ T = T \circ \lambda$ et d'identifier terme à terme les séries formelles.
Soit z dans un voisinage de 0.

$$f(T(z)) = \lambda z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda \beta_n z^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(z + \sum_{m=2}^{\infty} \beta_m z^m \right)^n$$

$$T(\lambda z) = \lambda z + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \lambda^n z^n$$

De là, en identifiant chacun des termes en z^n,

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ [f \circ T]_n = \lambda \beta_n + \sum_{k=2}^{n} a_k \left(\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n \\ i_1,\cdots,i_k \geq 1}} \beta_{i_1} \cdots \beta_{i_k} \right) = \lambda^n \beta_n = [T \circ f]_n$$

Puisque (par irrationalité de ξ) pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\lambda^n \neq \lambda$:

$$\forall n \geq 2,\ \beta_n = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{k=2}^{n} a_k \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n \\ i_1,\cdots,i_k \geq 1}} \beta_{i_1} \cdots \beta_{i_k}$$

□

5.2. Théorème de non linéarisabilité

Théorème 5.6. *Il existe au moins une valeur de $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ telle que tout polynôme de point fixe 0 de multiplicateur $\lambda = e^{2i\pi\xi}$ soit non linéarisable.*

Démonstration. Soit $f : z \mapsto \lambda z + \cdots + z^d$ polynôme de degré $d \geq 2$. Supposons qu'il existe une conjugaison conforme ϕ sur un voisinage de 0 telle que $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = \lambda$. Remarquons que $f^n - id$ admet d^n racines, dont 0 (qui est racine simple puisque $\lambda^n - 1 \neq 0$) en écrivant

$$f^n(z) - z = z^{d^n} + \cdots + (\lambda^n - 1)z$$

Notons les autres points fixes $z_1, \cdots, z_{d^n-1}$. Par le principe des zéros isolés, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall j \in [\![1, d^n - 1]\!],\ z_j \notin \Delta_\varepsilon(0)$$

D'après les notations précédentes, $f^n(z) - z = z(z-z_1)\cdots(z-z_{d^n-1})$ donc en considérant le terme en z :

$$\varepsilon^{d^n} \leq \prod_{j=1}^{d^n-1} |z_j| = |1-\lambda^n|$$

Il s'agit donc de construire λ (et donc ξ) tel que la ligne précédente soit impossible. Pour cela, considérons une suite (q_k) d'entiers strictement croissante, $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{q_k}}$ et $\lambda = e^{2i\pi\xi}$.

$$|1-\lambda^{2^{q_k}}| = |1-e^{2^{q_k+1}i\pi\xi}| \underset{k\to\infty}{\sim} 2^{q_k-q_{k+1}}$$

Donc il existe une constante C telle que $\varepsilon^{d^{2^{q_k}}} \leq |1-\lambda^{2^{q_k}}| \leq C 2^{q_k-q_{k+1}}$ (par équivalence). Quitte à réduire ε, on peut supposer sans perte de généralité que $\varepsilon < 1$. En prenant le logarithme de l'expression $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d^{2^{q_k}}} \geq \frac{1}{C} 2^{q_{k+1}-q_k}$ (passage à l'inverse sur la ligne précédente), il vient alors :

$$q_k + \frac{1}{\log(2)}\left(d^{2^{q_k}} \log(\frac{1}{\varepsilon}) + \log(C)\right) \geq q_{k+1}$$

En choisissant par exemple une suite q_k telle que $\log(q_{k+1}) \geq (k+1)2^{q_k}$, on arrive donc à une absurdité. Cela conclut la preuve du théorème. $\square$

5.3. Fractions rationnelles

Définition 5.7. La sphère de Riemann désigne le plan complexe usuel auquel on a ajouté un point à l'infini, ∞. Elle est notée $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Remarques 5.8.
Par la projection stéréographique (depuis le pôle Nord), il est facile de voir que $\hat{\mathbb{C}}$ est en bijection avec la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.
La sphère de Riemann est aussi en bijection avec la droite projective du plan complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}/\mathbb{C}^*$ via l'application quotient :

$$\begin{array}{ccll} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \to & \hat{\mathbb{C}} & \\ (z:w) & \mapsto & \frac{z}{w} & \text{si } w \neq 0 \\ (1:0) & \mapsto & \infty & \end{array}$$

où $(z:w)$ désigne la classe d'équivalence du couple de complexes (z,w) dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (ensemble des couples égaux à une constante multiplicative non nulle près).

Définition 5.9. Une application f est dite holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$ si les applications suivantes (à valeurs dans $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$) sont holomorphes :

$$\begin{array}{rclrcl} x \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \cap f^{-1}(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}) & \mapsto & f(x) & x \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \cap f^{-1}(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) & \mapsto & \frac{1}{f(x)} \\ x \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \cap f^{-1}(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}) & \mapsto & f(\frac{1}{x}) & x \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \cap f^{-1}(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) & \mapsto & \frac{1}{f(\frac{1}{x})} \end{array}$$

Exemples 5.10. Les polynômes et les applications $(z \mapsto \frac{1}{z-\alpha})_{\alpha\in\mathbb{R}}$ sont holomorphes sur $\hat{\mathbb{C}}$.

Définition 5.11. Une fraction rationnelle est une application de la forme $z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont deux polynômes premiers entre eux.
Le degré d'une fraction rationnelle est défini comme le maximum des degrés de son numérateur et de son dénominateur.

Proposition 5.12. *Les fractions rationnelles sont des fonctions holomorphes sur $\hat{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. Notons $r_1, \cdots, r_n$ les racines de f de multiplicités respectives $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ et $p_1, \cdots, p_m$ ses pôles de multiplicités respectives $\beta_1, \cdots, \beta_m$. Il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que :

$$f : z \mapsto c \prod_{i=1}^{n} (z - r_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{m} (z - p_j)^{-\beta_j}$$

En tant que produit d'applications holomorphes sur $\hat{\mathbb{C}}$, f est holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$. □

Remarque 5.13. Multiplier ou diviser une fraction rationnelle par un monôme $(z - \alpha)$, ou (en itérant) par une autre fraction rationnelle, ne change pas son caractère holomorphe.

Lemme 5.14. *Les applications holomorphes de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\mathbb{C}$ sont les fonctions constantes.*

Démonstration. Si $f : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ est holomorphe, alors par continuité en ∞, f est bornée sur le complémentaire d'un compact de $\mathbb{C}$. Or par continuité sur ce compact, elle y est aussi bornée. Par le théorème de Liouville, f est constante. □

Proposition 5.15. *Les applications holomorphes de la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ dans elle-même sont les fractions rationnelles.*

Démonstration. Supposons f non constante. Par principe des zéros isolés (f est holomorphe), f admet un nombre fini de racines et de pôles (cela découle de la compacité de $\hat{\mathbb{C}}$). Soit P une fraction rationnelle ayant pour pôles les racines (dans $\mathbb{C}$) de f et pour racines les pôles (dans $\mathbb{C}$) de f, de sorte que fP n'a ni pôle, ni racine. (En restriction à $\mathbb{C}$, fP admet un développement en série entière ne contenant qu'un nombre fini de termes.) Il s'agit donc d'une application holomorphe de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\mathbb{C}$: fP est constante. Ainsi, f est une fraction rationnelle. Réciproquement, une fraction rationnelle envoie la sphère de Riemann dans elle-même. □

Proposition 5.16. *Les applications holomorphes bijectives de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$ sont les homographies.*

Démonstration. Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. Soit $w \in \hat{\mathbb{C}}$. Il y a exactement $deg(f) = \max\{deg(P), deg(Q)\}$ solutions (comptées avec multiplicité) à l'équation $f(z) = w$: cela revient à résoudre l'équation polynomiale $P(z) - wQ(z) = 0$. Pour assurer la bijectivité, il faut donc avoir $deg(f) = 1$, i.e. P ou Q de degré 1 et l'autre de degré 0 ou 1 : f est une homographie. □

Théorème 5.17. ***Critère de non linéarisabilité de Cremer***
Soit $\lambda \in \mathcal{S}^1$. Pour $d \geq 2$, si

$$\limsup_{q \to \infty} \sqrt[d^q]{\frac{1}{|\lambda^q - 1|}} = \infty \text{ ou de manière équivalente } \liminf_{q \to \infty} \sqrt[d^q]{|\lambda^q - 1|} = 0$$

alors il n'existe pas de fraction rationnelle de degré d ayant un point fixe de multiplicateur λ qui soit linéarisable au voisinage de ce point.

Démonstration. Commençons par traiter le cas où la fonction étudiée f est un polynôme unitaire :

$$f : z \mapsto \lambda z + \cdots + z^d$$

Comme dans la preuve précédente, f^q admet $d^q - 1$ points fixes non nuls et leur produit vaut $\pm(\lambda^q - 1)$. Choisissons q tel que $|\lambda^q - 1| < 1$. L'un des points fixes non nuls de f vérifie alors nécessairement :

$$0 < |z|^{d^q} < |z|^{d^q - 1} \leq |\lambda^q - 1|$$

Ainsi par hypothèse il existe un point périodique dans tout voisinage de 0. Si f était linéarisable, alors elle serait conjuguée à une rotation irrationnelle, n'admettant pas de point périodique. C'est absurde.

Considérons maintenant le cas où $f : z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ est une fraction rationnelle. Remarquons d'abord que f envoie au moins un point $z_0 \neq 0$ sur l'origine. Quitte à conjuguer par une homographie qui envoie z_0 sur ∞, on peut supposer sans perte de généralité que $f(\infty) = f(0) = 0$. Pour la suite, on considère le cas (auquel on peut se ramener par un changement de variable) :

$$P : z \mapsto \lambda z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_{d-1} z^{d-1} \text{ et } Q : z \mapsto 1 + \cdots + z^d$$

Les itérées de f s'écrivent alors $f^q : z \mapsto \frac{P_q(z)}{Q_q(z)}$ où l'on vérifie par récurrence que :

$$P_q : z \mapsto \lambda^q z + \beta_2 z^2 + \cdots + \beta_{d^q-1} z^{d^q-1} \text{ et } Q_q : z \mapsto 1 + \cdots + z^{d^q}$$

Un point fixe de f^q vérifie donc l'équation $f^q(z) = z$ c'est-à-dire :

$$0 = zQ_q(z) - P_q(z) = z(z^{d^q} + \cdots + (1 - \lambda^q))$$

Le raisonnement du cas polynomial ci-dessus permet de conclure. □

6. Théorème de linéarisation de Brjuno

Le point fixe est ici considéré irrationnellement neutre (dans cette section, $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Théorème 6.1. *Notons* $\lambda = e^{2i\pi\xi}$ *et* $(\frac{p_n}{q_n})$ *la suite des approximations rationnelles de* ξ *(qui correspond aussi au développement en fractions continues tronqué). Si l'hypothèse de* Brjuno

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(q_{n+1})}{q_n} < \infty$$

est vérifiée, alors tout germe holomorphe ayant un point fixe de multiplicateur λ *est localement linéarisable (au voisinage de ce point fixe).*

Démonstration. Notons f l'application holomorphe de point fixe z_0 (ramené à 0) irrationnellement neutre. Dans la suite de cette preuve, pour des questions de clarté, on adoptera la notation suivante pour une fonction ψ au voisinage d'un point fixe (ramené sans perte de généralité 0) :

$$\psi : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} [\psi]_n z^n$$

où le crochet $[\psi]_n$ désigne naturellement $\frac{\psi^{(n)}(0)}{n!}$.

D'après la partie précédente, si ϕ linéarise holomorphiquement (en particulier formellement) f et $[\phi]_1 = \phi'(0) = 1$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ [\phi]_n = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{k=2}^{n} [f]_k \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n \\ i_1,\cdots,i_k \geq 1}} [\phi]_{i_1} \cdots [\phi]_{i_k}$$

La première partie de la preuve consiste en une majoration de ce n-ième terme $[\phi]_n$ par le produit de deux suites à termes positifs (plus faciles à étudier) à déterminer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |[\phi]_n| \leq u_n v_n$$

Notons $p_{k,n}$ le polynôme $(x_2, \cdots, x_{n-1}) \mapsto \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n \\ i_1,\cdots,i_k \geq 1}} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ où $x_1 = 1$ de telle sorte que :

$$p_{k,n}([\phi]_2, \cdots, [\phi]_{n-1}) = \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n \\ i_1,\cdots,i_k \geq 1}} [\phi]_{i_1} \cdots [\phi]_{i_k}$$

Le polynôme $p_{k,n}$ est à coefficients dans $\mathbb{N}^*$. Les monômes de $p_{k,n}$ sont de la forme :

$$m_{k,n,i_1,\cdots,i_k} = \alpha_{k,n} \prod_{j=1}^{k} [\phi]_{i_j}$$

où $\alpha_{k,n}$ est un coefficient entier positif non nul.

Sous l'hypothèse de la majoration des coefficients de ϕ ci-dessus, il vient :

$$|m_{k,n,i_1,\cdots,i_k}| \leq \alpha_{k,n} \prod_{j=1}^{k} u_{i_j} v_{i_j}$$

Pour ne garder qu'une seule suite dans le produit précédent, il suffit de faire en sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![2, n]\!],\ \forall i_1, ..., i_k \in \mathbb{N}^* \mid i_1 + \cdots + i_k = n,\ \ \prod_{j=1}^{k} u_{i_j} \leq u_n$$

(Notons que le terme u_n ne peut pas apparaître dans le produit à la ligne précédente puisque $k \geq 2$ et $\forall j \in [\![1, k]\!],\ i_j \geq 1$.)

Pour cela, fixons la suite u_n, définie par récurrence, par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\ u_n = \frac{2}{|\lambda^n - \lambda|} \max_{\substack{k \in [\![2,n]\!] \\ i_1 + \cdots + i_k = n}} u_{i_1} \cdots u_{i_k}$$

La propriété souhaitée est clairement vérifiée par le choix du plus grand des produits possibles, en sachant que $\frac{2}{|\lambda^n - \lambda|} \geq 1$ car $0 < |\lambda^n - \lambda| < 2$.

Reste maintenant à déterminer la suite v_n. L'idée est de reprendre la construction récursive précédente sans les *petits diviseurs* ($\frac{2}{\lambda^n - \lambda}$ dans l'expression de u_n) en remplaçant les coefficients de f par leur module, ce qui s'écrit :

$$v_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \sum_{k=2}^{n} |[f]_k| \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_k = n \\ i_1, \cdots, i_k \geq 1}} v_{i_1} \cdots v_{i_k}$$

Considérons maintenant la série formelle :

$$g : z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} v_n z^n$$

Il s'agit maintenant de montrer que son rayon de convergence est strictement positif. En posant :

$$\tilde{f} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} |[f]_n|\, z^n \text{ (telle que } \forall k \in \mathbb{N}, [\tilde{f}]_k = |[f]_k|)$$

l'expression des termes de la suite (v_n) peut être réécrite sous la forme :

$$v_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\ v_n = \sum_{k=2}^{n} [\tilde{f}]_k [g^k]_n$$

Ici, g^k désigne la multiplication usuelle de g k-fois. Le fait que l'ordre de g soit égal à 1 ($g(0) = 0$) assure en particulier que $[g^k]_n$ ne dépend pas de v_n mais seulement de v_i avec $1 \leq i \leq n-1$.

Les inégalités précédentes assurent (avec $|[\phi]_1| = 1$) immédiatement que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ |[\phi]_n| \leq u_n \sum_{k=2}^{n} [\tilde{f}]_k [g^k]_n$$

Ainsi, en reprenant les différents résultats ci-dessus, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ v_n = [g]_n = [\tilde{f} \circ g]_n - [g]_n$$

Le terme $[g]_n$ correspond au terme $k = 1$ qui n'est pas présent dans la somme (indexée à partir de $k = 2$). Ainsi, à partir du deuxième terme (en z^2), les séries formelles sont égales. Pour ajuster le premier terme (en z), il suffit de remarquer que $(2g - \tilde{f} \circ g)'(0) = 1$. Ainsi sur un voisinage de 0 :

$$2g = \tilde{f} \circ g + id$$

Donc,

$$(2id - \tilde{f}) \circ g = id$$

Or, $(2id - \tilde{f})'(0) = 2 - 1 = 1$ donc le théorème d'inversion locale holomorphe s'applique : g est l'inverse locale de $2id - \tilde{f}$ sur un voisinage de 0 et holomorphe ; son rayon de convergence est strictement positif.
La suite v_n est donc majorée par une suite $(\tilde{v}_n)$ exponentiellement croissante :

$$\exists C > 0,\ r > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq \tilde{v}_n = Cr^n$$

Concentrons-nous maintenant sur la suite (u_n). En reprenant la relation de récurrence et en y appliquant le logarithme :

$$\ln(u_n) = \ln\left(\frac{2}{|\lambda^n - \lambda|}\right) + \max_{\substack{k \in [\![2,n]\!] \\ i_1 + \cdots + i_k = n}} \sum_{j=1}^{k} \ln(u_{i_j})$$

En posant alors $(w_n = \ln(u_n))_n$, on obtient la nouvelle relation de récurrence :

$$w_n = \ln\left(\frac{2}{|\lambda^n - \lambda|}\right) + \max_{\substack{k \in [\![2,n]\!] \\ i_1 + \cdots + i_k = n}} \sum_{j=1}^{k} w_{i_j}$$

Puisque, par définition du premier terme de (u_n), $w_1 = 0$, le comportement de la suite ne dépend que du terme $l_n = \ln\left(\frac{2}{|\lambda^n - \lambda|}\right)$, indéxée à partir de 2, soit uniquement de la valeur du multiplicateur λ. Il est donc possible de définir l'opérateur non linéaire :

$$\theta : l = (l_n)_n \mapsto w = (w_n)_n$$

Les suites étudiées sont ici considérées à partir du rang 1 (rang pour lequel la valeur donnée est fixée) pour des raisons d'existence et de bonne définition des objets. Dans la suite de ce paragraphe, $\mathcal{A}_0$ désigne l'ensemble des éléments $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ dont le premier terme a_1 est nul.

En clair, pour une suite $a = (a_n)_n \in \mathcal{A}_0$, on obtient l'expression suivante :

$$\theta(a)_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \theta(a)_n = a_n + \max_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n \\ k\geq 2}} \sum_{j=1}^{k} \theta(a)_{i_j}$$

Cet opérateur est défini de manière récursive : calculer une valeur de $w = \theta(l)$ nécessite de connaître les valeurs précédentes, sachant que pour tout l, $\theta(l)_1 = w_1 = 0$. Il est facile de voir que cet opérateur est positivement homogène et croissant :

$$\forall x \geq 0,\ \forall l \in \mathcal{A}_0,\ \theta(xl) = x\theta(l) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leq b_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \theta(a)_n \leq \theta(b)_n$$

Or, d'après un résultat précédent,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 4d((n-1)\xi, \mathbb{Z}) \leq |\lambda^n - \lambda| \leq 2\pi d((n-1)\xi, \mathbb{Z})$$

Donc, la croissance de l'opérateur θ assure que :

$$\theta(l) = w \leq \theta(\zeta) + \theta\left(\ln\left(\frac{1}{d((n-1)\xi, \mathbb{Z})}\right)\right)$$

où $\zeta = (0, -\ln(2), -\ln(2), \cdots)$.

Considérons de suite le terme $\theta(\zeta)$. Par le calcul :

$$\theta(\zeta)_1 = 0,\quad \theta(\zeta)_2 = -\ln(2),\quad \theta(\zeta)_3 = -\ln(2),\quad \theta(\zeta)_4 = -\ln(2), \cdots$$

En effet, la somme dans l'expression explicite de θ atteint sa valeur maximale dans la cas où $i_1 = \cdots = i_k = 1$, il faut en effet dans tous les autres cas ajouter des termes négatifs (ce qui diminue la valeur de la somme). Ce max vaut donc toujours 0.

Remarquons que pour une suite quelconque $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs négatives, ce raisonnement tient toujours et alors : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \theta(\alpha)_n = \alpha_n$. Seul le premier terme est susceptible d'être modifié (en 0).

Puisque tous les termes de $\theta(\zeta)$ sont négatifs, il est maintenant possible d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \theta(l)_n = w_n \leq \theta\left(\ln\left(\frac{1}{d((n-1)\xi, \mathbb{Z})}\right)\right)_n$$

Il reste donc à majorer ce dernier terme.

Posons pour simplifier les notations : $d_n = d((n-1)\xi, \mathbb{Z})$ et $\delta_n = \ln\left(\frac{1}{d_n}\right)$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
Considérons aussi la suite décroissante $(\tau_m = d(q_m\xi, \mathbb{Z}))_{m\in\mathbb{N}}$, où q_m désigne le m-ième temps de retour à proximité de $\lambda^0 = 1$, avec le choix $\tau_{-1} = 1$. Définissons la suite de suites suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \forall k \in \mathbb{N},\quad \delta_n^k = \begin{cases} \delta_n & \text{si } d_n \in [\frac{\tau_k}{2}, \frac{\tau_{k-1}}{2}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec ces notations, les intervalles $([\frac{\tau_k}{2}, \frac{\tau_{k-1}}{2}[)_k$ étant disjoints, $\delta = (\delta_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ se réécrit :

$$\delta = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k$$

où δ^k désigne la suite $(\delta_n^k)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$.
Sous cette forme, δ est une somme infinie de suites à supports localement finis et disjoints.

Lemme 6.2. *L'opérateur θ est sous-additif : $\forall a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*},\ \theta(a+b) \leq \theta(a) + \theta(b)$.*

Démonstration. Montrons par une récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \theta(a+b)_n \leq \theta(a)_n + \theta(b)_n$.
L'initialisation est immédiate.
Supposons maintenant la propriété vérifiée jusqu'au rang $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\theta(a+b)_{n+1} = (a+b)_{n+1} + \max_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n+1 \\ k\geq 2}} \sum_{j=1}^{k} \theta(a+b)_{i_j}$$

Or, pour tout $k \geq 2$, pour tout $(i_1, \cdots, i_k)$ tel que $i_1 + \cdots + i_k = n$, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $\theta(a+b)_{i_j} \leq \theta(a)_{i_j} + \theta(b)_{i_j}$ par hypothèse de récurrence, puisque les i_j sont nécessairement inférieurs à n (car au nombre de $k \geq 2$). Ainsi :

$$\begin{aligned} \max_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n+1 \\ k\geq 2}} \sum_{j=1}^{k} \theta(a+b)_{i_j} &\leq \max_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n+1 \\ k\geq 2}} \sum_{j=1}^{k} \theta(a)_{i_j} + \theta(b)_{i_j} \\ &\leq \max_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n+1 \\ k\geq 2}} \sum_{j=1}^{k} \theta(a)_{i_j} + \max_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n+1 \\ k\geq 2}} \sum_{j=1}^{k} \theta(b)_{i_j} \end{aligned}$$

La dernière inégalité découle directement du fait que :

$$\forall i_1, \cdots, i_k \mid i_1 + \cdots i_k = n+1,\ \sum_{j=1}^{k} \theta(a)_{i_j} + \theta(b)_{i_j} \leq \max_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n+1 \\ k\geq 2}} \sum_{j=1}^{k} \theta(a)_{i_j} + \max_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n+1 \\ k\geq 2}} \sum_{j=1}^{k} \theta(b)_{i_j}$$

Cela conclut la récurrence : θ est un opérateur sous-additif. □

Le lemme précédent assure que sur cette portion bornée :

$$\theta(\delta) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \theta(\delta^k)$$

Or, la suite (τ_k) est croissante (du fait de la croissance de (q_k)) donc la plus grande valeur prise par la suite (δ^k) est bornée (en fonction de k) :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \delta_n^k \leq \ln\left(\frac{2}{\tau_k}\right)$$

par décroissance de $x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi,

$$\theta(\delta) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \ln\left(\frac{2}{\tau_k}\right) \theta(\mathbb{1}_{supp\,\delta^k})$$

Les résultats d'une section précédente assurent que $\frac{1}{2q_{k+1}} \leq \tau_k \leq \frac{1}{q_{k+1}}$, donc :

$$\ln(2) + \ln(q_{k+1}) \leq \ln\left(\frac{2}{\tau_k}\right) \leq \ln(4) + \ln(q_{k+1})$$

Notons $\chi^k = \mathbb{1}_{supp\,\delta^k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

$$\theta(\delta) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\ln(4) + \ln(q_{k+1}))\, \theta(\chi^k)$$

Lemme 6.3. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. *Si* $a_1 = 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \geq 0$, *alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \theta(a)_n = a_n + \max_{k\in[\![1,n-1]\!]} \theta(a)_k + \theta(a)_{n-k}$$

Démonstration. Rappelons que :

$$\theta(a)_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \theta(a)_n = a_n + \max_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n \\ k\geq 2}} \sum_{j=1}^{k} \theta(a)_{i_j}$$

Il suffit de montrer que le max ci-dessus est atteint dans le cas où la somme ne contient que deux éléments ($k = 2$). Puisque le calcul de ce maximum impose $i_1 + \cdots + i_k = n$, cela entraîne automatiquement que $i_2 = n - i_1$.
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Montrons qu'une somme à trois termes ou plus ($k \geq 3$) peut toujours être "améliorée" par une somme à deux termes.

$$\theta(a)_n = a_n + \theta(a)_{i_1} + \theta(a)_{i_2} + \cdots + \theta(a)_{i_k}$$

Pourtant, en calculant $\theta(a)_{i_1+i_2}$,

$$\theta(a)_{i_1+i_2} = a_{i_1+i_2} + \max_{\substack{i_1+\cdots+i_k=i_1+i_2 \\ k\geq 2}} \sum_{j=1}^{k} \theta(a)_{i_j}$$

Puisque la suite est choisie à termes positifs et que la somme $\theta(a)_{i_1} + \theta(a)_{i_2}$ apparaît dans le max ci-dessus,

$$\theta(a)_{i_1+i_2} \geq a_{i_1+i_2} + \theta(a)_{i_1} + \theta(a)_{i_2} \geq \theta(a)_{i_1} + \theta(a)_{i_2}$$

De plus, on a bien sûr :

$$(i_1 + i_2) + \cdots + i_k = i_1 + i_2 + \cdots + i_k = n$$

En itérant ce procédé $k-2$ fois, il est clair que le maximum des sommes est atteint pour une somme à deux termes seulement (puisqu'il ne peut être qu'amélioré à chaque étape). $\square$

Le lemme suivant permet de majorer les termes de l'image par θ de la suite $\chi^k = \mathbb{1}_{supp\,\delta^k}$.

Lemme 6.4. $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\theta(\chi^k)\right)_n \leq 2\lfloor \frac{n}{q_k} \rfloor$.

Démonstration. Du lemme précédent, pour une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à termes positifs de premier terme nul :

$$\theta(a)_n = a_n + \theta(a)_i + \theta(a)_j = a_n + (a_i + \theta(a)_g + \theta(a)_h) + (a_j + \theta(a)_k + \theta(a)_l) = \cdots$$

où i, $j = n - i$, g, $h = i - g$, k, $l = j - k$ sont choisis de sorte à réaliser le max dans la formule précédente.

En itérant ce procédé, on construit un arbre binaire, de la forme :

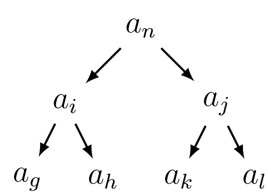

FIGURE 1 – Premiers niveaux de l'arbre binaire

L'arbre n'est bien sûr pas nécessairement symétrique. Le cas suivant est aussi possible :

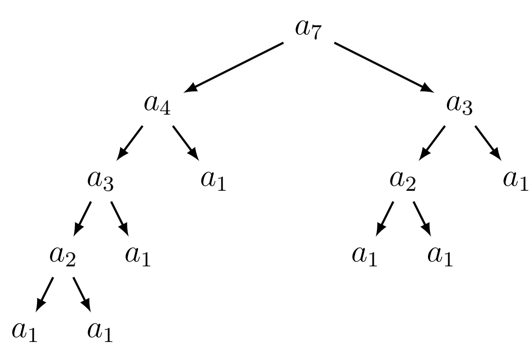

FIGURE 2 – Arbre binaire (non symétrique) dans le cas où $n = 7$

Chaque nœud de cet arbre binaire a un poids, défini comme l'indice de la suite représentée par l'arbre, égal à la somme des poids de ses fils. Notons que les feuilles sont nécessairement des $a_1 = 0$.

L'objectif est de majorer le nombre de nœuds de l'arbre associé à la suite χ^k de valeurs $\chi^k_n = 1$. Cet arbre ne présente que des 0 et des 1. Deux cas se présentent :

(i) si l'arbre ne contient que des 0, alors le lemme est immédiat.

(ii) si l'arbre contient au moins un 1, alors l'un des nœuds est de poids au moins $q_k + 1$, par définition du temps de retour q_k. Le poids de la racine est alors noté $n \geq q_k + 1$.

Il s'agit dans ce second cas de modifier l'arbre de telle sorte que les nœuds non terminaux (qui ne sont pas des feuilles) soient non nuls, sauf peut-être la racine.

Pour cela, contractons l'arbre en retirant les nœuds 0 : leurs fils sont transmis à leur père. Les feuilles d'étiquette 0 sont supprimées. Considérons l'exemple suivant :

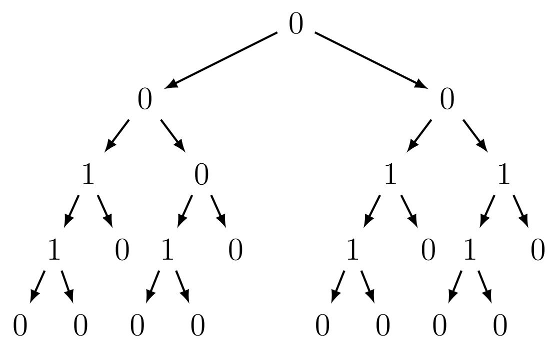

FIGURE 3 – Exemple d'arbre obtenu

Cet arbre est transformé par le procédé décrit ci-dessus en l'arbre suivant :

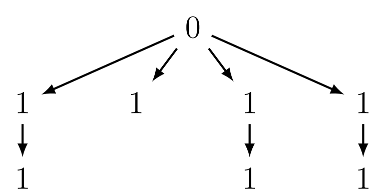

FIGURE 4 – Arbre précédent après contraction

Le seul zéro restant dans l'arbre ne peut être qu'à la racine. Dans le cas particulier où la racine est un 0 et n'a qu'un fils, elle est supprimée et remplacée par ce fils. L'arbre enraciné ainsi obtenu n'est plus nécessairement binaire. Reste à majorer le nombre de nœuds de cet arbre.

Données :

(i) chaque nœud a un poids supérieur ou égal à $q_k + 1$ (sinon ce serait un 0, par définition des temps de retour q_k)

(ii) la racine a un poids inférieur ou égal à n (après contraction de l'arbre, son poids a pu diminuer si elle n'avait qu'un fils)

(iii) chaque nœud a un poids supérieur ou égal à la somme des poids de ses fils (conservé après contraction)

(iv) chaque fils a un poids inférieur au poids du père d'au moins q_k (par définition des temps de retour q_k et de la suite χ^k)

En reprenant l'exemple précédent, rajoutons un frère (0) de poids q_k, sans descendance, aux fils uniques. L'arbre pris pour exemple devient alors :

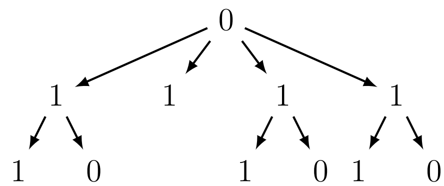

FIGURE 5 – Arbre après ajout de frères aux fils uniques

L'arbre enraciné ainsi obtenu vérifie alors les propriétés suivantes :

(i) chaque nœud a un poids supérieur ou égal à q_k et il y a au moins un nœud terminal de poids supérieur ou égal à $q_k + 1$ (il y en avait déjà au moins un avant de rajouter un frère)

(ii) la racine a un poids inférieur ou égal à n

(iii) chaque nœud a un poids supérieur ou égal à la somme des poids de ses fils (les nœuds rajoutés sont de poids q_k et n'ont pas de descendant)

(iv) il n'y a plus de nœud à un seul fils (c'est l'objectif de cette modification)

Le troisième point cité assure en particulier que la somme des poids des nœuds terminaux est inférieure ou égale au poids de la racine, donc le nombre de nœuds terminaux est majoré par $\lfloor \frac{n-1}{q_k} \rfloor$.

Par une récurrence immédiate sur la hauteur de l'arbre (à l'aide du quatrième point), le nombre de nœuds non terminaux est (strictement) inférieur au nombre de nœuds terminaux.

Compter les nœuds valant 1 revient par construction à évaluer $\theta(\chi^k)_n$. Ces nœuds peuvent être terminaux ou non. Or le paragraphe précédent permet d'affirmer que

$$\#\{\text{nœuds non terminaux}\} < \#\{\text{nœuds terminaux}\} \leq \lfloor \frac{n-1}{q_k} \rfloor$$

Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\theta(\chi^k)\right)_n \leq 2\lfloor \frac{n-1}{q_k} \rfloor - 1 \leq 2\lfloor \frac{n}{q_k} \rfloor$$

Cela signifie en particulier que les q_k premiers termes de la suite $\theta(\chi^k)$ sont nuls :

$$\forall n \in [\![1, q_k]\!],\ \theta(\chi^k)_n = 0$$

$\square$

Remarque 6.5. Une preuve plus technique ne fait pas apparaître le facteur multiplicatif 2 dans la majoration, ce qui permet une minoration plus fine du rayon de convergence de la série qui linéarise f.

Reprenons maintenant la suite de la preuve.

$$\theta(\delta) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\ln(4) + \ln(q_{k+1}))\, \theta(\chi^k)$$

Donc par le lemme précédent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \theta(\delta)_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\ln(4) + \ln(q_{k+1}))\, \theta(\chi^k)_n \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} (\ln(4) + \ln(q_{k+1}))\, \lfloor \frac{n}{q_k} \rfloor$$

De là, en utilisant la définition de la partie entière d'un réel,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \theta(\delta)_n \leq 2n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(4) + \ln(q_{k+1})}{q_k}$$

Or, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}$ avec $q_{-1} = 0$ et $q_0 = 1$, et que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \in \mathbb{N}^*$, par une récurrence double immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ q_n \geq F_n$$

où F_n désigne le n-ième nombre de la suite de Fibonacci initialisée par $F_{-1} = 0$, $F_0 = 1$. Un résultat classique assure en notant $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or, $F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \phi^{n+1}$.

Cet équivalent montre la convergence de la série $\sum \frac{1}{F_k}$ (théorème d'équivalence sur des séries à termes positifs), donc par majoration ($\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{q_n} \leq \frac{1}{F_n}$), la série $\sum \frac{1}{q_k}$ converge.

De plus, la condition de Brjuno assure la convergence de la série $\sum \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \ln(u_n) \leq \theta(\delta)_n \leq 2n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(4) + \ln(q_{k+1})}{q_k} = \mathcal{B}(\xi)\, n$$

où $\mathcal{B}(\xi) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(4)+\ln(q_{k+1})}{q_k} < \infty$. L'application $\mathcal{B}$ est usuellement appelée fonction de Brjuno.
Autrement dit, la suite $(\theta(\delta)_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par une suite linéaire (arithmétique). En passant à l'exponentielle, la suite (u_n) est finalement majorée par une suite à croissance exponentielle.

$$\exists c > 0,\ R > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \tilde{u}_n = cR^n$$

En reprenant ce qui précède, la série $\sum u_n z^n$ a un rayon de convergence strictement positif. La suite $(|[\phi]_n|)$ est donc à croissance exponentielle, ϕ est une fonction holomorphe sur un voisinage de 0 :

L'application f de multiplicateur $\lambda = e^{2i\pi\xi}$ est localement holomorphiquement linéarisable.

$\square$

7. Quelques résultats supplémentaires

Théorème 7.1. ***Théorème de linéarisation de* SIEGEL**
Soit $\lambda = e^{2i\pi\xi}$ avec $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si la quantité $\frac{1}{|\lambda^q - 1|}$ est majorée par une fonction polynomiale en q, alors tout germe de fonction holomorphe ayant un point fixe de multiplicateur λ est linéarisable au voisinage de ce point fixe.

Corollaire 7.2. *Si ξ est diophantien (d'ordre quelconque) alors tout germe de fonction holomorphe ayant un point fixe de multiplicateur $\lambda = e^{2i\pi\xi}$ est linéarisable au voisinage de ce point fixe.*

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $|q\xi - p| \leq \frac{1}{2}$ (p est l'entier le plus proche de $q\xi$). Les résultats d'une section précédente ($4|q\xi - p| \leq |\lambda^q - 1| \leq 2\pi|q\xi - p|$) entraînent :

$$\exists \varepsilon > 0,\ |q\xi - p| > \frac{\varepsilon}{q^{\alpha-1}} \Leftrightarrow \exists \tilde{\varepsilon} > 0,\ |\lambda^q - 1| > \frac{\tilde{\varepsilon}}{q^{\alpha-1}} \Leftrightarrow \exists \tilde{\varepsilon} > 0,\ \frac{1}{|\lambda^q - 1|} < \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} q^{\alpha-1}$$

Le théorème de SIEGEL permet de conclure. □

Remarque 7.3. Cette preuve montre en fait l'équivalence entre le théorème et le corollaire.

Proposition 7.4. *Le théorème de* BRJUNO *implique celui de* SIEGEL *: tout nombre diophantien vérifie la condition de* BRJUNO.

Démonstration. Si ξ est diophantien d'ordre α, alors $\exists C > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ q_{n+1} \leq C q_n^{\alpha-1}$ où (q_n) est la suite des dénominateurs des approximations rationnelles de ξ. De là,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} \leq \frac{\ln(C)}{q_n} + (\alpha - 1)\frac{\ln(q_n)}{q_n}$$

Or les deux termes de la somme sont des termes de série convergente (car (q_n) croît exponentiellement), donc (par théorème de majoration, les termes généraux considérés étant tous positifs) la série de BRJUNO converge : tout nombre diophantien est de BRJUNO. □

Remarque 7.5. Il existe des nombres de BRJUNO qui ne sont pas diophantiens : il suffit par exemple de choisir (q_n) de sorte que $q_{n+1} = e^{q_n^{1-\varepsilon}}$ avec $\varepsilon > 0$. Dans ce cas, $\frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} = q_n^{-\varepsilon}$ qui est le terme général d'une série convergente, mais q_{n+1} ne peut pas être majoré par un polynôme en q_n (par croissance comparée).

Proposition 7.6. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Si le polynôme $P_\theta : z \mapsto e^{2i\pi\theta}z + z^2$ est linéarisable au voisinage de 0, alors toute fonction holomorphe de la forme $z \mapsto e^{2i\pi\theta}z + \mathcal{O}(z^2)$ est aussi linéarisable au voisinage de 0.*

Démonstration. La démonstration repose sur des notions qui ne sont pas présentées dans ce document. Il s'agit d'introduire une famille d'applications dites à allure polynomiale et de montrer qu'à partir d'un certain rang, leur disque de Siegel contient un disque de rayon strictement positif. On utilise ensuite l'équivalence entre la linéarisabilité de f (au voisinage de 0) et l'existence d'un voisinage de 0 qui assure la bonne définition des itérées restreintes à ce voisinage. □

Les deux résultats qui suivent sont plus fins et dus à Jean-Christophe Yoccoz (1957 - 2016) :

Théorème 7.7. *La condition de* Brjuno *est optimale : si θ (dans le cas irrationnellement neutre) ne vérifie pas cette condition, alors il existe une application f de multiplicateur $\lambda = e^{2i\pi\theta}$ non linéarisable.*

Théorème 7.8. *Si θ ne satisfait pas la condition de* Brjuno*, alors P_θ n'est pas linéarisable.*

Références

[1] John Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, Third Edition, Annals Of Mathematic Studies, 2006.

[2] Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, 1993.

[3] Pierre Dolbeault, *Analyse Complexe*, Masson, 1990.

[4] Walter Rudin, *Real and complex Analysis*, Third Edition, McGraw Hill International, 1986.

[5] Ricardo Pérez-Marco, *Solution complète au problème de* Siegel *de linéarisation d'une application holomorphe au voisinage d'un point fixe*, Séminaire N. Bourbaki, 1991-1992.

[6] Jean-Christophe Yoccoz, *Petits diviseurs en dimension 1*, Astérisque, Société Mathématique de France, 1995

[7] Xavier Buff and John H. Hubbard, *Introduction to Holomorphic Dynamics*, Unpublished.