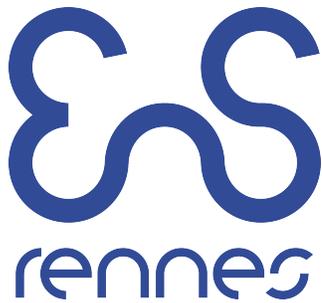


ANNÉE 2018



**Imperial College**  
**London**

RAPPORT DE STAGE

Rémi MOREAU

---

THÉORIE CINÉTIQUE : COMPORTEMENT DE PARTICULES  
PLONGÉES DANS UN FLUIDE

sous la tutelle de **Pierre DEGOND**

## **Remerciements**

Je tiens tout d'abord à remercier mon maître de stage Pierre DEGOND pour le temps qu'il m'a accordé, les propositions qu'il m'a faites, les pistes qu'il m'a données et les questions qu'il a abordées avec moi. Il m'a fait découvrir son monde de recherche, toujours de bonne humeur. Je le prie de bien vouloir me pardonner mes nombreuses étourderies.

Merci à Pedro ACEVES-SANCHEZ pour le temps qu'il a passé avec moi, pour son écoute et pour ses relectures, sans lesquelles les calculs qui suivent n'auraient probablement pas la même part de vérité.

Merci à l'équipe d'Imperial College London, à mes voisins de bureau, à François et Antoine qui ont rendu l'expérience londonienne plus agréable.

Merci enfin à ma famille, qui m'a hébergé, nourri, fait sortir, et surtout supporté pendant ces deux mois, se demandant parfois (très souvent) ce que je pouvais bien faire de mes journées... Sans eux, le séjour n'aurait pas eu la même saveur.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires mathématiques</b>	<b>1</b>
1.1	Notions de probabilités . . . . .	1
1.2	Mouvement brownien . . . . .	2
1.3	Intégrale d'Itô . . . . .	4
1.4	Martingales à temps continu . . . . .	6
1.5	Processus d'Itô - Équations stochastiques . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Équations cinétiques - Comportements asymptotiques</b>	<b>10</b>
2.1	Généralités . . . . .	10
2.2	Quelques exemples d'équations cinétiques . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Cas du modèle ponctuel</b>	<b>12</b>
3.1	Introduction . . . . .	12
3.2	Système cinétique . . . . .	13
3.3	Normalisation du système . . . . .	15
3.4	Étude des états stationnaires constants . . . . .	16
3.4.1	Notion de stabilité . . . . .	16
3.4.2	Cas particulier du ressort . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Cas de particules plongées dans un fluide</b>	<b>18</b>
4.1	Présentation du problème . . . . .	18
4.2	Système cinétique . . . . .	19
4.3	Changement d'échelle . . . . .	24
<b>A</b>	<b>Changement d'échelle : tentatives infructueuses</b>	<b>27</b>
A.1	Tentative infructueuse 1 . . . . .	27
A.2	Tentative infructueuse 2 . . . . .	29

# 1 Préliminaires mathématiques

Les notions et résultats présentés dans cette partie sont des outils pour la suite. Les démonstrations des théorèmes énoncés peuvent être trouvées dans les références proposées ([5]).

## 1.1 Notions de probabilités

**Définitions 1.1.** Soit  $\Omega$  un ensemble.

Une *tribu*  $\mathcal{F}$  sur  $\Omega$  est une famille de parties de  $\Omega$  telle que :

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{F}$
- (ii)  $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^c \in \mathcal{F}$
- (iii)  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

Un *espace mesurable* est la donnée d'une telle paire  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

Une *mesure de probabilité*  $P$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  est une application  $\mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  telle que :

- (i)  $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
- (ii)  $P\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

où la notation  $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$  désigne une union disjointe d'éléments de  $\mathcal{F}$ .

Un *espace probabilisé* est la donnée d'un triplet  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  comme ci-dessus.

Un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est dit *complet* si  $\mathcal{F}$  contient toutes les parties de  $\Omega$  de mesure extérieure nulle (l'ensemble des  $F \in \mathcal{F}$  tels que  $P^*(F) = \inf\{P(G), G \in \mathcal{F} \text{ et } F \subset G\} = 0$ ).

Quitte à ajouter à  $\mathcal{F}$  l'ensemble des négligeables au sens de la mesure extérieure et à adapter  $P$  (en la prolongeant par 0 sur ces nouveaux éléments), il est toujours possible de rendre un espace probabilisé complet. Dans la suite, l'espace de travail sera donc supposé complet.

Une partie  $F$  de  $\Omega$  est dite  *$\mathcal{F}$ -mesurable* si  $F \in \mathcal{F}$ .

La *tribu engendrée par une partie*  $U$  de  $\Omega$  est la plus petite tribu contenant  $U$ , à savoir

$$\sigma(U) = \bigcap_{U \subset H \text{ tribu}} H$$

(c'est une tribu comme intersection de tribus).

Une application  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite  *$\mathcal{F}$ -mesurable* si :

$$\forall U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), Y^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega, Y(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}$$

La *tribu engendrée par*  $Y$  est alors  $\sigma(Y) = \{Y^{-1}(U), U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$ .

Une *variable aléatoire* sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est une application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$   $\mathcal{F}$ -mesurable.

**Remarque 1.2.** Toute variable aléatoire  $X$  induit une mesure de probabilité, appelée distribution de  $X$ , donnée par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

Si  $X \in L^p(\Omega, P)$ , i.e.  $\int_{\Omega} |X|^p dP < \infty$ , alors on définit le moment d'ordre  $p$  de  $X$  par :

$$E(X^p) = \int_{\Omega} X(\omega)^p dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} x^p d\mu_X(x)$$

**Lemme 1.3** (Lemme de Doob-Dynkin). *Si  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , alors  $Y$  est  $\sigma(X)$ -mesurable, i.e.  $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$ , si et seulement si  $\exists g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  borélienne telle que  $Y = g(X)$ .*

**Définitions 1.4.** Deux éléments  $A, B \in \mathcal{F}$  sont dits *indépendants* si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Une famille  $\{H_i, i \in I\}$ ,  $I$  ensemble d'indices, est dite indépendante si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i_1, \dots, i_k \in I, P(H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_k}) = \prod_{j=1}^k P(H_{i_j})$$

Une famille  $\{X_i, i \in I\}$  de variables aléatoires est dite indépendante si  $\{\sigma(X_i), i \in I\}$  est indépendante.

**Remarque 1.5.** Si  $X, Y$  sont indépendantes et dans  $L^1(\Omega, P)$ , alors  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .

**Définitions 1.6.** Un *processus stochastique* est une famille de variables aléatoires  $\{X_t\}_{t \in T}$ ,  $T$  ensemble d'indices, sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Généralement,  $T = \mathbb{R}_+$  ou  $T = [a, b]$ .

Un processus stochastique peut être vu comme une fonction à deux variables  $X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par  $X(t, \omega) = X_t(\omega)$ .

Les *distributions* de  $X$  sont les mesures de probabilité de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)^k &\longrightarrow [0, 1] \\ (F_1, \dots, F_k) &\longmapsto P(X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k) \end{aligned}$$

**Théorème 1.7** (Théorème d'extension de Kolmogorov). *Si  $\nu = \{\nu_{t_1, \dots, t_k}, k \in \mathbb{N}, (t_i) \in T^k\}$  est un ensemble de mesures de probabilité vérifiant les conditions de consistance suivantes pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :*

$$(i) \forall \sigma \in \mathcal{S}(\{1, \dots, k\}), \nu_{t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(k)}}(F_1 \times \dots \times F_k) = \nu_{t_1, \dots, t_k}(F_{\sigma^{-1}(1)} \times \dots \times F_{\sigma^{-1}(k)})$$

$$(ii) \forall m \in \mathbb{N}, \nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \nu_{t_1, \dots, t_k, \dots, t_{k+m}}(F_1 \times \dots \times F_k \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n)$$

alors, il existe un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et un processus stochastique  $\{X_t\}$  tels que

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = P(X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k)$$

**Remarque 1.8.** Cet énoncé constitue une forme de réciproque à l'observation précédente : les distributions d'un processus stochastique sont des mesures de probabilité et, réciproquement, sous une condition dite de consistance, des mesures de probabilité permettent de construire un processus stochastique associé. La preuve utilise notamment le théorème d'extension de Carathéodory (non rappelé ici).

**Définition 1.9.** Soient  $\{X_t\}_{t \in T}, \{Y_t\}_{t \in T}$  deux processus stochastiques sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .  $\{X_t\}$  est une *version* de  $\{Y_t\}$  si  $\forall t \in T, P(X_t = Y_t) = P(\{\omega, X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1$ .

**Théorème 1.10** (Théorème de continuité de Kolmogorov). *Si  $X = \{X_t\}_{t \in T}$  vérifie :*

$$\forall \tau > 0, \exists \alpha, \beta, D \geq 0, \forall 0 \leq s, t \leq \tau, E(|X_t - X_s|^\alpha) \leq D|t - s|^{1+\beta}$$

alors il existe une version continue de  $X$ .

Autrement dit, il existe  $Y = \{Y_t\}_{t \in T}$  version de  $X$  telle que  $t \mapsto Y_t(\omega)$  est continue pour presque tout  $\omega$ .

## 1.2 Mouvement brownien

La construction du mouvement brownien repose sur le théorème d'extension de Kolmogorov, pour les mesures détaillées ci-dessous. Notons pour  $x, y \in \mathbb{R}^n, t > 0$ ,

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right)$$

Puis, si  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ , notons  $\nu_{t_1, \dots, t_k}$  la mesure définie par :

$$(F_1 \times \dots \times F_k) \mapsto \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

avec pour convention  $p(0, x, y) dy = \delta_x(y)$ .

Cette famille vérifie les hypothèses du théorème d'extension de Kolmogorov : il existe pour chaque  $x \in \mathbb{R}^n$  un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P^x)$  et un processus stochastique  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  sur  $\Omega$  tels que :

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = P^x(B_{t_1} \in F_1, \dots, B_{t_k} \in F_k)$$

**Définition 1.11.** Un tel processus est un mouvement brownien partant de  $x$ .

**Propriétés 1.12.** (i)  $P^x(B_0 = x) = 1$

(ii)  $\{B_t\}_t$  est un processus gaussien, i.e.  $\forall 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ ,  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$  suit une loi normale de moyenne  $M = (x, \dots, x) \in (\mathbb{R}^n)^k$  et de covariance

$$C = \begin{pmatrix} t_1 I_n & t_1 I_n & \dots & t_1 I_n \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \dots & t_2 I_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \dots & t_k I_n \end{pmatrix} = (\min\{t_i, t_j\} I_n)_{1 \leq i, j \leq k}$$

(iii)  $\forall s, t \geq 0$ ,  $E^x(B_t) = x$  et  $Cov(B_s, B_t) = E^x((B_t - x)(B_s - x)) = n \min\{s, t\}$

(iv)  $\forall t \geq s$ ,  $E^x((B_t - B_s)^2) = n(t - s)$ .

(v)  $\forall 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ ,  $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$  sont indépendants.

**Remarque 1.13.** En particulier en dimension 1,  $B_t \sim \mathcal{N}(x, t)$  et si  $t \geq s$ ,

$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s) \sim B_{t-s}$$

*Démonstration.*

(i) La loi de  $B_0$  est une loi normale dégénérée  $\mathcal{N}(x, 0) = \delta_x$  et  $P^x(B_0 = x) = \int_{\{x\}} \delta_x = 1$ .

(ii) Cela découle de la définition par les mesures ci-dessus.

(iii) Cela découle de la lecture des paramètres de la loi normale  $n$ -dimensionnelle.

(iv) En développant le carré et en utilisant l'expression de la covariance (quitte à retrancher  $x$ , on suppose  $x = 0$ ) :

$$E^x((B_t - B_s)^2) = E^x(B_t^2) - 2E^x(B_s B_t) + E^x(B_s^2) = nt - 2n \min\{s, t\} + ns = n(t - s)$$

(v) Les processus sont gaussiens donc il suffit de vérifier qu'ils sont non corrélés pour assurer l'indépendance :

$$Cov(B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_4} - B_{t_3}) = E^x(B_{t_2} B_{t_4}) - E^x(B_{t_1} B_{t_4}) - E^x(B_{t_2} B_{t_3}) + E^x(B_{t_1} B_{t_3}) = 0$$

□

Plutôt que de construire le mouvement brownien avec le théorème d'extension de Kolmogorov, il est possible de le définir de manière équivalente à l'aide des premières propriétés énoncées ci-dessus.

**Définition 1.14** (Définition uni-dimensionnelle).

Le *mouvement brownien uni-dimensionnel* est un processus stochastique  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  :

(i) à accroissements indépendants :  $\forall t \geq s$ ,  $B_t - B_s$  est indépendant de  $\{B_u\}_{u \in [0, s]}$

(ii) à accroissements stationnaires et gaussiens :  $\forall t \geq s$ ,  $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s) \sim B_{t-s}$

(iii) presque sûrement continu :  $t \mapsto B_t(\omega)$  est continue presque sûrement.

Le mouvement brownien est dit *standard* si l'on suppose de plus  $B_0 = 0$ .

**Définition-Proposition 1.15** (Définition équivalente).

Le *mouvement brownien uni-dimensionnel* est un processus stochastique  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  :

- (i) gaussien vérifiant  $\forall s, t \geq 0$ ,  $E(B_t) = 0$  et  $E(B_s B_t) = \min\{s, t\}$
- (ii) presque sûrement continu.

*Démonstration.* On se place ici dans le cas standard. Commençons par le sens 1.13  $\Rightarrow$  1.14. Les hypothèses de la définition 1.13 assurent que  $\forall t \geq 0$ ,  $B_t$  est gaussien de loi  $\mathcal{N}(0, t)$ . Soient  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ . Les  $(B_{t_i})_i$  sont tous gaussiens et  $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$  sont (gaussiens) indépendants, donc  $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$  est gaussien, puis par opérations sur les coordonnées,  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$  est gaussien. De plus, si  $t \geq s \geq 0$ ,

$$E(B_t) = E(\mathcal{N}(0, t)) = 0$$

$$E(B_s B_t) = \text{Cov}(B_s, B_t) = \frac{1}{2} (V(B_t) - V(B_s) - V(B_t - B_s)) = \frac{t - s - (t - s)}{2} = s$$

Réciproquement, si le processus est gaussien, alors il suffit de montrer la non corrélation pour avoir l'indépendance. Nous avons pour  $t \geq s \geq u \geq 0$  :

$$\text{Cov}(B_t - B_s, B_u) = \min\{t, u\} - \min\{s, u\} = 0$$

De plus,  $B_t - B_s$  ( $t \geq s$ ) suit une loi normale, dont les paramètres sont :

$$E(B_t - B_s) = E(B_t) - E(B_s) = 0 \text{ et } V(B_t - B_s) = E(B_t^2) + E(B_s^2) - 2E(B_s B_t) = t - s$$

Donc  $\forall t \geq s$ ,  $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s) \sim B_{t-s}$ . □

**Définition 1.16** (Définition multi-dimensionnelle). Le *mouvement brownien  $n$ -dimensionnel* est un processus  $\{B_t = (B_t^1, \dots, B_t^n)\}_{t \geq 0}$  où les  $B^i$  sont eux-mêmes des mouvements browniens uni-dimensionnels indépendants.

**Remarques 1.17.** Les trajectoires du mouvement brownien sont presque sûrement nulle part dérivables : presque sûrement,  $t \mapsto B_t(\omega)$  est continue nulle part dérivable.

Il est aussi possible de construire le mouvement brownien comme une limite en loi d'une marche aléatoire normalisée.

### 1.3 Intégrale d'Itô

**Définitions 1.18.** On désigne par  $\mathcal{F}_t$  ou  $\mathcal{F}_t^{(n)}$  la tribu engendrée par  $\{B_s(\cdot), s \leq t\}$ , i.e. la plus petite tribu contenant :

$$\{\omega, \forall k \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_k \leq t, \forall F_1, \dots, F_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), B_{t_i}(\omega) \in F_i, \forall i \in \{1, \dots, k\}\}$$

La famille de tribus  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est croissante ( $s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ ).

Soit  $\{N_t\}_t$  une famille de tribus. Une famille d'applications  $\{g(t, \omega)\}_{t \geq 0, \omega \in \Omega}$  est dite  $\{N_t\}$ -adaptée si  $\forall t \geq 0$ ,  $\omega \mapsto g(t, \omega)$  est  $N_t$ -mesurable.

On note  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S, T)$  l'ensemble des applications  $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifiant :

- (i)  $(t, \omega) \mapsto f(t, \omega)$  est  $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}$ -mesurable
- (ii)  $\{f(t, \omega)\}_{t \geq 0, \omega \in \Omega}$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable
- (iii)  $E(\int_S^T f(t, \omega)^2 dt) < \infty$

### Construction de l'intégrale d'Itô

Pour  $\phi \in \mathcal{V}$  élémentaire, i.e. de la forme  $\phi(t, \omega) = \sum_{j=1}^N e_j(\omega) \mathbf{1}_{t_j \leq t < t_{j+1}}$ , on pose pour définition :

$$\int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) = \int_S^T \sum_{j=1}^N e_j(\omega) \mathbf{1}_{t_j \leq t < t_{j+1}} dB_t(\omega) = \sum_{j=1}^N e_j(\omega) [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}] (\omega)$$

Les lemmes suivants permettent d'étendre cette définition à  $f \in \mathcal{V}$ .

**Lemme 1.19.** *Soit  $g \in \mathcal{V}$  bornée telle que  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $g(\cdot, \omega)$  est continue.*

$$\exists (\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} \text{ élémentaires, } E \left( \int_S^T (g - \phi_n)^2 dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Démonstration.* Puisque  $g \in \mathcal{V}$ , les fonctions suivantes sont élémentaires :

$$\phi_n(t, \omega) = \sum_{j=1}^n g(t_j, \omega) \mathbf{1}_{t_j \leq t < t_{j+1}}$$

De plus, par continuité de  $g(\cdot, \omega)$  pour chaque  $\omega$ , il vient :

$$\forall \omega \in \Omega, \int_S^T (g - \phi_n)^2(t, \omega) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Le résultat est obtenu par convergence dominée. □

**Lemme 1.20.** *Soit  $h \in \mathcal{V}$  bornée.*

$$\exists (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} \text{ bornées, } \forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega, g_n(\cdot, \omega) \text{ est continue}$$

$$\text{et } E \left( \int_S^T (h - g_n)^2 dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Démonstration.* Le caractère borné de  $h$  assure l'existence d'un réel  $M$  tel que pour tout couple  $(t, \omega)$ ,  $|h(t, \omega)| \leq M$ . Construisons sur  $\mathbb{R}$  une approximation de l'unité  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sorte que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{supp}(\psi_n) \subset [-\frac{1}{n}, 0]$  et  $\int_{\mathbb{R}} \psi_n = 1$ . Posons alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (t, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega, g_n(t, \omega) = \int_0^t \psi_n(s-t) h(s, \omega) ds$$

Ainsi définies, les fonctions  $g_n$  vérifient les hypothèses du lemme précédent (la mesurabilité est un point difficile, voir *Brownian Motion and Stochastic Calculus* de Karatzas et Shreve). De plus,

$$\forall \omega \in \Omega, \int_S^T (g_n(t, \omega) - h(t, \omega))^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Le résultat est ici aussi obtenu par convergence dominée. □

**Lemme 1.21.** *Soit  $f \in \mathcal{V}$ .*

$$\exists (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} \text{ bornées, } E \left( \int_S^T (f - h_n)^2 dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Démonstration.* Il n'est pas nécessaire que la suite  $(h_n)$  soit bornée, mais plutôt que chacune des fonctions  $h_n$  le soit pour entrer dans le cadre du lemme précédent (applicable à chaque  $h_n$ ). Le majorant de  $h_n$  peut donc dépendre de  $n$ . A partir de là, il suffit de poser pour  $(t, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega$  :

$$h_n(t, \omega) = f(t, \omega) \mathbb{1}_{-n \leq f(t, \omega) \leq n} - n \mathbb{1}_{f(t, \omega) < -n} + n \mathbb{1}_{n < f(t, \omega)}$$

La suite  $\left( \int_S^T (f - h_n)^2(t, \omega) dt \right)_n$  est stationnaire de limite nulle pour tout  $\omega$ . Le résultat est encore une fois obtenu par convergence dominée.  $\square$

En somme si  $f \in \mathcal{V}$ , alors il existe une suite de fonctions  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}}$  élémentaires, vérifiant :

$$E \left( \int_S^T (f - \phi_n)^2 dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Définition 1.22.** Soit  $f \in \mathcal{V}$ . L'intégrale d'Itô de  $f$  est définie comme :

$$I[f](\omega) = \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega)$$

où les  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont choisies comme ci-dessus :  $E \left( \int_S^T (f - \phi_n)^2 dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Les propriétés suivantes sont claires pour les fonctions élémentaires et découlent simplement du passage à la limite.

**Proposition 1.23** (Isométrie d'Itô).

$$\forall f \in \mathcal{V}, E \left( \left( \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) \right)^2 \right) = E \left( \int_S^T f(t, \omega)^2 dt \right)$$

**Propriétés 1.24.** Soient  $f, g \in \mathcal{V}(0, T)$ ,  $0 \leq S < U < T$ .

- (i) Relation de Chasles :  $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$
- (ii) Linéarité de l'intégrale :  $\forall c \in \mathbb{R}, \int_S^T cf + g dB_t = c \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$
- (iii)  $E \left( \int_S^T f dB_t \right) = 0$
- (iv)  $\int_S^T f dB_t$  est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable.

## 1.4 Martingales à temps continu

**Définition 1.25.** Un processus stochastique  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  est une *martingale* pour la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  (i.e.  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  est une famille croissante de tribus :  $s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ ) si :

- (i)  $\forall t \geq 0, M_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable
- (ii)  $\forall t \geq 0, M_t$  est  $L^1$ , i.e.  $E(|M_t|) < \infty$
- (iii)  $\forall s \geq t \geq 0, E(M_s | \mathcal{F}_t) = M_t$

**Proposition 1.26.** Le mouvement brownien  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  est une martingale pour la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  associée ( $\mathcal{F}_t$  est la tribu engendrée par  $\{B_s(\cdot), s \leq t\}$ ).

*Démonstration.* (i)  $\forall t \geq 0, B_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable par définition.

- (ii)  $\forall t \geq 0, E(|B_t|)^2 \leq E(B_t^2) = nt < \infty$
- (iii)  $\forall s \geq t \geq 0, E(B_s | \mathcal{F}_t) - B_t = E(B_s - B_t | \mathcal{F}_t) = E(B_s - B_t) = 0$  ( $B_s - B_t$  indépendant de  $\mathcal{F}_t$ ).

$\square$

**Définition-Proposition 1.27** (Autre définition du mouvement brownien).

Le mouvement brownien est une martingale continue telle que  $\{M_t^2 - t\}$  est une martingale.

**Théorème 1.28** (Inégalité de Doob). *Si  $\{M_t\}$  est une  $\{\mathcal{F}_t\}$ -martingale, telle que  $t \mapsto M_t(\omega)$  est continue p.s., alors :*

$$\forall p \geq 1, \forall t \geq 0, \forall \lambda > 0, P \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| \geq \lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda^p} E(|M_T|^p)$$

**Théorème 1.29.** *Si  $f \in \mathcal{V}(0, T)$ , alors il existe une version continue de*

$$\begin{aligned} [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_0^t f(s, \omega) dB_s(\omega) \end{aligned}$$

pour presque tout  $\omega$ , i.e. il existe un processus stochastique continu  $\{J_t\}$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  tel que

$$\forall t \in [0, T], P \left( J_t = \int_0^t f dB \right) = 1$$

*Démonstration.* Soit  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de fonctions élémentaires telles que :

$$E \left( \int_0^T (f - \phi_n)^2 dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Posons :

$$I_n(t, \omega) = \int_0^t \phi_n(s, \omega) dB_s(\omega) \text{ et } I_t(\omega) = \int_0^t f(s, \omega) dB_s(\omega), \forall t \in [0, T]$$

Les  $I_n(\cdot, \omega)$  sont continues sur  $[0, T]$ , et l'on a :

$$E(I_n(s, \omega) | \mathcal{F}_t) - I_n(t, \omega) = E \left( \int_s^t \phi_n dB | \mathcal{F}_t \right) = \sum_j E \left( e_j^{(n)} E(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}} | \mathcal{F}_{t_j^{(n)}}) | \mathcal{F}_t \right) = 0$$

Par l'inégalité de Doob appliquée à la martingale  $(I_n - I_m)$ , il vient :

$$P \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |I_n(t, \cdot) - I_m(t, \cdot)| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E \left( \int_0^T (\phi_n(s, \omega) - \phi_m(s, \omega))^2 ds \right) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

Quitte à extraire une sous-suite, il est possible de majorer chacun de ces termes par le terme général d'une série convergente (par exemple  $\frac{1}{2^k}$ ) et le lemme de Borel-Cantelli assure alors :

$$\text{pour presque tout } \omega, \exists k_0(\omega), \forall k \geq k_0(\omega), \sup_{[0, T]} |I_{k+1}(\cdot, \omega) - I_k(\cdot, \omega)| \leq \frac{1}{2^k}$$

où la suite extraite est notée comme la précédente.

De là,  $(I_k(t, \omega))$  converge uniformément sur  $[0, T]$  presque sûrement, donc est de limite continue. La convergence  $L^2$  est aussi assurée. D'autre part,  $I_n(t, \cdot)$  converge dans  $L^2$  vers  $I(t, \cdot)$ . Cela termine la preuve, par unicité de la limite et par continuité de la limite uniforme presque partout.  $\square$

Autrement dit, quitte à changer l'intégrale d'Itô ci-dessus par une de ses versions, on peut toujours supposer qu'elle est  $t$ -continue.

**Corollaire 1.30.** *Si  $\forall T \geq 0, f \in \mathcal{V}(0, T)$ , alors le processus stochastique  $\{M_t = \int_0^t f(s, \cdot) dB_s\}_{t \geq 0}$  est une  $\{\mathcal{F}_t\}$ -martingale et :*

$$P \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| \geq \lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda^2} E \left( \int_0^T f(s, \cdot)^2 ds \right)$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer l'inégalité de Doob pour  $p = 2$  puis d'utiliser la propriété d'isométrie de l'intégrale d'Itô.  $\square$

## 1.5 Processus d'Itô - Équations stochastiques

**Définition 1.31.** Un *processus d'Itô* (aussi appelé *intégrale stochastique*) est un processus stochastique  $\{X_t\}$  de la forme :

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s(\omega)$$

où les différents facteurs vérifient les propriétés suivantes :

(i)  $v \in \mathcal{W}_H = \bigcap_{T \geq 0} \mathcal{W}_H(0, T)$  avec  $\forall T \geq 0$ ,  $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est élément de  $\mathcal{W}_H(0, T)$  si :

- $f$  est  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$ -mesurable
- $\exists \{H_t\}_{t \geq 0}$ ,  $\{B_t\}$  est une  $\{H_t\}$ -martingale et  $\{f(t, \cdot)\}$  est  $\{H_t\}$ -adaptée
- $P\left(\int_0^T f(s, \omega)^2 ds < \infty\right) = 1$

(ii)  $P\left(\int_0^t v(s, \omega)^2 ds < \infty \forall t \geq 0\right) = 1$

(iii)  $u$  est  $\{H_t\}$ -adaptée (avec  $\{H_t\}$  pris ci-dessus) et  $P\left(\int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty \forall t \geq 0\right) = 1$

**Remarque 1.32.** L'expression vérifiée par le processus d'Itô se réécrit parfois :

$$dX_t = u dt + v dB_t$$

Cette écriture est appelée équation différentielle stochastique.

**Théorème 1.33** (Formule d'Itô en dimension 1).

Si  $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $\{X_t\}$  est un processus d'Itô donné par

$$dX_t = u dt + v dB_t$$

alors  $\{Y_t = g(t, X_t)\}$  définit à nouveau un processus d'Itô caractérisé par l'équation :

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2$$

où la règle de calcul pour  $(dX_t)^2 = dX_t \cdot dX_t$  est la suivante :

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0 \text{ et } (dB_t)^2 = dt$$

La preuve de la formule d'Itô n'est pas détaillée ici et peut être trouvée dans les références proposées.

**Exemples 1.34.** Pour  $g(t, x) = \frac{x^2}{2}$  et  $g(t, x) = tx$  par exemple, on obtient les relations :

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t) \text{ et } \int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds$$

Il est possible d'obtenir ces relations à partir de la définition de l'intégrale d'Itô (en tant que limite), mais c'est plus pénible.

**Corollaire 1.35** (Intégration par parties pour l'intégrale d'Itô).

Si  $f \in \mathcal{C}^1([0, t])$ , alors :

$$\int_0^t f(s) dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s f'(s) ds$$

ou encore sous forme différentielle :

$$d(f(t)B_t) = B_t f'(t) dt + f(t) dB_t$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la formule d'Itô ci-dessus à la fonction  $g(t, x) = f(t)x$  (dérivable une fois en  $t$  et deux fois en  $x$  ce qui suffit).  $\square$

**Remarque 1.36.** La formule d'intégration par parties reste vraie pour  $f$  continue à variations bornées, en remplaçant  $f'(s)ds$  par  $df(s)$ .

Les considérations ci-dessus peuvent être effectuées dans  $\mathbb{R}^n$  de manière similaire.

**Définition 1.37.** Un *processus d'Itô  $n$ -dimensionnel* est un processus stochastique de la forme :

$$dX_t^{(n)} = udt + vdb_t^{(n)}$$

$$\text{où } X_t^{(n)} = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = (v_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,m} \text{ et } dB_t^{(n)} = \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ \vdots \\ dB_n(t) \end{pmatrix} \text{ avec } (B_1, \dots, B_n) \text{ mouvement}$$

brownien  $n$ -dimensionnel, et où les  $(u_i)$  et les  $(v_{i,j})$  satisfont les hypothèses de la définition précédente.

**Théorème 1.38** (Formule d'Itô généralisée).

Si  $g = (g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  et  $\{X_t\}$  est un processus d'Itô  $n$ -dimensionnel donné par l'équation stochastique :

$$dX(t) = udt + vdB(t)$$

alors  $Y(t) = (Y_1(t), \dots, Y_p(t) = g(t, X(t)))$  est un processus d'Itô  $p$ -dimensionnel vérifiant :

$$dY_k(t) = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X(t))dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X(t))dX_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X(t))dX_i(t) \cdot dX_j(t)$$

où la règle de calcul pour  $dX_i \cdot dX_j$  est la suivante :

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_i = dB_i \cdot dt = 0 \text{ et } dB_i \cdot dB_j = \delta_{i,j}dt$$

Les deux théorèmes qui suivent sont des théorèmes de représentation permettant d'exprimer des variables aléatoires  $L^2$  comme des processus d'Itô.

**Théorème 1.39** (Représentation d'Itô).

Si  $F \in L^2(\mathcal{F}_T^{(n)}, P)$ , alors  $\exists! f \in \mathcal{V}^{(n)}(0, t)$ ,  $F = E(F) + \int_0^t f(t, \cdot)dB_t$ .

**Théorème 1.40** (Représentation de martingales). Soit  $B(t) = (B_1, \dots, B_n(t))$  mouvement brownien  $n$ -dimensionnel. Si  $\{M_t\}$  est une  $\mathcal{F}_t^{(n)}$ -martingale  $L^2$ , alors il existe un unique processus stochastique  $g = \{g(s, \omega)\}_{s \geq 0, \omega \in \Omega}$  tel que  $\forall t \geq 0$ ,  $g(t, \cdot) \in \mathcal{V}^{(n)}([0, T])$  et

$$M_t = E(M_0) + \int_0^t g(s, \cdot)dB_s$$

## 2 Équations cinétiques - Comportements asymptotiques

### 2.1 Généralités

Les observations et modélisations de phénomènes dans des populations peuvent être faites à différents niveaux. On en distingue trois :

- (i) le *niveau microscopique* où l'on distingue chaque particule (atome, molécule, microbe...) individuellement. C'est le cadre de l'étude de la dynamique des particules (isolées), subissant les lois de la mécanique régies par les équations de Newton notamment.

$$\frac{dX}{dt} = v \quad \text{et} \quad \mu \frac{dv}{dt} = F$$

où  $X$  désigne la position d'une particule,  $v$  sa vitesse,  $F$  l'ensemble des forces s'appliquant sur la particule. (fonctions du temps  $t$ )

$\mu$  la masse d'une particule.

- (ii) le *niveau macroscopique*, celui observable à l'œil nu (écoulement d'un fluide par exemple), on ne distingue plus l'individu. C'est le contexte adapté aux modèles continus. On peut notamment citer les équations de Navier-Stokes dans ce cadre d'étude :

$$\begin{cases} \rho_0(\partial_t v + v \cdot \nabla_x v) - \nu \Delta_x v = -\nabla_x p + F \\ \nabla \cdot v = 0 \end{cases}$$

où  $v$  désigne la vitesse du fluide,  $p$  la pression du fluide,  $F$  l'ensemble des forces s'exerçant sur le fluide (fonctions de l'espace  $x$  et du temps  $t$ )

$\nu$  est un coefficient de viscosité ( $\nu > 0$ )

$\rho_0$  est la masse volumique du fluide (supposée constante).

L'équation  $\nabla \cdot v = 0$  traduit l'incompressibilité du fluide.

- (iii) le *niveau mésoscopique*, intermédiaire, où l'on forme des groupes d'individus à grande échelle : on étudie alors des données moyennes (position, vitesse, accélération...). C'est la théorie cinétique. Les équations cinétiques s'écrivent de manière générale :

$$\partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon + F \cdot \nabla_v f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q(f^\varepsilon)$$

où  $f^\varepsilon$  désigne la distribution (densité de probabilité de particules, fonction du temps  $t$ , de l'espace  $x$ , de la vitesse  $v$ )

$F$  est une force extérieure agissant sur les particules (dérivant souvent d'un potentiel :  $F = -\nabla_x V$ )

$Q$  est un opérateur (en général non linéaire), dit de collision, modélisant les chocs subis par les particules.

Une telle équation est généralement accompagnée d'une condition initiale :

$$\forall (x, v) \in \mathbb{R}^d, f^\varepsilon(0, x, v) = f_0(x, v)$$

**Remarque 2.1.** Il est possible de passer par exemple de l'état microscopique au mésoscopique, puis au macroscopique en moyennant les valeurs de position et de vitesse et en passant à la limite sur le changement d'échelle ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Il est par contre très difficile (souvent même impossible) de faire le chemin inverse, à savoir partir d'une situation continue et obtenir le comportement de chaque individu.

### 2.2 Quelques exemples d'équations cinétiques

Voici ci-dessous quelques exemples d'équations cinétiques bien connues. Elles proviennent notamment de la physique.

(i) *Équation de transport linéaire* :

$$\partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L} f^\varepsilon + \varepsilon G$$

où  $G$  est un terme source et  $\mathcal{L}$  une forme linéaire (que nous ne détaillons pas ici).

(ii) *Équation de Vlasov* :

$$\partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon + F \cdot \nabla_v f^\varepsilon = 0$$

où  $F$  est la force subie par les particules.

(iii) *Équation de Boltzmann* :

$$\partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q_B(f^\varepsilon)$$

où  $Q_B$  est l'opérateur de collision de Boltzmann traduisant des collisions entre deux particules. Pour une collision dans la direction  $\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}$ , si  $v, v_*$  sont des vitesses pré-collisionnelles, alors on note les vitesses post-collision :

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma \text{ et } v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma$$

On définit alors l'opérateur de collision comme suit :

$$Q(f, f)(v) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B(v - v_*, \sigma) [f(v')f(v'_*) - f(v)f(v_*)] d\sigma dv_*$$

avec  $B$  noyau de collision de Boltzmann.

**Remarque 2.2.** Les équations cinétiques sont présentes dans de nombreux domaines des mathématiques, tels que la modélisation de gaz rares, la dynamique des fluides, l'astrophysique, la biologie (les biomathématiques), les sciences sociales...

### 3 Cas du modèle ponctuel

#### 3.1 Introduction

Dans cette partie, l'idée est de modéliser l'évolution d'une population ayant la possibilité de former (et détruire) des liens. C'est notamment le cas des réseaux sociaux en sociologie, ou des amas de protéines dans le corps humain en biologie. Les hypothèses simplificatrices suivantes sont prises en compte :

- (i) les particules sont des éléments ponctuels avec un déplacement aléatoire
- (ii) pouvant former des liens (ou détruire un lien existant) à distance aléatoirement (i.e. avec une certaine probabilité)
- (iii) deux particules interagissent lorsqu'un lien les relie.

Dans la suite,  $N$  désigne le nombre de particules et  $K$  le nombre de liens existant.

L'objectif est alors de déterminer les équations cinétiques (lorsque les nombres de particules et de liens tendent vers l'infini) régissant le système à partir des équations vérifiées par :

- la distribution de particules
- la distribution des liens.

Le processus de formation / destruction d'un lien est supposé "rapide", ce qui signifie que le temps correspondant est négligeable devant le temps d'observation du système. Des expériences en biologie par exemple montrent que cette hypothèse est raisonnable.

*Cadre* : Un lien peut se former entre deux particules  $i$  et  $j$  de positions  $X_i$  et  $X_j$  si  $|X_i - X_j| < R$  où  $R$  s'interprète comme un rayon d'action. En d'autres termes, une particule ne peut former un lien avec une autre que si elles sont assez proches.

Le lien est créé selon un processus de Poisson avec probabilité  $\nu_f^N$  et un lien existant est détruit de la même manière (quelle que soit la distance séparant les particules reliées) avec probabilité  $\nu_d^N$ . Ces probabilités dépendent du nombre de particules  $N$ . (Intuitivement, plus il y a de particules, plus il est facile de former des liens.) En particulier, si  $\Delta t$  désigne un laps de temps :

$$P(\text{formation d'un lien } X_i \leftrightarrow X_j \text{ en } \Delta t \text{ si } |X_i - X_j| < R) = \nu_f^N \Delta t$$

$$P(\text{destruction d'un lien } X_i \leftrightarrow X_j \text{ en } \Delta t) = \nu_d^N \Delta t$$

L'interaction entre deux particules liées est donnée par un potentiel symétrique (les deux particules liées subissent les mêmes effets) de la forme :

$$V(X_i, X_j) = U(|X_i - X_j|)$$

On verra notamment dans la suite le cas particulier du ressort.

Entre deux événements de création / destruction, les positions des particules vérifient l'équation stochastique :

$$dX_i = -\mu \nabla_{X_i} W dt + \sqrt{2D} dB_i \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

où chaque  $B_i$  désigne un mouvement brownien bi-dimensionnel ( $B_i^1, B_i^2$ ) traduisant le déplacement aléatoire

$D > 0$  coefficient de diffusion

$\mu > 0$  coefficient de mobilité des particules

$W = \sum_{k=1}^K V(X_{i(k)}, X_{j(k)})$  avec  $(X_{i(k)}, X_{j(k)})$  la paire formant le lien  $k$ .

Autrement dit, pour chaque particule  $i$ ,

$$\begin{aligned} dX_i &= -\mu \sum_{i=i(k)} (\nabla_{x_1} V(X_{i(k)}, X_{j(k)}) + \nabla_{x_2} V(X_{i(k)}, X_{j(k)})) dt + \sqrt{2D} dB_i \\ &= -\mu \sum_{k=1}^K (\nabla_{x_1} V(X_{i(k)}, X_{j(k)}) \mathbb{1}_{i=i(k)} + \nabla_{x_2} V(X_{i(k)}, X_{j(k)}) \mathbb{1}_{i=j(k)}) dt + \sqrt{2D} dB_i \end{aligned}$$

### 3.2 Système cinétique

On définit ci-dessous les densités empiriques de particules et de liens.

$$\begin{aligned} f^N(x, t) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{x=X_i(t)} \\ g^K(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{2K} \sum_{k=1}^K \mathbb{1}_{(x_1, x_2)=(X_{i(k)}(t), X_{j(k)}(t))} + \mathbb{1}_{(x_1, x_2)=(X_{j(k)}(t), X_{i(k)}(t))} \\ &= \frac{1}{2K} \sum_{k=1}^K \mathbb{1}_{x_1=X_{i(k)}(t)} \mathbb{1}_{x_2=X_{j(k)}(t)} + \mathbb{1}_{x_1=X_{j(k)}(t)} \mathbb{1}_{x_2=X_{i(k)}(t)} \end{aligned}$$

On introduit aussi la densité de paires ("nombre moyen de paires" entre deux points) :

$$h^N(x_1, x_2, t) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \mathbb{1}_{(x_1, x_2)=(X_i(t), X_j(t))}$$

Dans la suite, on suppose que les limites suivantes existent (au moins au sens des distributions) :

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} f^N(x, t) \quad g(x_1, x_2, t) = \lim_{K \rightarrow \infty} g^K(x_1, x_2, t) \\ h(x_1, x_2, t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} h^N(x_1, x_2, t) \\ \nu_f &= \lim_{N \rightarrow \infty} \nu_f^N \quad \text{et} \quad \nu_d = \lim_{N \rightarrow \infty} \nu_d^N \end{aligned}$$

**Théorème 3.1** (Système cinétique couplé). *Si les hypothèses précédentes sont vérifiées et si  $\lim_{K, N \rightarrow \infty} \frac{K}{N} = \xi > 0$ , alors :*

$$\begin{aligned} \partial_t f(x, t) &= D \Delta_x f(x, t) + 2\mu \xi \nabla_x \cdot F(x, t) \\ \partial_t g(x_1, x_2, t) &= D (\Delta_{x_1} g(x_1, x_2, t) + \Delta_{x_2} g(x_1, x_2, t)) \\ &\quad + 2\mu \xi \left( \nabla_{x_1} \cdot \left( \frac{g(x_1, x_2, t)}{f(x_1, t)} F(x_1, t) \right) + \nabla_{x_2} \cdot \left( \frac{g(x_1, x_2, t)}{f(x_2, t)} F(x_2, t) \right) \right) \\ &\quad + \frac{\nu_f}{2\xi} h(x_1, x_2, t) \mathbb{1}_{|x_1 - x_2| \leq R} - \nu_d g(x_1, x_2, t) \end{aligned}$$

où l'on désigne par  $F$  la fonction

$$F : (x, t) \mapsto \int g(x, y, t) \nabla_{x_1} V(x, y) dy$$

**Remarque 3.2.** Dans ce cadre,  $\xi$  désigne le nombre moyen de liens par particule à la limite.

*Démonstration.* Pour  $\phi$  et  $\psi$  des fonctions régulières à support compact :

$$\begin{aligned} \langle f^N(x, t), \phi(x) \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_i(t)) \\ \langle g^K(x_1, x_2, t), \psi(x_1, x_2) \rangle &= \frac{1}{2K} \sum_{k=1}^K \psi(X_{i(k)}(t), X_{j(k)}(t)) + \psi(X_{j(k)}(t), X_{i(k)}(t)) \end{aligned}$$

De plus, la formule d'Itô assure que :

$$d\phi(X_i(t)) = \nabla\phi(X_i(t))dX_i + \frac{1}{2}\Delta\phi(X_i(t))2D dt$$

donc en utilisant les expressions précédentes sur  $dX_i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle f^N(x, t), \phi(x) \rangle &= -\frac{\mu}{N} \sum_{i=1}^N \nabla\phi(X_i(t)) \sum_{k=1}^K (\nabla_{x_1} V(X_{i(k)}, X_{j(k)}) \mathbb{1}_{i=i(k)} + \nabla_{x_2} V(X_{i(k)}, X_{j(k)}) \mathbb{1}_{i=j(k)}) \\ &\quad + \frac{D}{N} \sum_{i=1}^N \Delta\phi(X_i(t)) \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\langle \nabla_{x_1} \cdot (g^K \nabla_{x_1} V), \phi \rangle = -\frac{1}{2K} \sum_{k=1}^K \nabla\phi(X_{i(k)}) \nabla_{x_1} V(X_{i(k)}, X_{j(k)}) + \nabla\phi(X_{j(k)}) \nabla_{x_1} V(X_{j(k)}, X_{i(k)})$$

Donc en intervertissant les sommes et en utilisant la symétrie du potentiel  $V$  (qui assure que  $\nabla_{x_2} V(x_1, x_2) = \nabla_{x_1} V(x_2, x_1)$ ),

$$\frac{d}{dt}\langle f^N(x, t), \phi(x) \rangle = \frac{2\mu K}{N} \langle \nabla_x \cdot F^K, \phi \rangle + D \langle \Delta f^N, \phi \rangle$$

où l'on désigne par  $F^K : (x, t) \mapsto \int g^K(x, y, t) \nabla_{x_1} V(x, y) dy$ .

Par passage aux limites  $K, N \rightarrow \infty$ , par hypothèse,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f^N = f, \quad \lim_{K \rightarrow \infty} g^K = g \text{ et } \lim_{K, N \rightarrow \infty} \frac{K}{N} = \xi$$

donc  $\lim_{K \rightarrow \infty} F^K = F$  et en particulier :

$$\partial_t f = 2\mu\xi \nabla_x \cdot F + D\Delta f$$

Il s'agit maintenant de faire un raisonnement similaire pour  $g$ . Laissons pour le moment de côté les termes de création et de suppression de liens.

$$\frac{d}{dt}\langle g^K(x_1, x_2, t), \psi(x_1, x_2) \rangle = \frac{1}{2K} \sum_{k=1}^K \frac{d}{dt} \psi(X_{i(k)}(t), X_{j(k)}(t)) + \frac{d}{dt} \psi(X_{j(k)}(t), X_{i(k)}(t))$$

La formule d'Itô permet de développer les facteurs ci-dessus sous la forme d'une somme de trois termes (où l'on ne note plus la dépendance en  $t$  des positions) :

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{D}{K} \sum_{k=1}^K \Delta_{x_1} \psi(X_{i(k)}, X_{j(k)}) + \Delta_{x_2} \psi(X_{j(k)}, X_{i(k)}) + \Delta_{x_1} \psi(X_{j(k)}, X_{i(k)}) + \Delta_{x_2} \psi(X_{i(k)}, X_{j(k)}) \\ &= D \langle g^K(x_1, x_2, t), \Delta_{x_1} \psi(x_1, x_2) + \Delta_{x_2} \psi(x_1, x_2) \rangle \\ T_1 &= -\frac{\mu}{2K} \sum_{k'=1}^K \nabla_{x_1} V(X_{i(k')}, X_{j(k')}) \sum_{k=1}^K \nabla_{x_1} \psi(X_{i(k)}, X_{j(k)}) \mathbb{1}_{i(k)=i(k')} + \nabla_{x_1} \psi(X_{j(k)}, X_{i(k)}) \mathbb{1}_{j(k)=i(k')} \\ &\quad - \frac{\mu}{2K} \sum_{k'=1}^K \nabla_{x_1} V(X_{j(k')}, X_{i(k')}) \sum_{k=1}^K \nabla_{x_1} \psi(X_{i(k)}, X_{j(k)}) \mathbb{1}_{i(k)=j(k')} + \nabla_{x_1} \psi(X_{j(k)}, X_{i(k)}) \mathbb{1}_{j(k)=j(k')} \\ T_2 &= -\frac{\mu}{2K} \sum_{k'=1}^K \nabla_{x_1} V(X_{i(k')}, X_{j(k')}) \sum_{k=1}^K \nabla_{x_2} \psi(X_{i(k)}, X_{j(k)}) \mathbb{1}_{i(k)=i(k')} + \nabla_{x_2} \psi(X_{j(k)}, X_{i(k)}) \mathbb{1}_{j(k)=i(k')} \\ &\quad - \frac{\mu}{2K} \sum_{k'=1}^K \nabla_{x_1} V(X_{j(k')}, X_{i(k')}) \sum_{k=1}^K \nabla_{x_2} \psi(X_{i(k)}, X_{j(k)}) \mathbb{1}_{i(k)=j(k')} + \nabla_{x_2} \psi(X_{j(k)}, X_{i(k)}) \mathbb{1}_{j(k)=j(k')} \end{aligned}$$

On introduit le nombre de liens dont l'une des extrémités est  $i(k')$  pour simplifier l'expression de la somme intérieure (sur  $k$ ) à la limite :

$$C_{i(k')} = \#\{k, i(k) = i(k') \text{ ou } j(k) = i(k')\} = \frac{K \int g^K(X_{i(k')}, y) dy}{N f^N(X_{i(k')})}$$

En notant  $P(X_{i(k')}, x) = \frac{g(X_{i(k')}, x)}{\int g(X_{i(k')}, y) dy}$ , on obtient ([1]) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{i(k')}} \sum_{k=1}^K \nabla_{x_1} \psi(X_{i(k)}, X_{j(k)}) \mathbb{1}_{i(k)=i(k')} + \nabla_{x_1} \psi(X_{j(k)}, X_{i(k)}) \mathbb{1}_{j(k)=i(k')} \\ \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 2 \int (\nabla_{x_1} \psi \cdot P)(X_{i(k')}, \cdot) \end{aligned}$$

Et puisque par hypothèse,  $C_{i(k')} = \frac{K \int g^K(X_{i(k')}, y) dy}{N f^N(X_{i(k')})} \xrightarrow{K, N \rightarrow \infty} \xi \frac{\int g(X_{i(k')}, y) dy}{f(X_{i(k')})}$ , par symétrie,

$$\lim_{K, N \rightarrow \infty} T_1 = -2\mu\xi \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k'=1}^K \nabla_{x_1} V(X_{i(k')}, X_{j(k')}) \frac{\int (\nabla_{x_1} \psi \cdot g)(X_{i(k')}, y) dy}{f(X_{i(k')})}$$

Puis en intégrant par parties et par le théorème de Fubini, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle g^K(x_1, x_2, t), \psi(x_1, x_2) \rangle &= T_0 + T_1 + T_2 \\ &= 2\mu\xi \langle \nabla_{x_1} \cdot \left( \frac{g(x_1, x_2, t)}{f(x_1, t)} \int g(x_1, \cdot, t) \nabla_{x_1} V(x_1, \cdot) \right), \psi(x_1, x_2) \rangle \\ &\quad + 2\mu\xi \langle \nabla_{x_2} \cdot \left( \frac{g(x_1, x_2, t)}{f(x_2, t)} \int g(\cdot, x_2, t) \nabla_{x_1} V(x_2, \cdot) \right), \psi(x_1, x_2) \rangle \\ &\quad + D \langle g^K(x_1, x_2, t), \Delta_{x_1} \psi(x_1, x_2) + \Delta_{x_2} \psi(x_1, x_2) \rangle \end{aligned}$$

À la limite  $K, N \rightarrow \infty$ , les probabilités de formation et de destruction de liens sont données par :

$$\frac{\nu_f}{2\xi} h(x_1, x_2, t) \mathbb{1}_{|x_1 - x_2| < R} \text{ et } \nu_d g(x_1, x_2, t)$$

Donc en incluant ces termes dans l'équation précédente, on obtient la relation pour  $g$  :

$$\begin{aligned} \partial_t g(x_1, x_2, t) &= D (\Delta_{x_1} g(x_1, x_2, t) + \Delta_{x_2} g(x_1, x_2, t)) \\ &\quad + 2\mu\xi \left( \nabla_{x_1} \cdot \left( \frac{g(x_1, x_2, t)}{f(x_1, t)} F(x_1, t) \right) + \nabla_{x_2} \cdot \left( \frac{g(x_1, x_2, t)}{f(x_2, t)} F(x_2, t) \right) \right) \\ &\quad + \frac{\nu_f}{2\xi} h(x_1, x_2, t) \mathbb{1}_{|x_1 - x_2| \leq R} - \nu_d g(x_1, x_2, t) \end{aligned}$$

Cela conclut la preuve du théorème. □

### 3.3 Normalisation du système

Dans cette partie, pour simplifier les expressions, on prendra  $D = 1$ ,  $\mu = 1$ .

Pour  $\varepsilon \ll 1$ , on effectue le changement de variables spatiales et temporelle suivant :

$$\tilde{x} = \sqrt{\varepsilon} x, \quad \tilde{t} = \varepsilon t, \quad f_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{1}{\varepsilon} f(x, t)$$

$$g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{t}) = \frac{1}{\varepsilon^2} g(x_1, x_2, t), \quad h_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{t}) = \frac{1}{\varepsilon^2} h(x_1, x_2, t)$$

On suppose en outre que le potentiel est invariant lors du changement d'échelle et que :

$$\tilde{\nu}_f = \varepsilon^2 \nu_f, \quad \tilde{\nu}_d = \varepsilon^2 \nu_d$$

Pour alléger les notations, on n'écrira la dépendance en temps que lorsqu'il y a ambiguïté.

**Théorème 3.3.** Si  $h_\varepsilon$  s'écrit  $h_\varepsilon(x_1, x_2) = f_\varepsilon(x_1)f_\varepsilon(x_2)$  et si les limites suivantes existent :

$$f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon, \quad g = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon$$

alors elles vérifient le système suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t f(x, t) &= \Delta_x f(x, t) + \frac{\nu_f}{\nu_d} \nabla_x \cdot (f(x, t) \nabla_x (\tilde{V} * f)(x, t)) \\ \partial_t g(x, y, t) &= \frac{\nu_f}{2\xi \nu_d} f(x, t) f(y, t) \mathbf{1}_{|x-y| \leq R} \end{aligned}$$

où  $\tilde{V}$  est à support compact et vérifie pour  $i = 1, 2$  :  $\nabla_i \tilde{V}(x) = U'(|x|) \mathbf{1}_{|x| \leq R} e_i$ .

*Démonstration.* Le changement d'échelle dans les équations de la sous-section précédente, en remarquant que  $\mathbf{1}_{|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2| \leq \tilde{R}} = \mathbf{1}_{|x_1 - x_2| \leq R}$  fournit :

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \partial_t g_\varepsilon &= \varepsilon^3 \left( \Delta g_\varepsilon + 2\xi \left[ \nabla_{\tilde{x}_1} \cdot \left( \frac{g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)}{f_\varepsilon(\tilde{x}_1)} F_\varepsilon(\tilde{x}_1) \right) + \nabla_{\tilde{x}_2} \cdot \left( \frac{g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)}{f_\varepsilon(\tilde{x}_2)} F_\varepsilon(\tilde{x}_2) \right) \right] \right) \\ &\quad + \varepsilon^2 \left( \frac{\nu_f}{2\xi} h_\varepsilon \mathbf{1}_{|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2| \leq \tilde{R}} - \nu_d g_\varepsilon \right) \end{aligned}$$

Donc, en comparant les ordres des différents termes, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 :

$$\frac{\nu_f}{2\xi} h_\varepsilon \mathbf{1}_{|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2| \leq \tilde{R}} - \nu_d g_\varepsilon = 0$$

Cela donne l'équation pour  $g$  en utilisant l'hypothèse faite sur  $h_\varepsilon$ . En injectant cette formule dans l'équation vérifiée par  $f_\varepsilon$ , à savoir :

$$\partial_t f_\varepsilon = \Delta_{\tilde{x}} f_\varepsilon + 2\xi \nabla_{\tilde{x}} \cdot F_\varepsilon$$

où  $F_\varepsilon(x) = \int g_\varepsilon(x, y) \nabla_{\tilde{x}} \tilde{V}(x, y) dy$ , on obtient en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 et en reprenant les notations sans tilde :

$$\partial_t f = \Delta_x f + \nabla_x \cdot F$$

avec d'après le premier résultat :

$$F(x, t) = \frac{\nu_f}{\nu_d} f(x, t) \int f(y, t) \nabla_x V(x, y) \mathbf{1}_{|x-y| \leq R} dy = \frac{\nu_f}{\nu_d} f(x, t) (\tilde{V} * f)(x, t)$$

On reconnaît alors la forme annoncée dans le théorème, ce qui termine la preuve.  $\square$

**Remarque 3.4.** L'hypothèse  $h_\varepsilon(x_1, x_2) = f_\varepsilon(x_1)f_\varepsilon(x_2)$  consiste à négliger les corrélations spatiales entre les particules. Cela est raisonnable lorsqu'une particule interagit avec un grand nombre d'autres (c'est le cas à la limite si  $\xi$  est grand). Cette hypothèse s'inscrit dans le cadre de la théorie du chaos.

### 3.4 Étude des états stationnaires constants

#### 3.4.1 Notion de stabilité

**Définition 3.5.** Un potentiel  $\tilde{V}$  est dit stable si  $\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{V} \geq 0$ . Un état stationnaire (constant)  $f_\star$  est dit stable si toute solution "tend" vers  $f_\star$  :

$$\forall f \text{ solution}, \forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \text{ compact}, \|f - f_\star\|_{\infty, K_\varepsilon} < \varepsilon$$

**Lemme 3.6.** Si  $\tilde{V}$  est intégrable, non stable, i.e.

$$M = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{V} < 0$$

alors un état stationnaire constant  $f_\star$  est non stable dès que  $f_\star > \frac{-1}{M} \frac{\nu_d}{\nu_f}$ .

*Démonstration.* La preuve passe par la linéarisation du problème autour de  $f_\star$  et par le développement de Taylor de la transformée de Fourier du "potentiel"  $\tilde{V}$ . On pourra se référer à [?].  $\square$

### 3.4.2 Cas particulier du ressort

Dans cette sous-partie, on suppose que les liens entre particules se comportent comme des ressorts entre deux points matériels mobiles :

$$V(x_1, x_2) = \frac{K}{2} (|x_1 - x_2| - l_0)^2$$

avec  $l_0 > 0$  la longueur au repos du ressort et  $K > 0$  la raideur du ressort.

$$\begin{aligned} \nabla_x V(x, y) &= K(|x - y| - l_0) \operatorname{sgn}(x - y) \\ &= K(|x - y| - l_0) \frac{x - y}{|x - y|} \end{aligned}$$

On cherche  $\tilde{V}$  à support compact comme dans le théorème ci-dessus :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \nabla_i \tilde{V}(x) = K(|x| - l_0) \mathbf{1}_{|x| \leq R} e_i$$

Par définition,  $\tilde{V}$  est constant sur les cercles de rayon fixé, donc on cherche  $\tilde{V}$  sous la forme

$$\tilde{V}(x) = U(|x|) \text{ et } U(r) = 0 \text{ si } r \geq R$$

En intégrant l'expression ci-dessus, on obtient :

$$\forall r \leq R, U(R) - U(r) = \frac{K}{2} ((R - l_0)^2 - (r - l_0)^2)$$

Puisque  $U(R) = 0$ , on déduit immédiatement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \tilde{V}(x) = \frac{K}{2} ((|x| - l_0)^2 - (R - l_0)^2) \mathbf{1}_{|x| \leq R}$$

Pour déterminer si les états stationnaires constants sont (inconditionnellement) stables, il reste donc à déterminer le signe de  $\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{V}$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{V} &= \frac{K}{2} \int_{|x| \leq R} (|x| - l_0)^2 - (R - l_0)^2 dx \\ &= \frac{K}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r - l_0)^2 - (R - l_0)^2 r dr d\theta \\ &= K\pi \int_0^R (r^2 - 2l_0 r - R^2 + 2l_0 R) r dr \\ &= K\pi R^3 \left( \frac{l_0}{3} - \frac{R}{4} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, il suffit d'imposer  $l_0 > \frac{3R}{4}$  pour assurer la stabilité d'un état stationnaire constant.

## 4 Cas de particules plongées dans un fluide

### 4.1 Présentation du problème

Dans cette partie, on s'intéresse au mouvement de particules  $d$ -dimensionnelles (en général,  $d \in \{2, 3\}$ ) similaires à celles de la partie précédente (ayant la capacité de se lier / délier avec une certaine probabilité) plongées dans un fluide vérifiant les équations de Navier-Stokes incompressible. Ainsi, le fluide porte les particules et la présence des particules dans le fluide influence l'évolution du fluide. Le système couplé particules-fluide est de la forme suivante :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \begin{cases} dX_i = u_i dt \\ mdu_i = [\eta(v(X_i(t), t) - u_i) - \mu \nabla_{X_i} W] dt + \sqrt{2D} dB_i(t) \\ \quad = [F_i - \mu \nabla_{X_i} W] dt + \sqrt{2D} dB_i(t) \\ \rho_0(\partial_t v + v \cdot \nabla_x v) - \nu \Delta_x v = -\nabla_x p - \sum_{i=1}^N F_i \delta_{X_i} \\ \nabla \cdot v = 0 \end{cases}$$

où  $X_i$  désigne la position de la particule  $i$ ,  $u_i$  sa vitesse  $m$  leur masse commune,  $D, \mu$  constantes

$B = (B_1, \dots, B_N)$  est un mouvement brownien  $dN$ -dimensionnel

$v$  est la vitesse du fluide,  $p$  la pression

$\eta$  est un coefficient de frottement propre au fluide

$\rho_0$  est la masse volumique du fluide (supposée constante),  $\nu$  sa viscosité

$W$  est donné par le potentiel  $V$  dû au lien entre deux particules :

$$W = \sum_{k=1}^K V(X_{i(k)}, X_{j(k)})$$

avec  $(X_{i(k)}, X_{j(k)})$  paire liée par le lien  $k$ , de sorte que :

$$\nabla_{X_i} W = \sum_{k=1}^K (\nabla_{x_1} V(X_{i(k)}, X_{j(k)}) \mathbb{1}_{i=i(k)} + \nabla_{x_2} V(X_{i(k)}, X_{j(k)}) \mathbb{1}_{i=j(k)})$$

Pour des raisons physiques, le système ci-dessus ne convient pas lorsque  $N$  tend vers l'infini. En effet, la masse totale des particules, ainsi que l'intensité des forces de frottement en jeu, tendront à leur tour vers l'infini, ce qui n'est pas satisfaisant. Pour éviter ce problème, on suppose que le changement de variables suivant peut-être effectué :

$$m \mapsto \frac{m}{N}, \quad \eta \mapsto \frac{\eta}{N}, \quad \mu \mapsto \frac{\mu}{N}, \quad D \mapsto \frac{D}{N^2}$$

Par conséquent, l'intensité de la force  $F_i$  est aussi divisée par  $N$ . On continuera à noter les coefficients de la même manière (sans préciser la dépendance en  $N$ ) pour faciliter les notations dans la suite.

Après simplifications, le système devient donc :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \begin{cases} dX_i = u_i dt \\ mdu_i = [\eta(v(X_i(t), t) - u_i) - \mu \nabla_{X_i} W] dt + \sqrt{2D} dB_i(t) \\ \quad = [F_i - \mu \nabla_{X_i} W] dt + \sqrt{2D} dB_i(t) \\ \rho_0(\partial_t v + v \cdot \nabla_x v) - \nu \Delta_x v = -\nabla_x p - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i \delta_{X_i} \\ \nabla \cdot v = 0 \end{cases}$$

Pour ce problème, on procède comme précédemment en introduisant les distributions de particules et de liens. Cette fois, il y a en plus une dépendance en la variable vitesse (influencée par le fluide).

$$f^N(x, u, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{(X_i(t), u_i(t))=(x, u)}$$

$$g^{K,N}(x_1, v_1, x_2, v_2, t) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^K \mathbb{1}_{(x_1, v_1, x_2, v_2) = (X_{i(k)}, u_{i(k)}, X_{j(k)}, u_{j(k)})} + \mathbb{1}_{(x_1, v_1, x_2, v_2) = (X_{j(k)}, u_{j(k)}, X_{i(k)}, u_{i(k)})}$$

$$h(x_1, v_1, x_2, v_2, t) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \mathbb{1}_{(X_i(t), u_i(t), X_j(t), u_j(t)) = (x_1, v_1, x_2, v_2)}$$

**Remarques 4.1.**

- (i) La dépendance en  $t$  des variables  $X_{i(k)}, u_{i(k)}$  est omise pour plus de clarté.
- (ii) La formule définissant  $g^{K,N}$  est symétrique en  $(x_1, v_1)$  et  $(x_2, v_2)$ .
- (iii) Notons que, à  $N$  fixé,  $K$  varie avec le temps (du fait du phénomène de formation / destruction de liens). C'est pourquoi on choisit de renormaliser  $g$  par  $N$  et non  $K$ . En particulier,  $g$  ne joue plus le rôle d'une probabilité.
- (iv) Pour ce modèle, le mouvement brownien porte sur la vitesse (la plus haute dérivée) : à tout instant, la vitesse a une composante qui la dirige dans une direction aléatoire.

**4.2 Système cinétique**

Comme précédemment, on effectuera les hypothèses d'existence de limites suivantes :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f^N = f, \quad \lim_{K, N \rightarrow \infty} g^{K,N} = g, \quad \lim_{K, N \rightarrow \infty} \frac{K}{N} = \xi$$

**Remarque 4.2.** À la limite, la somme discrète du système peut être vue comme une intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i \delta_{X_i(t)}(x) &= \int \eta(v(x, t) - u) \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_i(t)}(x) \delta_{u_i(t)}(u) \right) du \\ &= \int \eta(v(x, t) - u) f^N(x, u, t) du \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int \eta(v(x, t) - u) f(x, u, t) du \end{aligned}$$

**Théorème 4.3.** *Sous ces hypothèses d'existence, les limites vérifient :*

$$\begin{aligned} \partial_t f + \nabla_x \cdot (uf) + \eta \nabla_u \cdot ((v - u)f) &= D \Delta_u f + \frac{\mu}{m} \nabla_u \cdot F \\ \partial_t g &= \nabla_{x_1} \cdot (v_1 g) + \nabla_{x_2} \cdot (v_2 g) + D(\Delta_{v_1} g + \Delta_{v_2} g) \\ &+ \frac{\eta}{m} \nabla_{v_1} \cdot \left( (v(x_1, t) - v_1) g \right) + \frac{\eta}{m} \nabla_{v_2} \cdot \left( (v(x_2, t) - v_2) g \right) \\ &+ 2\mu \nabla_{v_1} \cdot \left( \frac{g}{f_1} F(x_1, v_1, t) \right) + 2\mu \nabla_{v_2} \cdot \left( \frac{g}{f_2} F(x_2, v_2, t) \right) \\ &+ \mu \nabla_{v_1} \cdot \left( g \nabla_{x_1} V \right) + \mu \nabla_{v_2} \cdot \left( g \nabla_{x_2} V \right) \\ &+ \frac{\nu f}{2} h(x_1, v_1, x_2, v_2, t) \mathbb{1}_{|x_1 - x_2| \leq R} - \nu_d g(x_1, v_1, x_2, v_2, t) \end{aligned}$$

où  $F : (x, u, t) \mapsto \int g(x, u, \tilde{x}, \tilde{u}, t) \nabla_{x_1} V(x, \tilde{x}) d\tilde{x} d\tilde{u}$ .

**Remarque 4.4.** Le système ci-dessus est un système couplé. Dans la suite, on cherchera à exprimer  $g$  en fonction de  $f$  pour obtenir une équation vérifiée par  $f$  indépendante de  $g$ .

*Démonstration.* Soient  $\phi$  et  $\psi$  régulières à support compact.

$$\langle f^N, \phi \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_i(t), u_i(t))$$

$$\langle g^{K,N}, \psi \rangle = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^K \psi(X_{i(k)}, u_{i(k)}, X_{j(k)}, u_{j(k)}) + \psi(X_{j(k)}, u_{j(k)}, X_{i(k)}, u_{i(k)})$$

Commençons par déterminer l'équation vérifiée par  $f^N$ . Par la formule d'Itô, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle f^N, \phi \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \partial_t \phi(X_i(t), u_i(t)) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \nabla_x \phi(X_i(t), u_i(t)) + \frac{1}{m} (F_i - \mu \nabla_{X_i} W) \nabla_u \phi(X_i(t), u_i(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{2D}^2 \Delta_u \phi(X_i(t), u_i(t)) \\ &= \langle f^N, D\Delta_u \phi + u \nabla_x \phi + \eta(v - u) \nabla_u \phi \rangle - \frac{\mu}{mN} \sum_{i=1}^N \nabla_{X_i} W \nabla_u \phi(X_i(t), u_i(t)) \end{aligned}$$

En remplaçant  $\nabla_{X_i} W$  par son expression, puis en intervertissant les sommes et en utilisant la symétrie du potentiel (cf. partie précédente) :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \nabla_{X_i} W \nabla_u \phi(X_i(t), u_i(t)) = \langle F^{K,N}, \nabla_u \phi \rangle$$

où

$$F^{K,N} : (x, u, t) \mapsto \int g^{K,N}(x, u, \tilde{x}, \tilde{u}, t) \nabla_{x_1} V(x, \tilde{x}) d\tilde{x} d\tilde{u}$$

Ainsi, en reprenant la ligne de calcul précédente et par propriétés des distributions,

$$\frac{d}{dt} \langle f^N, \phi \rangle = D \langle \Delta_u f^N, \phi \rangle - \langle \nabla_x \cdot (u f^N), \phi \rangle - \eta \langle \nabla_u \cdot ((v - u) f^N), \phi \rangle + \frac{\mu}{m} \langle \nabla_u \cdot F^{K,N}, \phi \rangle$$

Autrement dit, au sens des distributions :

$$\partial_t f^N + \nabla_x \cdot (u f^N) + \eta \nabla_u \cdot ((v - u) f^N) = D \Delta_u f^N + \frac{\mu}{m} \nabla_u \cdot F^{K,N}$$

En passant aux limites  $K, N \rightarrow \infty$ , il vient donc :

$$\boxed{\partial_t f + \nabla_x \cdot (u f) + \eta \nabla_u \cdot ((v - u) f) = D \Delta_u f + \frac{\mu}{m} \nabla_u \cdot F}$$

avec  $F : (x, u, t) \mapsto \int g(x, u, \tilde{x}, \tilde{u}, t) \nabla_{x_1} V(x, \tilde{x}) d\tilde{x} d\tilde{u}$ .

Déterminons maintenant l'équation sur  $g^{K,N}$ . Entre deux événements de formation / destruction de lien,  $K$  est constant, donc indépendant du temps. On se place sur un tel intervalle de temps.

$$\langle g^{K,N}, \psi \rangle = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^K \psi(X_{i(k)}, u_{i(k)}, X_{j(k)}, u_{j(k)}) + \psi(X_{j(k)}, u_{j(k)}, X_{i(k)}, u_{i(k)})$$

Dérivons cette expression par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} \langle g^{K,N}, \psi \rangle = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^K \partial_t \psi(X_{i(k)}, u_{i(k)}, X_{j(k)}, u_{j(k)}) + \partial_t \psi(X_{j(k)}, u_{j(k)}, X_{i(k)}, u_{i(k)})$$

Or, chacun des termes de la somme peut se réécrire (on omettra le terme  $(X_{i(k)}, u_{i(k)}, X_{j(k)}, u_{j(k)})$  d'évaluation dans le calcul suivant) :

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(X_{i(k)}, u_{i(k)}, X_{j(k)}, u_{j(k)}) &= u_{i(k)} \nabla_{x_1} \psi + u_{j(k)} \nabla_{x_2} \psi + D(\Delta_{v_1} \psi + \Delta_{v_2} \psi) \\ &\quad + \frac{1}{m} (\eta(V(X_{i(k)}(t), t) - u_{i(k)}) - \mu \nabla_{X_{i(k)}} W) \nabla_{v_1} \psi \\ &\quad + \frac{1}{m} (\eta(V(X_{j(k)}(t), t) - u_{j(k)}) - \mu \nabla_{X_{j(k)}} W) \nabla_{v_2} \psi \end{aligned}$$

De là, en reprenant le calcul de dérivée temporelle,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle g^{K,N}, \psi \rangle &= \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^K \left[ u_{i(k)} \nabla_{x_1} \psi + u_{j(k)} \nabla_{x_2} \psi + D(\Delta_{v_1} \psi + \Delta_{v_2} \psi) \right. \\
&\quad + \frac{1}{m} (\eta(V(X_{i(k)}(t), t) - u_{i(k)}) - \mu \nabla_{X_{i(k)}} W) \nabla_{v_1} \psi \\
&\quad \left. + \frac{1}{m} (\eta(V(X_{j(k)}(t), t) - u_{j(k)}) - \mu \nabla_{X_{j(k)}} W) \nabla_{v_2} \psi \right] \\
&+ \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^K \left[ u_{j(k)} \nabla_{x_1} \psi + u_{i(k)} \nabla_{x_2} \psi + D(\Delta_{v_1} \psi + \Delta_{v_2} \psi) \right. \\
&\quad + \frac{1}{m} (\eta(V(X_{j(k)}(t), t) - u_{j(k)}) - \mu \nabla_{X_{j(k)}} W) \nabla_{v_1} \psi \\
&\quad \left. + \frac{1}{m} (\eta(V(X_{i(k)}(t), t) - u_{i(k)}) - \mu \nabla_{X_{i(k)}} W) \nabla_{v_2} \psi \right]
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, la première somme est évaluée en  $(X_{i(k)}, u_{i(k)}, X_{j(k)}, u_{j(k)})$ , alors que la seconde est en  $(X_{j(k)}, u_{j(k)}, X_{i(k)}, u_{i(k)})$ . On ne peut donc pas regrouper les deux sommes "facilement", mais on peut reconnaître la forme de  $g^{K,N}$ .

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle g^{K,N}, \psi \rangle &= \langle g^{K,N}, v_1 \nabla_{x_1} \psi + v_2 \nabla_{x_2} \psi + D(\Delta_{v_1} \psi + \Delta_{v_2} \psi) \rangle \\
&\quad + \langle g^{K,N}, \frac{1}{m} (\eta(v(x_1, t) - v_1) - \mu \theta(x_1)) \nabla_{v_1} \psi \rangle \\
&\quad + \langle g^{K,N}, \frac{1}{m} (\eta(v(x_2, t) - v_2) - \mu \theta(x_2)) \nabla_{v_2} \psi \rangle
\end{aligned}$$

où l'on a posé  $\theta : x \mapsto \nabla_x W$ . Les termes à déterminer sont ceux faisant apparaître  $\theta$ . En intervertissant les deux sommes (cf. expression de  $W$ ) et en utilisant la symétrie de  $V$ , il vient pour le premier terme :

$$\begin{aligned}
\langle g^{K,N}, \theta(x_1) \nabla_{v_1} \psi \rangle &= \frac{1}{2N} \sum_{k'=1}^K \nabla_{x_1} V(X_{i(k')}, X_{j(k')}) \sum_{k=1}^K \left[ \nabla_{v_1} \psi(X_{i(k)}, u_{i(k)}, X_{j(k)}, u_{j(k)}) \mathbb{1}_{i(k)=i(k')} \right. \\
&\quad \left. + \nabla_{v_1} \psi(X_{j(k)}, u_{j(k)}, X_{i(k)}, u_{i(k)}) \mathbb{1}_{j(k)=i(k')} \right] \\
&+ \frac{1}{2N} \sum_{k'=1}^K \nabla_{x_1} V(X_{j(k')}, X_{i(k')}) \sum_{k=1}^K \left[ \nabla_{v_1} \psi(X_{i(k)}, u_{i(k)}, X_{j(k)}, u_{j(k)}) \mathbb{1}_{i(k)=j(k')} \right. \\
&\quad \left. + \nabla_{v_1} \psi(X_{j(k)}, u_{j(k)}, X_{i(k)}, u_{i(k)}) \mathbb{1}_{j(k)=j(k')} \right]
\end{aligned}$$

On introduit le nombre de liens dont l'une des extrémités est  $i(k')$  pour simplifier l'expression des sommes intérieures (sur  $k$ ) à la limite :

$$C_{i(k')} = \#\{k, i(k) = i(k') \text{ ou } j(k) = i(k')\} = \frac{\int g^{K,N}(X_{i(k')}, u_{i(k')}, x, u) dx du}{f^N(X_{i(k')}, u_{i(k')})}$$

Remarquons que le nombre de liens entre deux événements de formation / destruction est constant, donc la quantité ci-dessus aussi, c'est pourquoi la notation (allégée) ne laisse pas apparaître la dépendance en temps. Remarquons aussi que chacune des sommes intérieures a un terme toujours non nul, celui en  $k'$ . L'étude sera

menée séparément pour celui-ci :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \left[ \nabla_{v_1} \psi(X_{i(k)}, u_{i(k)}, X_{j(k)}, u_{j(k)}) \mathbb{1}_{i(k)=i(k')} + \nabla_{v_1} \psi(X_{j(k)}, u_{j(k)}, X_{i(k)}, u_{i(k)}) \mathbb{1}_{j(k)=i(k')} \right] \\ &= \sum_{k \neq k'} \left[ \nabla_{v_1} \psi(X_{i(k)}, u_{i(k)}, X_{j(k)}, u_{j(k)}) \mathbb{1}_{i(k)=i(k')} + \nabla_{v_1} \psi(X_{j(k)}, u_{j(k)}, X_{i(k)}, u_{i(k)}) \mathbb{1}_{j(k)=i(k')} \right] \\ & \quad + \nabla_{v_1} \psi(X_{i(k')}, u_{i(k')}, X_{j(k')}, u_{j(k')}) \end{aligned}$$

En adoptant la notation suivante (vue comme une probabilité conditionnelle),

$$P(X_{i(k')}, u_{i(k')}, x, u) = \frac{g(X_{i(k')}, u_{i(k')}, x, u)}{\int g(X_{i(k')}, u_{i(k')}, \tilde{x}, \tilde{u}) d\tilde{x}d\tilde{u}}$$

il vient à la limite pour chaque  $k'$  (admis) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_{i(k')}} \sum_{k \neq k'} \nabla_{v_1} \psi(X_{i(k)}, u_{i(k)}, X_{j(k)}, u_{j(k)}) \mathbb{1}_{i(k)=i(k')} + \nabla_{v_1} \psi(X_{j(k)}, u_{j(k)}, X_{i(k)}, u_{i(k)}) \mathbb{1}_{j(k)=i(k')} \\ & \xrightarrow{K, N \rightarrow \infty} 2 \int (\nabla_{v_1} \psi \cdot P)(X_{i(k')}, u_{i(k')}, \cdot, \cdot) \end{aligned}$$

Et puisque par hypothèse,

$$C_{i(k')} = \frac{\int g^{K, N}(X_{i(k')}, u_{i(k')}, x, u) dx du}{f^N(X_{i(k')}, u_{i(k')})} \xrightarrow{K, N \rightarrow \infty} \frac{\int g(X_{i(k')}, u_{i(k')}, x, u) dx du}{f(X_{i(k')}, u_{i(k')})}$$

il vient immédiatement, par produit de limites :

$$C_{i(k')} P(X_{i(k')}, u_{i(k')}, x, u) \xrightarrow{K, N \rightarrow \infty} \frac{g(X_{i(k')}, u_{i(k')}, x, u)}{f(X_{i(k')}, u_{i(k')})}$$

De là, par les quelques étapes intermédiaires détaillées ci-dessus,

$$\begin{aligned} & \sum_{k \neq k'} \left[ \nabla_{v_1} \psi(X_{i(k)}, u_{i(k)}, X_{j(k)}, u_{j(k)}) \mathbb{1}_{i(k)=i(k')} + \nabla_{v_1} \psi(X_{j(k)}, u_{j(k)}, X_{i(k)}, u_{i(k)}) \mathbb{1}_{j(k)=i(k')} \right] \\ & \xrightarrow{K, N \rightarrow \infty} \frac{2}{f(X_{i(k')}, u_{i(k')})} \int (\nabla_{v_1} \psi \cdot g)(X_{i(k')}, u_{i(k')}, \tilde{x}, \tilde{u}) d\tilde{x}d\tilde{u} \end{aligned}$$

Reprenons maintenant le calcul de  $\langle g^{K, N}, \theta(x_1) \nabla_{v_1} \psi \rangle$  en rajoutant le terme (déterministe) isolé (celui de  $\langle g^{K, N}, \theta(x_2) \nabla_{v_2} \psi \rangle$  est similaire) :

$$\begin{aligned} \langle g^{K, N}, \theta(x_1) \nabla_{v_1} \psi \rangle &= \frac{1}{2N} \sum_{k'=1}^K \nabla_{v_1} \psi(X_{i(k')}, u_{i(k')}, X_{j(k')}, u_{j(k')}) \nabla_{x_1} V(X_{i(k')}, X_{j(k')}) \\ & \quad + \frac{1}{2N} \sum_{k'=1}^K \nabla_{v_1} \psi(X_{j(k')}, u_{j(k')}, X_{i(k')}, u_{i(k')}) \nabla_{x_1} V(X_{j(k')}, X_{i(k')}) \\ & \quad + \frac{1}{2N} \sum_{k'=1}^K \nabla_{x_1} V(X_{i(k')}, X_{j(k')}) \sum_{k \neq k'} \left[ \nabla_{v_1} \psi(X_{i(k)}, u_{i(k)}, X_{j(k)}, u_{j(k)}) \mathbb{1}_{i(k)=i(k')} \right. \\ & \quad \quad \quad \left. + \nabla_{v_1} \psi(X_{j(k)}, u_{j(k)}, X_{i(k)}, u_{i(k)}) \mathbb{1}_{j(k)=i(k')} \right] \\ & \quad + \frac{1}{2N} \sum_{k'=1}^K \nabla_{x_1} V(X_{i(k')}, X_{j(k')}) \sum_{k \neq k'} \left[ \nabla_{v_1} \psi(X_{i(k)}, u_{i(k)}, X_{j(k)}, u_{j(k)}) \mathbb{1}_{i(k)=j(k')} \right. \\ & \quad \quad \quad \left. + \nabla_{v_1} \psi(X_{j(k)}, u_{j(k)}, X_{i(k)}, u_{i(k)}) \mathbb{1}_{j(k)=j(k')} \right] \end{aligned}$$

En passant à la limite (voir calculs précédents), on reconnaît l'expression de  $g$  :

$$\begin{aligned}\langle g, \theta(x_1) \nabla_{v_1} \psi \rangle &= \lim_{K, N \rightarrow \infty} \langle g^{K, N}, \theta(x_1) \nabla_{v_1} \psi \rangle \\ &= \langle g, \nabla_{x_1} V \nabla_{v_1} \psi \rangle + 2 \langle g, \frac{\nabla_{x_1} V(x_1, x_2)}{f(x_1, v_1)} \int (\nabla_{v_1} \psi \cdot g)(x_1, v_1, \tilde{x}, \tilde{v}) d\tilde{x} d\tilde{v} \rangle\end{aligned}$$

Le terme en  $\theta(x_2)$  est calculé de manière similaire. Reprenons maintenant le calcul de dérivée temporelle :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle g^{K, N}, \psi \rangle &= \langle g^{K, N}, v_1 \nabla_{x_1} \psi + v_2 \nabla_{x_2} \psi + D(\Delta_{v_1} \psi + \Delta_{v_2} \psi) \rangle \\ &\quad + \langle g^{K, N}, \frac{1}{m} (\eta(v(x_1, t) - v_1) - \mu \theta(x_1)) \nabla_{v_1} \psi \rangle \\ &\quad + \langle g^{K, N}, \frac{1}{m} (\eta(v(x_2, t) - v_2) - \mu \theta(x_2)) \nabla_{v_2} \psi \rangle\end{aligned}$$

En intégrant par parties et par le théorème de Fubini, il vient à la limite  $K, N \rightarrow \infty$  :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle g, \psi \rangle &= \langle \nabla_{x_1} \cdot (v_1 g), \psi \rangle + \langle \nabla_{x_2} \cdot (v_2 g), \psi \rangle + D \langle (\Delta_{v_1} g + \Delta_{v_2} g), \psi \rangle \\ &\quad + \frac{\eta}{m} \langle \nabla_{v_1} \cdot \left( (v(x_1, t) - v_1) g \right), \psi \rangle + \frac{\eta}{m} \langle \nabla_{v_2} \cdot \left( (v(x_2, t) - v_2) g \right), \psi \rangle \\ &\quad + 2\mu \langle \nabla_{v_1} \cdot \left( \frac{g(x_1, v_1, x_2, v_2, t)}{f(x_1, v_1, t)} \int g(x_1, v_1, \tilde{x}, \tilde{u}, t) \nabla_{x_1} V(x_1, \tilde{x}) d\tilde{x} d\tilde{u} \right), \psi \rangle \\ &\quad + 2\mu \langle \nabla_{v_2} \cdot \left( \frac{g(x_1, v_1, x_2, v_2, t)}{f(x_2, v_2, t)} \int g(\tilde{x}, \tilde{u}, x_2, v_2, t) \nabla_{x_2} V(\tilde{x}, x_2) d\tilde{x} d\tilde{u} \right), \psi \rangle \\ &\quad + \mu \langle \nabla_{v_1} \cdot \left( g \nabla_{x_1} V \right), \psi \rangle + \mu \langle \nabla_{v_2} \cdot \left( g \nabla_{x_2} V \right), \psi \rangle\end{aligned}$$

En posant comme précédemment  $F$  pour l'intégrale présente, par symétrie du potentiel  $V$  et de la distribution  $g$ , il vient :

$$\begin{aligned}\partial_t g &= \nabla_{x_1} \cdot (v_1 g) + \nabla_{x_2} \cdot (v_2 g) + D(\Delta_{v_1} g + \Delta_{v_2} g) \\ &\quad + \frac{\eta}{m} \nabla_{v_1} \cdot \left( (v(x_1, t) - v_1) g \right) + \frac{\eta}{m} \nabla_{v_2} \cdot \left( (v(x_2, t) - v_2) g \right) \\ &\quad + 2\mu \nabla_{v_1} \cdot \left( \frac{g}{f_1} F(x_1, v_1, t) \right) + 2\mu \nabla_{v_2} \cdot \left( \frac{g}{f_2} F(x_2, v_2, t) \right) \\ &\quad + \mu \nabla_{v_1} \cdot \left( g \nabla_{x_1} V \right) + \mu \nabla_{v_2} \cdot \left( g \nabla_{x_2} V \right)\end{aligned}$$

où l'on a posé  $f_i : (x_1, v_1, x_2, v_2, t) \mapsto f(x_i, v_i, t)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .

À la limite  $K, N \rightarrow \infty$ , les probabilités de formation et de destruction de liens entre deux particules sont données par :

$$\frac{\nu f}{2} h(x_1, v_1, x_2, v_2, t) \mathbb{1}_{|x_1 - x_2| < R} \text{ et } \nu_d g(x_1, v_1, x_2, v_2, t)$$

Donc en incluant ces termes dans l'équation précédente, on obtient la relation pour  $g$  :

$$\begin{aligned}\partial_t g &= \nabla_{x_1} \cdot (v_1 g) + \nabla_{x_2} \cdot (v_2 g) + D(\Delta_{v_1} g + \Delta_{v_2} g) \\ &\quad + \frac{\eta}{m} \nabla_{v_1} \cdot \left( (v(x_1, t) - v_1) g \right) + \frac{\eta}{m} \nabla_{v_2} \cdot \left( (v(x_2, t) - v_2) g \right) \\ &\quad + 2\mu \nabla_{v_1} \cdot \left( \frac{g}{f_1} F(x_1, v_1, t) \right) + 2\mu \nabla_{v_2} \cdot \left( \frac{g}{f_2} F(x_2, v_2, t) \right) \\ &\quad + \mu \nabla_{v_1} \cdot \left( g \nabla_{x_1} V \right) + \mu \nabla_{v_2} \cdot \left( g \nabla_{x_2} V \right) \\ &\quad + \frac{\nu f}{2} h(x_1, v_1, x_2, v_2, t) \mathbb{1}_{|x_1 - x_2| \leq R} - \nu_d g(x_1, v_1, x_2, v_2, t)\end{aligned}$$

Cela conclut la preuve du théorème. □

### 4.3 Changement d'échelle

Pour  $\varepsilon \ll 1$ , on effectue le changement de variables spatiale et temporelle suivant :

$$\tilde{x} = \varepsilon x, \quad \tilde{t} = \varepsilon t, \quad \tilde{v} = v, \quad f_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{t}) = f(x, v, t)$$

$$g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) = g(x_1, v_1, x_2, v_2, t), \quad h_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) = h(x_1, v_1, x_2, v_2, t)$$

On suppose que le potentiel est invariant lors du changement d'échelle et que les coefficients caractéristiques du système subissent les changements suivants :

$$\mu_\varepsilon = \varepsilon^{-d} \mu, \quad \eta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \eta, \quad D_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} D$$

On suppose de plus que les éléments ci-dessus admettent des limites lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  (au sens faible pour les distributions  $f$  et  $g$ ) :

$$f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f_0, \quad g_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} g_0, \quad \mu_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_0, \quad \eta_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_0, \quad D_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} D_0$$

Comme dans la partie précédente, on fait l'hypothèse suivante de séparation des variables (justifiée par le grand nombre d'interactions entre particules) :

$$h(x, u, y, w, t) = f(x, u, t) f(y, w, t)$$

**Théorème 4.5.** *Sous ces hypothèses, le système final s'écrit :*

$$\begin{cases} \partial_t f_0 + \nabla_x \cdot (u f_0) + \eta_0 \nabla_u \cdot ((v - u) f_0) = D_0 \Delta_u f_0 + \frac{\mu_0}{m} \frac{\nu_f}{2\nu_d} \nabla_u \cdot F_0 \\ \rho_0 (\partial_t v + v \cdot \nabla_x v) - \nu_0 \Delta_x v = -\nabla_x p - \int \eta_0 (v(x, t) - u) f_0(x, u, t) du \\ \nabla \cdot v = 0 \end{cases}$$

où  $F_0 : (x, u, t) \mapsto f_0(x, u, t) \int f_0(y, w, t) \nabla_{x_1} V(x, y) dy dw$

*Démonstration.* Rappelons le système sur les distributions de particules et de liens :

$$\begin{aligned} \partial_t f + \nabla_x \cdot (u f) + \eta \nabla_u \cdot ((v - u) f) &= D \Delta_u f + \frac{\mu}{m} \nabla_u \cdot F \\ \partial_t g &= \nabla_{x_1} \cdot (v_1 g) + \nabla_{x_2} \cdot (v_2 g) + D(\Delta_{v_1} g + \Delta_{v_2} g) \\ &+ \frac{\eta}{m} \nabla_{v_1} \cdot \left( (v(x_1, t) - v_1) g \right) + \frac{\eta}{m} \nabla_{v_2} \cdot \left( (v(x_2, t) - v_2) g \right) \\ &+ 2\mu \nabla_{v_1} \cdot \left( \frac{g}{f_1} F(x_1, v_1, t) \right) + 2\mu \nabla_{v_2} \cdot \left( \frac{g}{f_2} F(x_2, v_2, t) \right) \\ &+ \mu \nabla_{v_1} \cdot \left( g \nabla_{x_1} V \right) + \mu \nabla_{v_2} \cdot \left( g \nabla_{x_2} V \right) \\ &+ \frac{\nu_f}{2} h(x_1, v_1, x_2, v_2, t) \mathbb{1}_{|x_1 - x_2| \leq R} - \nu_d g(x_1, v_1, x_2, v_2, t) \end{aligned}$$

avec  $F : (x, u, t) \mapsto \int g(x, u, \tilde{x}, \tilde{u}, t) \nabla_{x_1} V(x, \tilde{x}) d\tilde{x} d\tilde{u}$ ,  $f_i : (x_1, v_1, x_2, v_2, t) \mapsto f(x_i, v_i, t)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .

Si l'on réécrit le système précédent selon ces coordonnées, il vient pour les différents termes :

$$\partial_t f = \varepsilon \partial_{\tilde{t}} (f_\varepsilon) = \varepsilon \partial_{\tilde{t}} f_\varepsilon$$

$$\nabla_x \cdot (u f) = \varepsilon \nabla_{\tilde{x}} \cdot \left( \tilde{u} f_\varepsilon \right) = \varepsilon \nabla_{\tilde{x}} \left( \tilde{u} f_\varepsilon \right)$$

$$\eta \nabla_u \cdot \left( (v - u)f \right) = \varepsilon \eta_\varepsilon \nabla_{\tilde{u}} \cdot \left( (\tilde{v} - \tilde{u})f_\varepsilon \right) = \varepsilon \nabla_{\tilde{u}} \cdot \left( (\tilde{v} - \tilde{u})f_\varepsilon \right)$$

$$D\Delta_u f = \varepsilon D_\varepsilon \Delta_{\tilde{u}} f_\varepsilon = \varepsilon \Delta_{\tilde{u}} f_\varepsilon$$

$$\begin{aligned} F(x_1, u_1, t) &= \int g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{u}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}_2, \tilde{t}) \varepsilon \nabla_{\tilde{x}_1} V(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \frac{1}{\varepsilon^d} d\tilde{x}_2 d\tilde{u}_2 \\ &= \varepsilon^{1-d} \int g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{u}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}_2, \tilde{t}) \nabla_{\tilde{x}_1} V(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_2 d\tilde{u}_2 \end{aligned}$$

Posons pour faciliter l'écriture  $F_\varepsilon : (\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{t}) \mapsto \int g_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{u}, y, w, \tilde{t}) \nabla_{\tilde{x}_1} V(\tilde{x}, y) dy dw$ .

$$\mu \nabla_u \cdot F = \varepsilon^d \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{u}} \cdot \varepsilon^{1-d} F_\varepsilon = \varepsilon \nabla_{\tilde{u}} \cdot F_\varepsilon$$

Si l'on suppose de plus que les limites suivantes existent :

$$\mu_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_0, \quad \eta_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_0, \quad D_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} D_0$$

alors par hypothèse, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$\partial_t f_0 + \nabla_x \cdot (u f_0) + \eta_0 \nabla_u \cdot ((v - u) f_0) = D_0 \Delta_u f_0 + \frac{\mu_0}{m} \nabla_u \cdot F_0$$

avec  $F_0 : (x, u, t) \mapsto \int g_0(x, u, y, w, t) \nabla_{x_1} V(x, y) dy dw$ .

Effectuons le même raisonnement pour l'équation portant sur la distribution de liens  $g$ .

$$\partial_t g = \varepsilon \partial_{\tilde{t}} g_\varepsilon = \varepsilon \partial_{\tilde{t}} g_\varepsilon$$

$$\nabla_{x_i} \cdot \left( v_i g \right) = \varepsilon \nabla_{\tilde{x}_i} \cdot \left( \tilde{v}_i g_\varepsilon \right) = \varepsilon \nabla_{\tilde{x}_i} \cdot \left( v_i g_\varepsilon \right)$$

$$D\Delta_{v_i} g = \varepsilon D_\varepsilon \Delta_{\tilde{v}_i} g_\varepsilon = \varepsilon D_\varepsilon \Delta_{\tilde{v}_i} g_\varepsilon$$

$$\eta \nabla_{v_i} \cdot \left( (v - v_i) g \right) = \varepsilon \eta_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot \left( (\tilde{v} - \tilde{v}_i) g_\varepsilon \right) = \varepsilon \eta_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot \left( (\tilde{v} - \tilde{v}_i) g_\varepsilon \right)$$

$$\begin{aligned} \mu \nabla_{v_i} \cdot \left( \frac{g}{f_i} F(x_i, v_i, t) \right) &= \varepsilon^d \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot \left( \frac{g_\varepsilon}{f_{i,\varepsilon}} \varepsilon^{1-d} F_\varepsilon(\tilde{x}_i, \tilde{v}_i, \tilde{t}) \right) \\ &= \varepsilon \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot \left( \frac{g_\varepsilon}{f_{i,\varepsilon}} F_\varepsilon(\tilde{x}_i, \tilde{v}_i, \tilde{t}) \right) \end{aligned}$$

où l'on a posé  $f_{i,\varepsilon} : (x_1, v_1, x_2, v_2, t) \mapsto f_\varepsilon(x_i, v_i, t)$ . Enfin, le dernier terme se réécrit :

$$\mu \nabla_{v_i} \cdot \left( g \nabla_{x_i} V \right) = \varepsilon^d \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot \left( g_\varepsilon \varepsilon \nabla_{\tilde{x}_i} V \right) = \varepsilon^{1+d} \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot \left( g_\varepsilon \nabla_{\tilde{x}_i} V \right)$$

Les termes de formation et de destruction de liens peuvent aussi s'écrire :

$$\nu_f h(x_1, v_1, x_2, v_2, t) = \tilde{\nu}_f h_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) \text{ et } \nu_d g(x_1, v_1, x_2, v_2, t) = \tilde{\nu}_d g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t})$$

En remarquant que  $\mathbb{1}_{|x_1 - x_2| \leq R} = \mathbb{1}_{|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2| \leq \tilde{R}}$ , l'équation sur la distribution de liens  $g$  devient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon \partial_{\tilde{t}} g_\varepsilon &= \varepsilon \nabla_{\tilde{x}_1} \cdot \left( v_1 g_\varepsilon \right) + \varepsilon \nabla_{\tilde{x}_2} \cdot \left( v_2 g_\varepsilon \right) + \varepsilon D_\varepsilon \left( \Delta_{\tilde{v}_1} g_\varepsilon + \Delta_{\tilde{v}_2} g_\varepsilon \right) \\
&+ \frac{\eta_\varepsilon}{m} \varepsilon \nabla_{\tilde{v}_1} \cdot \left( (\tilde{v}(\tilde{x}_1, t) - \tilde{v}_1) g_\varepsilon \right) + \frac{\eta_\varepsilon}{m} \varepsilon \nabla_{\tilde{v}_2} \cdot \left( (\tilde{v}(\tilde{x}_2, t) - \tilde{v}_2) g_\varepsilon \right) \\
&+ 2\varepsilon \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_1} \cdot \left( \frac{g_\varepsilon}{f_{1,\varepsilon}} F_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{t}) \right) + 2\varepsilon \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_2} \cdot \left( \frac{g_\varepsilon}{f_{2,\varepsilon}} F_\varepsilon(\tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) \right) \\
&+ \varepsilon^{1+d} \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_1} \cdot \left( g_\varepsilon \nabla_{\tilde{x}_1} V \right) + \varepsilon^{1+d} \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_2} \cdot \left( g_\varepsilon \nabla_{\tilde{x}_2} V \right) \\
&+ \frac{\nu_f}{2} h_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) \mathbb{1}_{|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2| \leq \tilde{R}} - \nu_d g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t})
\end{aligned}$$

Or  $d \in \mathbb{N}$  (dimension dans le cadre de travail), donc il s'ensuit :

$$\frac{\nu_f}{2} h_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) \mathbb{1}_{|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2| \leq \tilde{R}} - \nu_d g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) = O(\varepsilon)$$

De plus, l'hypothèse  $h_\varepsilon(x, u, y, w, t) = f_\varepsilon(x, u, t) f_\varepsilon(y, w, t)$  permet de réécrire l'équation précédente :

$$\frac{\nu_f}{2} f_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{t}) f_\varepsilon(\tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) \mathbb{1}_{|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2| \leq \tilde{R}} - \nu_d g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) = O(\varepsilon)$$

En passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , l'expression ci-dessus permet de relier les quantités limites  $f_0$  et  $g_0$  (sous l'hypothèse de "non-corrélation") :

$$g_0(x, u, y, w, t) = \frac{\nu_f}{2\nu_d} f_0(x, u, t) f_0(y, w, t)$$

En injectant maintenant cette expression dans l'équation vérifiée par  $f_0$ , il n'y a plus dépendance en  $g_0$  :

$$\partial_t f_0 + \nabla_x \cdot (u f_0) + \eta \nabla_u \cdot ((v - u) f_0) = D \Delta_u f_0 + \frac{\mu}{m} \frac{\nu_f}{2\nu_d} \nabla_u \cdot \left( f_0(x, u, t) \int f_0(y, w, t) \nabla_{x_1} V(x, y) dy dw \right)$$

Intéressons-nous maintenant au reste des équations et à leur comportement lors de ce changement d'échelle :

$$\begin{cases} \rho_0(\partial_t v + v \cdot \nabla_x v) - \nu \Delta_x v = -\nabla_x p - \int \eta(v(x, t) - u) f(x, u, t) du \\ \nabla \cdot v = 0 \end{cases}$$

Considérons l'impact du changement d'échelle sur chacun des termes en jeu dans la première équation (la seconde reste inchangée en simplifiant par  $\varepsilon$ ) :

$$\partial_t v = \varepsilon \partial_{\tilde{t}} \tilde{v} \text{ et } v \cdot \nabla_x v = \varepsilon \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{v}$$

Quitte à supposer que la viscosité évolue en  $\nu_\varepsilon = \varepsilon \nu$  lors du changement d'échelle,

$$\nu \Delta_x v = \frac{1}{\varepsilon} \nu_\varepsilon \varepsilon^2 \Delta_{\tilde{x}} \tilde{v} = \varepsilon \nu_\varepsilon \Delta_{\tilde{x}} \tilde{v}$$

$$\nabla_x p = \varepsilon \nabla_{\tilde{x}} \tilde{p}$$

$$\int \eta(v(x, t) - u) f(x, u, t) du = \varepsilon \int \eta_\varepsilon(\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{t}) - \tilde{u}) f_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{t}) d\tilde{u}$$

De là, en reprenant des notations sans tilde, en simplifiant par  $\varepsilon$  puis en passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , si  $\nu_\varepsilon \rightarrow \nu_0$ ,

$$\begin{cases} \rho_0(\partial_t v + v \cdot \nabla_x v) - \nu_0 \Delta_x v = -\nabla_x p - \int \eta_0(v(x, t) - u) f_0(x, u, t) du \\ \nabla \cdot v = 0 \end{cases}$$

Cela conclut la preuve. Le système final s'écrit donc :

$$\begin{cases} \partial_t f_0 + \nabla_x \cdot (u f_0) + \eta_0 \nabla_u \cdot ((v - u) f_0) = D_0 \Delta_u f_0 + \frac{\mu_0}{m} \frac{\nu_f}{2\nu_d} \nabla_u \cdot F_0 \\ \rho_0(\partial_t v + v \cdot \nabla_x v) - \nu_0 \Delta_x v = -\nabla_x p - \int \eta_0(v(x, t) - u) f_0(x, u, t) du \\ \nabla \cdot v = 0 \end{cases}$$

où  $F_0 : (x, u, t) \mapsto f_0(x, u, t) \int f_0(y, w, t) \nabla_{x_1} V(x, y) dy dw$ . □

# A Changement d'échelle : tentatives infructueuses

## A.1 Tentative infructueuse 1

Rappelons le système sur les distributions de particules et de liens :

$$\begin{aligned} \partial_t f + \nabla_x \cdot (uf) + \eta \nabla_u \cdot ((v-u)f) &= D\Delta_u f + \frac{\mu}{m} \nabla_u \cdot F \\ \partial_t g &= \nabla_{x_1} \cdot (v_1 g) + \nabla_{x_2} \cdot (v_2 g) + D(\Delta_{v_1} g + \Delta_{v_2} g) \\ &+ \frac{\eta}{m} \nabla_{v_1} \cdot \left( (v(x_1, t) - v_1) g \right) + \frac{\eta}{m} \nabla_{v_2} \cdot \left( (v(x_2, t) - v_2) g \right) \\ &+ 2\mu \nabla_{v_1} \cdot \left( \frac{g}{f_1} F(x_1, v_1, t) \right) + 2\mu \nabla_{v_2} \cdot \left( \frac{g}{f_2} F(x_2, v_2, t) \right) \\ &+ \mu \nabla_{v_1} \cdot \left( g \nabla_{x_1} V \right) + \mu \nabla_{v_2} \cdot \left( g \nabla_{x_2} V \right) \\ &+ \frac{\nu f}{2} h(x_1, v_1, x_2, v_2, t) \mathbb{1}_{|x_1 - x_2| \leq R} - \nu_d g(x_1, v_1, x_2, v_2, t) \end{aligned}$$

avec  $F : (x, u, t) \mapsto \int g(x, u, \tilde{x}, \tilde{u}, t) \nabla_{x_1} V(x, \tilde{x}) d\tilde{x} d\tilde{u}$ ,  $f_i : (x_1, v_1, x_2, v_2, t) \mapsto f(x_i, v_i, t)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .

Pour  $\varepsilon \ll 1$ , on effectue le changement de variables spatiale et temporelle suivant :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \varepsilon^{\frac{1}{d}} x, \quad \tilde{t} = \varepsilon t, \quad \tilde{v} = \varepsilon^{\frac{1}{d}-1} v, \quad f_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{t}) = \frac{1}{\varepsilon} f(x, v, t) \\ g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) &= \frac{1}{\varepsilon^2} g(x_1, v_1, x_2, v_2, t), \quad h_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) = \frac{1}{\varepsilon^2} h(x_1, v_1, x_2, v_2, t) \end{aligned}$$

où  $d$  est la dimension de l'espace de travail (2 ou 3 en général).

On suppose en outre que le potentiel est invariant lors du changement d'échelle et que les coefficients caractéristiques du fluide et les probabilités de formation et destruction de liens subissent les changements suivants :

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_f &= \varepsilon^2 \nu_f, \quad \tilde{\nu}_d = \varepsilon^2 \nu_d \\ \mu_\varepsilon &= \varepsilon^{d+\frac{2}{d}-3} \mu, \quad \eta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \eta, \quad D_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{2}{d}-3} D \end{aligned}$$

Si l'on réécrit le système précédent selon ces coordonnées, il vient pour les différents termes :

$$\begin{aligned} \partial_t f &= \varepsilon \partial_{\tilde{t}} (\varepsilon f_\varepsilon) = \varepsilon^2 \partial_{\tilde{t}} f_\varepsilon \\ \nabla_x \cdot (uf) &= \varepsilon^{\frac{1}{d}} \nabla_{\tilde{x}} \cdot \left( \varepsilon^{1-\frac{1}{d}} \tilde{u} \varepsilon f_\varepsilon \right) = \varepsilon^2 \nabla_{\tilde{x}} \cdot \left( \tilde{u} f_\varepsilon \right) \\ \eta \nabla_u \cdot ((v-u)f) &= \varepsilon \eta_\varepsilon \varepsilon^{\frac{1}{d}-1} \nabla_{\tilde{u}} \cdot \left( \varepsilon^{1-\frac{1}{d}} (\tilde{v} - \tilde{u}) \varepsilon f_\varepsilon \right) = \varepsilon^2 \nabla_{\tilde{u}} \cdot \left( (\tilde{v} - \tilde{u}) f_\varepsilon \right) \\ D\Delta_u f &= \varepsilon^{3-\frac{2}{d}} D_\varepsilon \varepsilon^{\frac{2}{d}-2} \Delta_{\tilde{u}} \varepsilon f_\varepsilon = \varepsilon^2 \Delta_{\tilde{u}} f_\varepsilon \end{aligned}$$

Le dernier terme est déterminé dans les lignes qui suivent :

$$\begin{aligned} F(x_1, u_1, t) &= \int \varepsilon^2 g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{u}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}_2, \tilde{t}) \varepsilon^{\frac{1}{d}} \nabla_{\tilde{x}_1} V(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \frac{1}{\varepsilon} d\tilde{x}_2 \varepsilon^{d-1} d\tilde{u}_2 \\ &= \varepsilon^{d+\frac{1}{d}} \int g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{u}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}_2, \tilde{t}) \nabla_{\tilde{x}_1} V(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_2 d\tilde{u}_2 \end{aligned}$$

Posons pour faciliter l'écriture  $F_\varepsilon : (\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{t}) \mapsto \int g_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{u}, y, w, \tilde{t}) \nabla_{\tilde{x}_1} V(\tilde{x}, y) dy dw$ .

$$\mu \nabla_u \cdot F = \varepsilon^{3-d-\frac{2}{d}} \mu_\varepsilon \varepsilon^{\frac{1}{d}-1} \nabla_{\tilde{u}} \cdot F = \varepsilon^2 \nabla_{\tilde{u}} \cdot F_\varepsilon$$

Si l'on suppose de plus que les limites suivantes existent :

$$\mu_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_0, \quad \eta_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_0, \quad D_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} D_0$$

alors par hypothèse, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$\partial_t f_0 + \nabla_x \cdot (u f_0) + \eta_0 \nabla_u \cdot ((v-u) f_0) = D_0 \Delta_u f_0 + \frac{\mu_0}{m} \nabla_u \cdot F_0$$

avec  $F_0 : (x, u, t) \mapsto \int g_0(x, u, y, w, t) \nabla_{x_1} V(x, y) dy dw$ .

Effectuons le même raisonnement pour l'équation portant sur la distribution de liens  $g$ .

$$\partial_t g = \varepsilon \partial_{\tilde{t}} \varepsilon^2 g_\varepsilon = \varepsilon^3 \partial_{\tilde{t}} g_\varepsilon$$

$$\nabla_{x_i} \cdot (v_i g) = \varepsilon^{\frac{1}{d}} \nabla_{\tilde{x}_i} \cdot \left( \varepsilon^{1-\frac{1}{d}} \tilde{v}_i \varepsilon^2 g_\varepsilon \right) = \varepsilon^3 \nabla_{\tilde{x}_i} \cdot (v_i g_\varepsilon)$$

$$D \Delta_{v_i} g = \varepsilon^{3-\frac{2}{d}} D_\varepsilon \varepsilon^{\frac{2}{d}-2} \Delta_{\tilde{v}_i} \varepsilon^2 g_\varepsilon = \varepsilon^3 D_\varepsilon \Delta_{\tilde{v}_i} g_\varepsilon$$

$$\eta \nabla_{v_i} \cdot ((v-v_i) g) = \varepsilon \eta_\varepsilon \varepsilon^{\frac{1}{d}-1} \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot \left( \varepsilon^{1-\frac{1}{d}} (\tilde{v} - \tilde{v}_i) \varepsilon^2 g_\varepsilon \right) = \varepsilon^3 \eta_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot ((\tilde{v} - \tilde{v}_i) g_\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} \mu \nabla_{v_i} \cdot \left( \frac{g}{f_i} F(x_i, v_i, t) \right) &= \varepsilon^{3-d-\frac{2}{d}} \mu_\varepsilon \varepsilon^{\frac{1}{d}-1} \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot \left( \frac{\varepsilon^2 g_\varepsilon}{\varepsilon f_{i,\varepsilon}} \varepsilon^{d+\frac{1}{d}} F_\varepsilon(\tilde{x}_i, \tilde{v}_i, \tilde{t}) \right) \\ &= \varepsilon^3 \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot \left( \frac{g_\varepsilon}{f_{i,\varepsilon}} F_\varepsilon(\tilde{x}_i, \tilde{v}_i, \tilde{t}) \right) \end{aligned}$$

où l'on a posé  $f_{i,\varepsilon} : (x_1, v_1, x_2, v_2, t) \mapsto f_\varepsilon(x_i, v_i, t)$ . Enfin, le dernier terme se réécrit :

$$\mu \nabla_{v_i} \cdot (g \nabla_{x_i} V) = \varepsilon^{3-d-\frac{2}{d}} \mu_\varepsilon \varepsilon^{\frac{1}{d}-1} \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot \left( \varepsilon^2 g_\varepsilon \varepsilon^{\frac{1}{d}} \nabla_{\tilde{x}_i} V \right) = \varepsilon^{4-d} \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot (g_\varepsilon \nabla_{\tilde{x}_i} V)$$

Les termes de formation et de destruction de liens peuvent aussi s'écrire :

$$\nu_f h(x_1, v_1, x_2, v_2, t) = \tilde{\nu}_f h_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) \text{ et } \nu_d g(x_1, v_1, x_2, v_2, t) = \tilde{\nu}_d g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t})$$

En remarquant que  $\mathbb{1}_{|x_1-x_2| \leq R} = \mathbb{1}_{|\tilde{x}_1-\tilde{x}_2| \leq \tilde{R}}$ , l'équation sur la distribution de liens  $g$  devient donc :

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \partial_{\tilde{t}} g_\varepsilon &= \varepsilon^3 \nabla_{\tilde{x}_1} \cdot (v_1 g_\varepsilon) + \varepsilon^3 \nabla_{\tilde{x}_2} \cdot (v_2 g_\varepsilon) + \varepsilon^3 D_\varepsilon \left( \Delta_{\tilde{v}_1} g_\varepsilon + \Delta_{\tilde{v}_2} g_\varepsilon \right) \\ &+ \frac{\eta_\varepsilon}{m} \varepsilon^3 \nabla_{\tilde{v}_1} \cdot \left( (\tilde{v}(\tilde{x}_1, \tilde{t}) - \tilde{v}_1) g_\varepsilon \right) + \frac{\eta_\varepsilon}{m} \varepsilon^3 \nabla_{\tilde{v}_2} \cdot \left( (\tilde{v}(\tilde{x}_2, \tilde{t}) - \tilde{v}_2) g_\varepsilon \right) \\ &+ 2 \varepsilon^3 \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_1} \cdot \left( \frac{g_\varepsilon}{f_{1,\varepsilon}} F_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{t}) \right) + 2 \varepsilon^3 \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_2} \cdot \left( \frac{g_\varepsilon}{f_{2,\varepsilon}} F_\varepsilon(\tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) \right) \\ &+ \varepsilon^{4-d} \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_1} \cdot (g_\varepsilon \nabla_{\tilde{x}_1} V) + \varepsilon^{4-d} \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_2} \cdot (g_\varepsilon \nabla_{\tilde{x}_2} V) \\ &+ \frac{\tilde{\nu}_f}{2} h_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) \mathbb{1}_{|\tilde{x}_1-\tilde{x}_2| \leq \tilde{R}} - \tilde{\nu}_d g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) \end{aligned}$$

Or  $d \in \{2, 3\}$  (cadre de travail), donc il s'ensuit :

$$\frac{\tilde{\nu}_f}{2} h_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) \mathbb{1}_{|\tilde{x}_1-\tilde{x}_2| \leq \tilde{R}} - \tilde{\nu}_d g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) = O(\varepsilon)$$

De plus, l'hypothèse  $h_\varepsilon(x, u, y, w, t) = f_\varepsilon(x, u, t)f_\varepsilon(y, w, t)$  permet de réécrire l'équation précédente :

$$\frac{\tilde{\nu}_f}{2} f_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{t}) f_\varepsilon(\tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) \mathbb{1}_{|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2| \leq \tilde{R}} - \tilde{\nu}_d g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) = O(\varepsilon)$$

En passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , l'expression ci-dessus permet de relier les quantités limites  $f_0$  et  $g_0$  (sous l'hypothèse de "non-corrélation") :

$$g_0(x, u, y, w, t) = \frac{\nu_f}{2\nu_d} f_0(x, u, t) f_0(y, w, t)$$

où l'on note  $\nu_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\nu}_f$  et  $\nu_d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\nu}_d$ .

En injectant maintenant cette expression dans l'équation vérifiée par  $f_0$ , il n'y a plus dépendance en  $g_0$  :

$$\partial_t f_0 + \nabla_x \cdot (u f_0) + \eta \nabla_u \cdot ((v - u) f_0) = D \Delta_u f_0 + \frac{\mu}{m} \frac{\nu_f}{2\nu_d} \nabla_u \cdot \left( f_0(x, u, t) \int f_0(y, w, t) \nabla_{x_1} V(x, y) dy dw \right)$$

**Remarque A.1.** Le problème de cette méthode, bien qu'on obtienne la même équation pour  $f$ , est l'adaptation avec l'équation de Navier-Stokes. En effet, le changement d'échelle choisi ne permet pas de conserver plusieurs termes de l'équation de Navier-Stokes. Avec ce choix, on a :

$$\partial_t v = \varepsilon \partial_{\tilde{t}} \varepsilon^{1-\frac{1}{d}} \tilde{v} = \varepsilon^{2-\frac{1}{d}} \partial_{\tilde{t}} \tilde{v}$$

$$v \cdot \nabla_x v = \varepsilon^{1-\frac{1}{d}} \tilde{v} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{d}} \nabla_{\tilde{x}} \varepsilon^{1-\frac{1}{d}} \tilde{v} = \varepsilon^{2-\frac{1}{d}} \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{v}$$

Mais le dernier terme (écrit sous la forme d'une intégrale dans une remarque plus haut) reste lui de l'ordre de  $\varepsilon^2$  et  $\rho_0$  est supposé constante (masse volumique d'un fluide, indépendante de l'échelle d'étude). On perd donc à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  toute l'influence des particules sur le fluide, ce qui n'est pas satisfaisant pour cette étude.

**Remarque A.2.** De plus, les calculs ci-dessus montrent que le succès du changement d'échelle dépend de la dimension de travail  $d$ , ce qui n'a pas lieu d'être.

## A.2 Tentative infructueuse 2

Rappelons le système sur les distributions de particules et de liens :

$$\begin{aligned} \partial_t f + \nabla_x \cdot (u f) + \eta \nabla_u \cdot ((v - u) f) &= D \Delta_u f + \frac{\mu}{m} \nabla_u \cdot F \\ \partial_t g &= \nabla_{x_1} \cdot (v_1 g) + \nabla_{x_2} \cdot (v_2 g) + D(\Delta_{v_1} g + \Delta_{v_2} g) \\ &+ \frac{\eta}{m} \nabla_{v_1} \cdot \left( (v(x_1, t) - v_1) g \right) + \frac{\eta}{m} \nabla_{v_2} \cdot \left( (v(x_2, t) - v_2) g \right) \\ &+ 2\mu \nabla_{v_1} \cdot \left( \frac{g}{f_1} F(x_1, v_1, t) \right) + 2\mu \nabla_{v_2} \cdot \left( \frac{g}{f_2} F(x_2, v_2, t) \right) \\ &+ \mu \nabla_{v_1} \cdot \left( g \nabla_{x_1} V \right) + \mu \nabla_{v_2} \cdot \left( g \nabla_{x_2} V \right) \\ &+ \frac{\nu_f}{2} h(x_1, v_1, x_2, v_2, t) \mathbb{1}_{|x_1 - x_2| \leq R} - \nu_d g(x_1, v_1, x_2, v_2, t) \end{aligned}$$

avec  $F : (x, u, t) \mapsto \int g(x, u, \tilde{x}, \tilde{u}, t) \nabla_{x_1} V(x, \tilde{x}) d\tilde{x} d\tilde{u}$ ,  $f_i : (x_1, v_1, x_2, v_2, t) \mapsto f(x_i, v_i, t)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .

Pour  $\varepsilon \ll 1$ , on effectue cette fois le changement de variables spatiale et temporelle suivant :

$$\tilde{x} = \varepsilon x, \quad \tilde{t} = \varepsilon t, \quad \tilde{v} = v, \quad f_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{t}) = \frac{1}{\varepsilon} f(x, v, t)$$

$$g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) = \frac{1}{\varepsilon^2} g(x_1, v_1, x_2, v_2, t), \quad h_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) = \frac{1}{\varepsilon^2} h(x_1, v_1, x_2, v_2, t)$$

On suppose encore que le potentiel est invariant lors du changement d'échelle et que les coefficients caractéristiques du fluide et les probabilités de formation et destruction de liens subissent les changements suivants :

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_f &= \varepsilon^2 \nu_f, & \tilde{\nu}_d &= \varepsilon^2 \nu_d \\ \mu_\varepsilon &= \varepsilon^{1-d} \mu, & \eta_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon} \eta, & D_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon} D \end{aligned}$$

Si l'on réécrit le système précédent selon ces coordonnées, il vient pour les différents termes :

$$\begin{aligned} \partial_t f &= \varepsilon \partial_{\tilde{t}} (\varepsilon f_\varepsilon) = \varepsilon^2 \partial_{\tilde{t}} f_\varepsilon \\ \nabla_x \cdot (uf) &= \varepsilon \nabla_{\tilde{x}} \cdot (\tilde{u} \varepsilon f_\varepsilon) = \varepsilon^2 \nabla_{\tilde{x}} \cdot (\tilde{u} f_\varepsilon) \\ \eta \nabla_u \cdot ((v-u)f) &= \varepsilon \eta_\varepsilon \nabla_{\tilde{u}} \cdot ((\tilde{v}-\tilde{u}) \varepsilon f_\varepsilon) = \varepsilon^2 \nabla_{\tilde{u}} \cdot ((\tilde{v}-\tilde{u}) f_\varepsilon) \\ D \Delta_u f &= \varepsilon D_\varepsilon \Delta_{\tilde{u}} \varepsilon f_\varepsilon = \varepsilon^2 \Delta_{\tilde{u}} f_\varepsilon \\ F(x_1, u_1, t) &= \int \varepsilon^2 g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{u}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}_2, \tilde{t}) \varepsilon \nabla_{\tilde{x}_1} V(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \frac{1}{\varepsilon^d} d\tilde{x}_2 d\tilde{u}_2 \\ &= \varepsilon^{3-d} \int g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{u}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}_2, \tilde{t}) \nabla_{\tilde{x}_1} V(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_2 d\tilde{u}_2 \end{aligned}$$

Posons pour faciliter l'écriture  $F_\varepsilon : (\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{t}) \mapsto \int g_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{u}, y, w, \tilde{t}) \nabla_{\tilde{x}_1} V(\tilde{x}, y) dy dw$ .

$$\mu \nabla_u \cdot F = \varepsilon^{d-1} \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{u}} \cdot \varepsilon^{3-d} F_\varepsilon = \varepsilon^2 \nabla_{\tilde{u}} \cdot F_\varepsilon$$

Si l'on suppose de plus que les limites suivantes existent :

$$\mu_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_0, \quad \eta_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_0, \quad D_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} D_0$$

alors par hypothèse, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$\partial_t f_0 + \nabla_x \cdot (u f_0) + \eta_0 \nabla_u \cdot ((v-u) f_0) = D_0 \Delta_u f_0 + \frac{\mu_0}{m} \nabla_u \cdot F_0$$

avec  $F_0 : (x, u, t) \mapsto \int g_0(x, u, y, w, t) \nabla_{x_1} V(x, y) dy dw$ .

Effectuons le même raisonnement pour l'équation portant sur la distribution de liens  $g$ .

$$\begin{aligned} \partial_t g &= \varepsilon \partial_{\tilde{t}} \varepsilon^2 g_\varepsilon = \varepsilon^3 \partial_{\tilde{t}} g_\varepsilon \\ \nabla_{x_i} \cdot (v_i g) &= \varepsilon \nabla_{\tilde{x}_i} \cdot (\tilde{v}_i \varepsilon^2 g_\varepsilon) = \varepsilon^3 \nabla_{\tilde{x}_i} \cdot (\tilde{v}_i g_\varepsilon) \\ D \Delta_{v_i} g &= \varepsilon D_\varepsilon \Delta_{\tilde{v}_i} \varepsilon^2 g_\varepsilon = \varepsilon^3 D_\varepsilon \Delta_{\tilde{v}_i} g_\varepsilon \\ \eta \nabla_{v_i} \cdot ((v-v_i) g) &= \varepsilon \eta_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot ((\tilde{v}-\tilde{v}_i) \varepsilon^2 g_\varepsilon) = \varepsilon^3 \eta_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot ((\tilde{v}-\tilde{v}_i) g_\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu \nabla_{v_i} \cdot \left( \frac{g}{f_i} F(x_i, v_i, t) \right) &= \varepsilon^{d-1} \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot \left( \frac{\varepsilon^2 g_\varepsilon}{\varepsilon f_{i,\varepsilon}} \varepsilon^{3-d} F_\varepsilon(\tilde{x}_i, \tilde{v}_i, \tilde{t}) \right) \\ &= \varepsilon^3 \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot \left( \frac{g_\varepsilon}{f_{i,\varepsilon}} F_\varepsilon(\tilde{x}_i, \tilde{v}_i, \tilde{t}) \right)\end{aligned}$$

où l'on a posé  $f_{i,\varepsilon} : (x_1, v_1, x_2, v_2, t) \mapsto f_\varepsilon(x_i, v_i, t)$ . Enfin, le dernier terme se réécrit :

$$\mu \nabla_{v_i} \cdot \left( g \nabla_{x_i} V \right) = \varepsilon^{d-1} \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot \left( \varepsilon^2 g_\varepsilon \varepsilon \nabla_{\tilde{x}_i} V \right) = \varepsilon^{2+d} \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_i} \cdot \left( g_\varepsilon \nabla_{\tilde{x}_i} V \right)$$

Les termes de formation et de destruction de liens peuvent aussi s'écrire :

$$\nu_f h(x_1, v_1, x_2, v_2, t) = \tilde{\nu}_f h_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) \text{ et } \nu_d g(x_1, v_1, x_2, v_2, t) = \tilde{\nu}_d g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t})$$

En remarquant que  $\mathbb{1}_{|x_1-x_2| \leq R} = \mathbb{1}_{|\tilde{x}_1-\tilde{x}_2| \leq \tilde{R}}$ , l'équation sur la distribution de liens  $g$  devient :

$$\begin{aligned}\varepsilon^3 \partial_t g_\varepsilon &= \varepsilon^3 \nabla_{\tilde{x}_1} \cdot \left( v_1 g_\varepsilon \right) + \varepsilon^3 \nabla_{\tilde{x}_2} \cdot \left( v_2 g_\varepsilon \right) + \varepsilon^3 D_\varepsilon \left( \Delta_{\tilde{v}_1} g_\varepsilon + \Delta_{\tilde{v}_2} g_\varepsilon \right) \\ &+ \frac{\eta_\varepsilon}{m} \varepsilon^3 \nabla_{\tilde{v}_1} \cdot \left( (\tilde{v}(\tilde{x}_1, t) - \tilde{v}_1) g_\varepsilon \right) + \frac{\eta_\varepsilon}{m} \varepsilon^3 \nabla_{\tilde{v}_2} \cdot \left( (\tilde{v}(\tilde{x}_2, t) - \tilde{v}_2) g_\varepsilon \right) \\ &+ 2\varepsilon^3 \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_1} \cdot \left( \frac{g_\varepsilon}{f_{1,\varepsilon}} F_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{t}) \right) + 2\varepsilon^3 \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_2} \cdot \left( \frac{g_\varepsilon}{f_{2,\varepsilon}} F_\varepsilon(\tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) \right) \\ &+ \varepsilon^{2+d} \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_1} \cdot \left( g_\varepsilon \nabla_{\tilde{x}_1} V \right) + \varepsilon^{2+d} \mu_\varepsilon \nabla_{\tilde{v}_2} \cdot \left( g_\varepsilon \nabla_{\tilde{x}_2} V \right) \\ &+ \frac{\tilde{\nu}_f}{2} h_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) \mathbb{1}_{|\tilde{x}_1-\tilde{x}_2| \leq \tilde{R}} - \tilde{\nu}_d g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t})\end{aligned}$$

Où  $d \geq 1$  (dimension dans le cadre de travail), donc il s'ensuit :

$$\frac{\tilde{\nu}_f}{2} h_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) \mathbb{1}_{|\tilde{x}_1-\tilde{x}_2| \leq \tilde{R}} - \tilde{\nu}_d g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) = O(\varepsilon^3)$$

De plus, l'hypothèse  $h_\varepsilon(x, u, y, w, t) = f_\varepsilon(x, u, t) f_\varepsilon(y, w, t)$  permet de réécrire l'équation précédente :

$$\frac{\tilde{\nu}_f}{2} f_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{t}) f_\varepsilon(\tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) \mathbb{1}_{|\tilde{x}_1-\tilde{x}_2| \leq \tilde{R}} - \tilde{\nu}_d g_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \tilde{x}_2, \tilde{v}_2, \tilde{t}) = O(\varepsilon)$$

En passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , l'expression ci-dessus permet de relier les quantités limites  $f_0$  et  $g_0$  (sous l'hypothèse de "non-corrélation") :

$$g_0(x, u, y, w, t) = \frac{\nu_f}{2\nu_d} f_0(x, u, t) f_0(y, w, t)$$

où l'on note  $\nu_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\nu}_f$  et  $\nu_d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\nu}_d$ .

En injectant maintenant cette expression dans l'équation vérifiée par  $f_0$ , il n'y a plus dépendance en  $g_0$  :

$$\partial_t f_0 + \nabla_x \cdot (u f_0) + \eta \nabla_u \cdot ((v - u) f_0) = D \Delta_u f_0 + \frac{\mu}{m} \frac{\nu_f}{2\nu_d} \nabla_u \cdot \left( f_0(x, u, t) \int f_0(y, w, t) \nabla_{x_1} V(x, y) dy dw \right)$$

Intéressons-nous maintenant au reste des équations et à leur comportement lors de ce changement d'échelle :

$$\begin{cases} \rho_0 (\partial_t v + v \cdot \nabla_x v) - \nu \Delta_x v = -\nabla_x p - \int \eta (v(x, t) - u) f(x, u, t) du \\ \nabla \cdot v = 0 \end{cases}$$

Considérons l'impact du changement d'échelle sur chacun des termes en jeu dans la première équation (la seconde reste inchangée en simplifiant par  $\varepsilon$ ) :

$$\partial_t v = \varepsilon \partial_t \tilde{v} \text{ et } v \cdot \nabla_x v = \varepsilon \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{v}$$

**Remarque A.3.** Ici encore, il semblerait que l'on perde des termes lors de l'utilisation de l'équation de Navier-Stokes, notamment le dernier, puisque celui-ci apporte un  $\varepsilon^2$ . Autrement dit, le fluide se comporterait exactement comme en l'absence de particules, ce qui n'est pas intéressant. Il faut donc modifier les choix faits pour les nouvelles quantités.

J'insère le premier [5], le second [1], le troisième [2], le quatrième [4], le cinquième [3].

## Références

- [1] Julien Barré, Pierre Degond, and Ewelina Zatorska. Kinetic theory of particle interactions mediated by dynamical networks. *SIAM*, sep 2017.
- [2] Julien Barré, Pierre Degond, Ewelina Zatorska, Diane Peurichard, and Khuong Anaïs. A two-species macroscopic model for cell segregation and border sharpening by eph receptor ephrin-mediated repulsion. Unpublished.
- [3] Pierre Degond, Sara Merino-Aceituno, Fabien Vergnet, and Hui Yu. Coupled self-organized hydrodynamics and stokes models for suspensions of active particles. *AMS*, 2017.
- [4] Pierre Degond, Diane Peurichard, and Fanny Delebecque. Continuum model for linked fibers with alignment interactions. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, nov 2015.
- [5] Bernt Oksendal. *Stochastic Differential Equations (5th Edition)*. Springer, 2000.