Cours 1 (Critères d'inversibilité)**.** Énoncer au moins 5 critères d'inversibilité pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Cours 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, tel que $u^2 - 3u + 2id = 0$.
Montrer que u est inversible, déterminer son inverse et établir que $\ker(u - id)$ et $\ker(u - 2id)$ sont supplémentaires.

Cours 3. Un ensemble est dit séparable s'il admet une partie dénombrable dense. Montrer que tout sous-ensemble d'un ensemble séparable est séparable.

Cours 4. Montrer que si u et v commutent, alors $\ker u$ et $\mathrm{Im} u$ sont stables par v.

Exercice 1 (Matrice à diagonale dominante)**.** Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est à diagonale dominante si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j \neq i} a_{i,j} < |a_{i,i}|.$$

Montrer que toute matrice à diagonale dominante est inversible.
Si de plus les valeurs diagonales de A sont positives, montrer que $\det A > 0$.

Exercice 2 (Similitude)**.** Montrer que deux matrices semblables sur $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}),\ A = PBP^{-1} \implies \exists P \in GL_n(\mathbb{R}),\ A = PBP^{-1}$$

Exercice 3 (Fonction multiplicative)**.** Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non constante telle que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(AB) = f(A)f(B).$$

(i) Calculer les valeurs $f(O_n)$, $f(I_n)$. Montrer que si A et B sont semblables, $f(A) = f(B)$.

(ii) Montrer que : A est inversible $\iff f(A) \neq 0$.

Exercice 4 (Forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)**.**

(i) Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(AB) = f(BA).$$

Montrer que f est proportionnelle à la trace.

(ii) Soit g endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ g(AB) = g(BA) \text{ et } g(I_n) = I_n.$$

Montrer que g conserve la trace.

Exercice 5 (Noyaux et images itérés)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit :

$$N = \bigcup_{p=0}^{\infty} \ker u^p \text{ et } I = \bigcap_{p=0}^{\infty} \mathrm{Im}\, u^p.$$

(i) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = \ker u^n$ et $I = \mathrm{Im}\, u^n$

(ii) Montrer que N et I sont supplémentaires, stables par u, et que u_N (resp. u_I) est nilpotent (resp. bijectif).

(iii) Montrer que, si $E = F \oplus G$ avec F et G stables par u, et u_F (resp. u_G) nilpotent (resp. bijectif), alors $F = N$ et $G = I$.

Exercice 6 (Endomorphisme sur les polynômes)**.** Soit $\Delta : P \in \mathbb{C}[X] \mapsto P(X+1) - P(X)$.

(i) Déterminer $\deg \Delta(P)$ puis le noyau et l'image de Δ.

(ii) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k).$$

(iii) En déduire que pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente linéaire à coefficients constants.

Exercice 7 (Quelques ensembles dénombrables)**.** Montrer que les ensembles suivants sont dénombrables :

(i) l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$

(ii) l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone

(iii) l'ensemble des nombres algébriques (i.e. $\{z \in \mathbb{C} \mid \exists P \in \mathbb{Z}[X]\backslash\{0\},\ P(z) = 0\}$).

Exercice 8. Existe-t-il une fonction f continue telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$?

24/09

Cours 5 (Normes)**.** Rappeler la définition d'une norme, d'un espace vectoriel normé.
Citer des exemples de normes sur différents espaces. Sur un même espace, y a-t-il équivalence ?

Cours 6. Rappeler la définition d'une valeur d'adhérence d'une suite.
Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass en dimension finie.

Cours 7 (Adhérence et suites)**.** Donner la définition de l'adhérence d'une partie $A \subset E$, avec E espace vectoriel normé.
Si F est un sous-espace vectoriel fermé de E, montrer que $\overline{F}$ aussi.
Si A est une partie de E, montrer que $Vect(\overline{A}) \subset \overline{Vect(A)}$.

Exercice 9. Montrer que tout fermé d'un espace vectoriel normé peut s'écrire comme intersection d'une suite d'ouverts décroissante.

Exercice 10. Que dire d'un sous-espace vectoriel ouvert d'un espace vectoriel E ?

Exercice 11 (Adhérence et sous-espaces vectoriels)**.** Soit H hyperplan de E. Montrer que H est fermé ou dense dans E.

Exercice 12 (Norme non euclidienne)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ des réels distincts. On définit N sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \ N(P) = \sum_{k=0}^{n} |P(\alpha_k)|.$$

Montrer que N est une norme non euclidienne (i.e. non issue d'un produit scalaire).

Exercice 13 (Norme sur $\mathcal{C}^1$)**.** Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On définit N par :

$$\forall f \in E,\ \ N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$

Montrer que N est une norme. Montrer que N est euclidienne (i.e. issue d'un produit scalaire). Les normes N et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 14 (Équivalence de normes sur $\mathcal{C}^0$)**.** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Soit $\varphi \in E$. Soit N_φ l'application définie de la manière suivante :

$$\forall f \in E,\ \ N_\varphi(f) = \|\varphi f\|_\infty.$$

Donner une CNS pour que N_φ définisse une norme sur E.
Donner une CNS pour que N_φ et $\|.\|_\infty$ soient équivalentes.

Exercice 15 (Partie fermée et distance)**.** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$. Posons $A = \{f \in E,\ f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,dt \geq 1\}$. Montrer que A est fermé et que pour tout $f \in A$, $\|f\|_\infty > 1$.
En s'appuyant sur une suite de fonctions continues qui approche 1, montrer que $d(0, A) = 1$.

Exercice 16 (Norme subordonnée)**.** Soit N norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, de norme associée $\|.\|$.
Montrer que l'application suivante définit une norme sur $\mathbb{R}^n$:

$$N^* : x \mapsto \sup_{y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}} \frac{\langle x, y \rangle}{N(y)}.$$

(On pensera à l'équivalence des normes en dimension finie.)
Que vaut N^* lorsque $N = \|.\|$? Lorsque $N = \|.\|_1$?

Cours 8 (Inégalité des pentes). Énoncer et démontrer l'inégalité des pentes pour une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$.

Cours 9 (Convexes de $\mathbb{R}$). Montrer que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

Cours 10 (Caractérisation par l'épigraphe). Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.

Exercice 17 (Un premier exemple). On pose $f : t \mapsto t - \ln(t) - 1/t$ si $t \in \mathbb{R}_+^*$.
Etudier les branches infinies, variations, convexité / concavité de f. Donner l'allure de son graphe.
Résoudre l'équation $f(t) = 0$.

Exercice 18 (Inégalité de convexité). Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ réels positifs. Montrer que :

$$(x_1 \dots x_n)^{1/n} + (y_1 \dots y_n)^{1/n} \leq ((x_1 + y_1) \times \cdots \times (x_n + y_n)) .$$

Exercice 19 (Inégalité de Kolmogorov). Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, telle que f et f'' soient bornées.
Montrer que :

$$\|f'\|_\infty \leq 2\sqrt{\|f\|_\infty \|f''\|}.$$

Exercice 20 (Équivalent en $+\infty$). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ décroissante telle que $f(x) + f(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Étudier la limite de f en $+\infty$ et en donner un équivalent.

Exercice 21 (Prolongement d'une fonction convexe). Soit $f :]0,1[\cup]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} .$$

Montrer que f est convexe sur son ensemble de définition.
Déterminer les limites en 1^+ et 1^- de f.
Montrer que le prolongement g ainsi obtenu est $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$. Établir la convexité de g.

Exercice 22 (Formule de Taylor et coefficients binomiaux). Montrer que pour tout $0 \leq p < n$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^n = (-1)^n n! .$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$, en déduire la limite quand $h \to 0$ de :

$$\frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(kh).$$

Exercice 23 (Une fonction qui ne coïncide pas avec son DL_0). Existe-t-il une fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui ne coïncide pas avec son développement limité en 0, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.
On pourra s'intéresser à la fonction $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ prolongée par continuité en 0.

Exercice 24 (Convexité par les milieux). Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall x, y \in [0,1],\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

Exercice 25 (Développement limité à tout ordre). Exprimer le développement limité général en 0 de arcsin.

Exercice 26 (Développement limité de la réciproque). On définit $f : x \mapsto x \exp\left(x^2\right)$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est bijective et écrire un $DL_5(0)$ de f^{-1} (sans calculer f^{-1}).

Exercice 27 (Construction d'une fonction convexe). Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. On pose :

$$I^* = \{\lambda \in I,\ \sup_{x \in I} (\lambda x - f(x)) < \infty\}.$$

Si $\lambda \in I^*$, on définit $f^*(\lambda) = \sup\limits_{x \in I} (\lambda x - f(x))$.
Montrer que I^* est in intervalle sur lequel f^* est convexe.
Si f st de plus de classe $\mathcal{C}^1$ et f' strictement croissante, montrer que :

$$\forall x \in I,\ f^*(f'(x)) = x f'(x) - f(x).$$

Cours 11. Rappeler la définition de l'intégrale généralisée sur un intervalle quelconque.
Démontrer les propriétés de linéarité, positivité et croissance de l'intégrale généralisée sur un intervalle quelconque ($]a, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$).

Cours 12. Énoncer le théorème de changement de variables sur un intervalle quelconque et la formule d'intégration par parties.

Cours 13. Rappeler la définition d'une fonction intégrable sur un intervalle I. Énoncer l'inégalité triangulaire pour l'intégrale sur un intervalle quelconque.

Exercice 28 (Existence de certaines intégrales généralisées)**.**

Exercice 29 (Étude d'intégrabilité)**.** Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $f_\alpha : t \mapsto \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 30. Soit $a > -1$.

(i) En posant $x = \tan(t)$, montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+a\sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$.

(ii) Donner en fonction de α la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)}.$$

(iii) En déduire selon la valeur de α la nature de l'intégrale :

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)}.$$

Exercice 31. Donner un exemple de fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ non bornée.

Exercice 32. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 (x \ln x)^n \,\mathrm{d}x$$

Exercice 33. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $[1, +, \infty[$. Si $x \in [1, +\infty[$, on pose :

$$u(x) = \frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \;\text{ et }\; v(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Montrer que u et v sont continues et intégrables sur $[1, +\infty[$, d'intégrales sur $[1, +\infty[$ égales.

Exercice 34. Existence selon la valeur de α et calcul de :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-\alpha t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 35. Existence selon la valeur de α, β et calcul de :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t} + \alpha\sqrt{t+1} + \beta\sqrt{t+2}\right) \mathrm{d}t.$$

Exercice 36 (Fonction Γ d'Euler)**.** On définit la fonction Γ d'Euler par :

$$\Gamma : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Montrer que Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 37 (Intégrale fonction des bornes)**.** On définit la fonction F sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

Montrer que F est bien définie, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée. Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} xF(x) = \lim_{x\to 0^+} xF(x) = 0.$$

En déduire l'existence et la valeur de :

$$\int_0^\infty F(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 38 (Développement limité à tout ordre)**.** Exprimer le développement limité général en 0 de arcsin.

15/10

Cours 14. Énoncer le théorème d'intégration des relations de comparaison.

Cours 15. Énoncer et démontrer le critère de Leibniz pour les séries alternées.

Cours 16. Énoncer et démontrer le critère de comparaison série-intégrale.

Exercice 39. Déterminer un équivalent, quand $x \to +\infty$ de :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t.$$

Exercice 40. Déterminer un développement asymptotique à trois termes, quand $x \to +\infty$, de :

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t.$$

Exercice 41. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer pour $0 < a < b$:

$$\lim_{x \to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t.$$

Exercice 42. Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

(i) Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

(ii) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ soit convergente.

(iii) En déduire le comportement de $\sum u_n$ (on se ramènera à une série de Riemann).

Exercice 43 (Comparaison de séries)**.** Soient (u_n), (v_n) deux suites à termes strictement positifs, telles que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Que dire de :

$$\sum \max\{u_n, v_n\}, \ \sum \sqrt{u_n v_n}, \ \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

En général, a-t-on l'équivalence :

$$\sum a_n \text{ converge } \iff \sum \sqrt{a_n a_{n+1}} \text{ converge } ?$$

Exercice 44. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $[1, +, \infty[$. Si $x \in [1, +\infty[$, on pose :

$$u(x) = \frac{1}{x^2} \int_1^x f(t) \, \mathrm{d}t \ \text{ et } \ v(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Montrer que u et v sont continues et intégrables sur $[1, +\infty[$, d'intégrales sur $[1, +\infty[$ égales.

Exercice 45 (Règle de Raabe-Duhamel)**.** Soit (u_n) suite de réels strictement positifs telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Montrer que $\alpha > 1 \implies \sum u_n$ converge et $\alpha < 1 \implies \sum u_n$ diverge.
On commencera par montrer que pour (u_n) et (v_n) suites à termes strictement positifs,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n} \implies \left[\left(\sum u_n \text{ converge } \implies \sum v_n \text{ converge}\right) \text{ et } \left(\sum v_n \text{ diverge } \implies \sum u_n \text{ diverge }\right)\right].$$

Exercice 46 (Règle de Raabe-Duhamel)**.** Soient $a > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) suite de réels strictement positifs telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^a}\right).$$

Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$.
On suppose de plus que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$. Montrer alors que $\sum u_n$ converge $\iff b - a > 1$ et alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{b-1}{b-a-1}.$$

Exercice 47 (Séries de Bertrand)**.** Montrer que :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \text{ converge } \iff [\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)]$$

Exercice 48 (Intégrale fonction des bornes)**.** On définit la fonction F sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t.$$

Montrer que F est bien définie, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée. Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} xF(x) = \lim_{x\to 0^+} xF(x) = 0.$$

En déduire l'existence et la valeur de :

$$\int_0^\infty F(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 49. Déterminer, pour $a \in]0,1[$, la nature de la série $\sum a^{\sqrt{n}}$.

Exercice 50. On définit la fonction zeta de Riemann pour $x \in]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Déterminer la limite de $(x-1)\zeta(x)$ quand x tend vers 1.

Exercice 51. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{n^\alpha}{\sum\limits_{k=2}^{n} \ln^2 k}.$$

Exercice 52. Pour $\alpha > 0$, étudier le comportement de la série de terme général :

$$u_n = \ln\left(1 + \sin\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right).$$

Exercice 53. Soit (u_n) suite réelle strictement positive, décroissante de limite nulle. On suppose que :

$$\left(v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k - nu_n\right)$$

est une suite bornée.
Montrer que la série de terme général u_n converge.

5/11

Cours 17. Énoncer et démontrer le théorème de comparaison pour les familles sommables de nombres réels positifs.

Cours 18. Rappeler la définition d'une famille (de nombres complexes) sommable, de sa somme. Énoncer les propriétés de croissance et de linéarité de la somme.

Cours 19. Énoncer le théorème de sommation par paquets et son application au produit de Cauchy de séries absolument convergentes.

Exercice 54. Déterminer le signe de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ (dont on admet la convergence). On pourra introduire la série de terme général :

$$u_n = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{n\pi + t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 55. Montrer que les suites suivantes convergent :

$$\left(s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) \text{ et } (u_n = \ln(e^{s_n} - 1)).$$

Déterminer la limite de (s_n) et la nature de $\sum u_n$.

Exercice 56. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$.

Exercice 57. Pour $a \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right).$$

Exercice 58. On définit :

$$f : x \mapsto \frac{\sin(\ln x)}{x} \text{ et } \forall n \geq 2,\ u_n = \int_{n-1}^{n} f - f(n).$$

(i) Montrer que f' est intégrable sur $[1,+\infty[$.

(ii) Montrer que $\sum u_n$ est absolument convergente.

(iii) En déduire le comportement de $\sum \frac{\sin(\ln n)}{n}$ (on montrera la divergence de $(\cos(\ln n))$).

Exercice 59. Déterminer, selon $\alpha \in \mathbb{R}$, la sommabilité de la famille :

$$\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*}$$

Exercice 60. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer l'existence et calculer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}.$$

Exercice 61. On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites complexes sommables.

(i) Pour $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(u_k v_{n-k})$ est sommable. On pose alors

$$u * v = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}\right).$$

(ii) Montrer que $u * v$ est sommable et :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (u*v)_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n.$$

(iii) La structure $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ définit-elle un groupe ? (Indication on considèrera $u = (1, -1, 0, 0, \dots)$).

Exercice 62. Pour $r \in [0,1[$, $\theta \in \mathbb{R}$, justifier l'existence et calculer :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Exercice 63. Soit σ bijection de $\mathbb{N}^*$. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$? De $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n}$?

Exercice 64. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n-1}}{1-z^{2n-1}}.$$

On pourra considérer la famille $(u_{m,n} = a^{m(2n-1)})_{(m,n)}$.

Exercice 65. Déterminer la valeur, sous réserve d'existence, de :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}.$$

Exercice 66. Déterminer selon la valeur de α la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}.$$

12/11

Cours 20. Rappeler la définition d'un morphisme de groupes, du noyau et de l'image d'un morphisme de groupes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f : x \mapsto x^n$. Montrer que f est un morphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans lui-même. Déterminer son image et son noyau. Que dire dans le cas $(\mathbb{C}^*, \times)$?

Cours 21. Rappeler la définition d'un sous-anneau d'un anneau A.
On introduit $Z = \{x \in A \mid \forall a \in A,\ ax = xa\}$. Montrer que Z est un sous-anneau de A.

Cours 22. Rappeler la définition d'un morphisme d'anneaux, du noyau et de l'image d'un morphisme d'anneaux. Montrer que le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.

Exercice 67. Soit X un ensemble. Soit $a \in X$. Montrer que ev_a est un morphisme d'anneaux :

$$ev_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(a) \end{array}$$

Montrer de même que si $P \in GL_n(\mathbb{R})$, l'application suivante définit un automorphisme :

$$f_P : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array}$$

dont on déterminera l'inverse.

Exercice 68. Si p est premier, quel est le nombre de carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Exercice 69. Montrer que tout sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est monogène ou dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 70. Pour $d \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Exercice 71 (Entiers de Gauss)**.** On pose $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a + \mathrm{i}b \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est un anneau commutatif (pour $+, \times$). Déterminer ses éléments inversibles. (On pourra pour cela montrer que $N : z \mapsto |z|^2$, définit une fonction multiplicative à valeurs entières sur $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$).

Exercice 72 (Indicatrice d'Euler)**.** On définit l'indicatrice d'Euler pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\varphi(n) = \#\{k \in [\![1, n]\!] \mid k \wedge n = 1\}.$$

(i) Pour p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, calculer $\varphi(p)$ et $\varphi(p^\alpha)$.

(ii) Pour m et n premiers entre eux, montrer qu'il existe un isomorphisme entre $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En déduire $\varphi(mn)$.

(iii) En déduire que si la décomposition de n en facteurs premiers est $p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, alors :

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

(iv) Établir $\forall n \geq 3,\ \varphi(n) \geq \frac{n \ln 2}{n + \ln 2}$.

Exercice 73. (i) Pour $(a, n) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, montrer que $a^{\varphi(n)} = 1$.

(ii) Montrer que si p premier et $k \in \{1, \dots, p-1\}$ alors p divise $\binom{p}{k}$.

(iii) Soient $a, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $a^{n-1} = 1\ [n]$. On suppose que pour tout x divisant $n-1$, distinct de $n-1$, $a^x = 1\ [n]$. Montrer que n est premier. (On pourra poser $d = n - 1 \wedge \varphi(n)$).

Exercice 74. On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites complexes sommables.

(i) Pour $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(u_k v_{n-k})$ est sommable. On pose alors

$$u * v = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k}\right).$$

(ii) Montrer que $u * v$ est sommable et :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (u * v)_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n.$$

(iii) La structure $(\ell^1(\mathbb{Z}), +, *)$ définit-elle un corps ? (Indication on considèrera $u = (1, -1, 0, 0, \dots)$).

Exercice 75. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour a élément de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, montrer que $a^{\varphi(n)} = 1$.

Exercice 76 (Polynômes cyclotomiques)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose de plus, pour $d \in \mathbb{N}^*$,

$$\phi_d = \prod_{z \in \mathbb{U}_d^*} (X - z).$$

(i) Montrer que $X^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d$. En déduire que :

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

(ii) Montrer que ϕ_n est un polynôme à coefficients entiers.

Exercice 77. Quel est le plus petit entier n tel qu'il existe un groupe non commutatif de cardinal n ?

Exercice 78. Soit G groupe fini non trivial tel que $\forall g \in G,\ g^2 = e$. Montrer que G est abélien et qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que G soit isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^) n, +)$.

Exercice 79. Déterminer l'ensemble des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. De quelle structure est muni cet ensemble ? Quels sont à isomorphisme près, les groupes de cardinal 4 ?

19/11

Cours 23. Rappeler la définition de valeur / vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme. Montrer que toute famille de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est en somme directe.

Cours 24. Rappeler la définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme / d'une matrice. Dans le cas matriciel, démontrer le caractère invariant par similitude. Étudier la réciproque. Faire le lien entre valeur propre et polynôme caractéristique. Déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice nilpotente.

Cours 25. Rappeler la définition d'une matrice diagonalisable / trigonalisable. Donner des conditions nécessaires / suffisantes de diagonalisabilité / trigonalisabilité.

Exercice 80. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(i) Soit u automorphisme de E. Décrire $Sp(u^{-1})$.

(ii) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $a \in GL(E)$ et $v = a \circ u \circ a^{-1}$. Comparer $Sp(u)$ et $Sp(v)$, $E_\lambda(u)$ et $E_\lambda(v)$.

(iii) Montrer que si tout $x \in E$ est vecteur propre de u, alors u est une homothétie.

Exercice 81. (i) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $u : f \mapsto f'$ endomorphisme de E. Déterminer les éléments propres de u.

(ii) Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soit f endomorphisme de E défini pour $u \in E$ par $f(u)_0 = u_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(u)_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$

Déterminer les éléments propres de f.

(iii) Soit E espace des suites réelles de limite nulle. On définit $\Delta \in \mathcal{L}(E)$, pour $u \in E$, par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \Delta(u)_n = u_{n+1} - u_n$. Déterminer les valeurs propres de Δ.

(iv) Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $u : f \mapsto F$ endomorphisme de E, où

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer les éléments propres de u.

(v) Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Soit $T : f \mapsto Tf$ endomorphisme de E, où

$$Tf : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Justifier que T est bien un endomorphisme de E. Déterminer ses éléments propres.

(vi) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. Soit $T : f \mapsto Tf$ endomorphisme de E, où

$$Tf : x \mapsto \int_0^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Justifier que T est bien un endomorphisme de E. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 82. Montrer : $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}),\ \chi_{AB} = \chi_{BA}$. (On pourra commencer par le cas A inversible puis montrer la densité de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$).
En déduire : $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall A, B \in M_n(\mathbb{C}),\ \chi_{(AB)^k} = \chi_{(BA)^k}$ et $\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ \chi_{A\bar{A}} \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 83. Soit A matrice réelle inversible. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \frac{x^n}{\chi_A(0)}\chi_A\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 84. Quelles sont les matrices $E_{i,j}$ diagonalisables ?
Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. A quelle condition la matrice X^tY est-elle diagonalisable ? (On pourra montrer qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si elle est de trace nulle.)

Exercice 85. On considère trois suites réelles u, v, w vérifiant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n. \end{cases}$$

A quelle condition sur u_0, v_0, w_0 les suites u, v, w convergent-elles ?

Exercice 86. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $\phi : P \in E \mapsto P - (X+1)P'$. Justifier que ϕ est diagonalisable.

Exercice 87. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $\phi : P \in E \mapsto (X^2-1)P'' + 2XP'$. Justifier que ϕ est diagonalisable.

Exercice 88. Déterminer l'ensemble des valeurs de α telles que la matrice suivante soit diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans la cas non diagonalisable, déterminer P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

Exercice 89. Montrer que deux endomorphismes diagonalisables qui commutent sont codiagonalisables.

03/12

Cours 26. Montrer que si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue. Rappeler des conditions nécessaires et suffisantes pour la continuité d'une application linéaire.

Cours 27. Rappeler la définition séquentielle de la compacité. Montrer qu'un compact est toujours fermé borné. Que dire de la réciproque ?

Cours 28. Montrer que l'image continue d'un compact est un compact. En déduire le théorème des bornes pour une application continue à valeurs réelles.

Exercice 90. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ est continu si et seulement si $\{x \in E \mid \|u(x)\| = 1\}$ est fermée.

Exercice 91 (48, Mines)**.** Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

(i) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - y\|$.

(ii) Si $F \neq E$, montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $d(u, F) = 1 = \|u\|$.

(iii) En déduire que E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

Exercice 92.

(i) Soit K compact de $(E, \|.\|)$ espace vectoriel normé. Soit (u_n) suite d'éléments de K. Montrer que si (u_n) n'a qu'une valeur d'adhérence, alors (u_n) converge vers celle-ci.

(ii) Soit $0 < \alpha < 1$. Déterminer les suites réelles bornées telles que $(u_n + \alpha u_{2n})$ converge. On pourra poser $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \alpha u_{2n}$ et $v_n = u_n - \frac{1}{1+\alpha}\ell$.

Exercice 93. Soit K compact non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. Soit $f : K \to K$ telle que :

$$\forall x, y \in K,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 94. Montrer qu'une application continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 95. Soient K, L compacts disjoints non vides. Montrer que :

$$d(K, L) = \inf_{(x,y)\in K\times L} \|x - y\| > 0.$$

Montrer que le résultat reste valable si l'on suppose seulement L fermé. Est-ce toujours vrai si K est aussi seulement supposé fermé ?

Exercice 96. Soit F fermé non borné de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : F \to \mathbb{R}^N$ continue telle que :

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = +\infty.$$

Montrer qu'il existe $x \in F$ tel que $\|f(x)\| = \inf\limits_{y\in F} \|f(y)\|$.

Exercice 97. Les ensembles suivants sont-ils compacts ?

(i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^4 = 1\}$

(ii) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\}$

Exercice 98. Montrer que l'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I_n\}$ des matrices orthogonales est compact.

Exercice 99. On pose $E = \mathcal{C}([0, 2\pi])$ muni de la norme $\|.\|_2$ et $f_n : x \mapsto e^{inx}$. Montrer que $\overline{B}(0, 1)$ n'est pas compacte. (On pourra calculer $\|f_n - f_m\|_2$).

10/12

Question 29. On place r boules dans n urnes, avec $n \geq r$, chaque urne pouvant contenir plusieurs boules. Déterminer la probabilité de l'événement : "il existe une urne contenant au moins deux boules".

Question 30. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire r sans remise. Quelle est la probabilité de tirer les numéros dans l'ordre strictement croissant ?

Question 31. Une urne contient N boules, p blanches et $N - p$ noires. Quelle est la probabilité que la k-ième boule blanche tirée apparaisse lors du n-ième tirage ?

Cours 32. Rappeler la définition d'une tribu. Montrer qu'une intersection de tribus est une tribu. Que dire de l'union de deux tribus ?

Cours 33. Rappeler la définition d'une probabilité sur un espace probabilisable. Énoncer les propriétés de continuité croissante / décroissante pour des suites d'événements. Démontrer qu'une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $\mathbb{P}(\{n\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Cours 34. Rappeler la définition d'une variable aléatoire discrète, du système complet d'événements associé. Énoncer la formule des probabilités totales pour une variable aléatoire discrète.
Définir pour une variable aléatoire discrète espérance et variance. Ces notions ont-elles toujours un sens ?

Exercice 100 (Lemmes de Borel-Cantelli)**.** Soit (A_n) une suite d'événements d'une tribu $\mathcal{A}$.

(i) On suppose $\sum \mathbb{P}(A_n)$ convergente. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$ où

$$\limsup A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

(ii) Si les A_k sont de plus indépendants, montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty \implies \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1.$$

Exercice 101. Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n. On tire avec remise (de manière indépendante) des boules uniformément jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note T le nombre de tirages nécessaires. L'objectif est de déterminer la loi de T.

(i) Quelles sont les valeurs possibles pour T ?

(ii) Déterminer $\mathbb{P}(T > k \mid T > k-1)$ pour des k à préciser.

(iii) En déduire $\mathbb{P}(T = k)$.

Exercice 102. Soit X variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit f définie sur $f(\Omega)$. Sous quelle(s) condition(s) les variables aléatoires X et $f(X)$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 103. Soient $0 < p < 1$, (X_k) i.i.d. de loi de Rademacher de paramètre p :

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p.$$

Déterminer $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(Y_n = 1)$ où $Y_n = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Exercice 104. Soit X variable aléatoire de loi binomiale de paramètres (n, p). Montrer que pour $\lambda, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathbb{P}(X - np > n\varepsilon) \leq \mathbb{E}\left(e^{\lambda(X - np - n\varepsilon)}\right).$$

On détaillera ensuite le calcul du membre de droite.

Exercice 105 (Approximation de Poisson par des binomiales)**.** On dit qu'une suite de variables aléatoires (X_n) à valeurs dans $\mathbb{N}$ converge en loi vers X si :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{P}(X = k).$$

Montrer que si $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $np_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda$, alors (X_n) converge en loi vers $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 106 (Truquer des dés pour une loi uniforme)**.** Montrer qu'il n'est pas possible de truquer deux dés de sorte que la somme des résultats suive une loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$. (On pourra considérer les fonctions génératrices associées.)

Exercice 107 (Identité de Wald)**.** Soient $X_1, \ldots, X_n$ et N variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mutuellement indépendantes. On suppose que N est à valeurs dans $[\![1, n]\!]$, et que les X_i sont identiquement distribuées. On définit :

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Montrer que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$ et $Var(Y) = Var(X)\mathbb{E}(N) + \mathbb{E}(X)^2 Var(N)$.

Exercice 108 (Inégalité de Hoeffding)**.**

17/12

Cours 35. Rappeler les différents modes de convergence d'une série de fonctions. On montrera les différentes implications qui les relient.

Exercice 109. Montrer que la limite uniforme de fonctions continues est une fonction continue. Cela est-il encore vrai pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (i.e. dérivables de dérivée continue) ?

Exercice 110. Montrer que la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynomiales est une fonction polynomiale. Est-ce encore vrai sur un segment ?

Exercice 111 (Exponentielle de matrices)**.**

Exercice 112. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n.$$

Discuter les modes de convergence de (f_n) selon la valeur de α.

Exercice 113. Soit (f_n) une suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = n^2 x(1-nx).$$

Discuter les modes de convergence de (f_n). On s'intéressera en particulier à la convergence uniforme sur $[a,1]$ pour $a \in]0,1[$ fixé.

Exercice 114. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = x(1+n^\alpha e^{-nx}).$$

Discuter les modes de convergence de (f_n) selon la valeur de α. En déduire la valeur de :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})\mathrm{d}x.$$

Exercice 115. Déterminer les différents modes de convergence de la série de fonctions de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}.$$

Exercice 116. Soit (a_n) une suite de réels positifs décroissante. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = a_n x^n (1-x).$$

Montrer la convergence simple de la série de terme général (f_n). Donner une CNS pour avoir convergence uniforme, puis pour avoir convergence normale.

Exercice 117. Soient (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers f continue sur $[a,b]$ et (x_n) une suite de $[a,b]$ de limite x. Montrer que $f_n(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

07/01

Cours 36. Rappeler la définition des notions de convergence simple et convergence uniforme d'une suite de fonctions. Montrer que la seconde implique la première. Donner un contre-exemple pour l'autre sens. Montrer que si (f_n) suite de fonctions continues converge uniformément vers f sur I intervalle de $\mathbb{R}$, alors f est continue.

Cours 37. Énoncer le théorème d'interversion limite - intégrale (ou somme - intégrale).

Cours 38. Énoncer le théorème sur la régularité (classe $\mathcal{C}^k$) d'une limite ou d'une somme de suite de fonctions.

Exercice 118. Soient (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers f continue sur $[a,b]$ et (x_n) une suite de $[a,b]$ de limite x. Montrer que $f_n(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

Exercice 119. Montrer que la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynomiales est une fonction polynomiale. Est-ce encore vrai sur un segment ?

Exercice 120. Montrer que la limite uniforme de fonctions continues est une fonction continue. Cela est-il encore vrai pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (i.e. dérivables de dérivée continue) ?

Exercice 121. Posons $u_0 = 1$, et $u_{n+1} : x \mapsto \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$ sur $[0,1]$. Montrer que $\sum u_n$ converge normalement.

Exercice 122. Considérons les fonctions suivantes :

$$\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \quad \text{et} \quad F : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n.$$

Montrer que ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur un domaine à déterminer. Déterminer sa limite en $+\infty$.
Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{x}{n} + \ln \frac{n}{n-x} \right).$$

Exercice 123 (Fonction zeta alternée)**.** Montrer que la fonction définie ci-dessous est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\eta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

Exercice 124. Montrer que le fonction suivante est bien définie, continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}.$$

En donner la limite en $+\infty$, puis un équivalent (on considèrera $g_n : x \mapsto x f_n(x)$).
Par une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent en 0 de S.

14/01

Cours 39. Énoncer et démontrer le lemme d'Abel. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière et l'utilisation du critère de d'Alembert pour le déterminer.

Cours 40. Rappeler le rayon de convergence et la somme d'une combinaison linéaire et d'un produit de Cauchy de séries entières, ainsi que celui de la dérivée et d'une primitive d'une série entière. Énoncer et démontrer le théorème de comparaison pour les séries entières.

Cours 41. Montrer le caractère $\mathcal{C}^\infty$ d'une série entière sur son disque de convergence. En déduire la dérivée à tout ordre d'une série entière.

Exercice 125. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(i) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$	(iii) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$	(v) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin(n) z^n$
(ii) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} z^n$	(iv) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right) z^n$	(vi) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$.

Exercice 126. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum I(n,n) z^n$ où :

$$\forall p, q \in \mathbb{N},\ \int_0^1 t^p (1-t)^q \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 127 (33)**.** Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ série entière de rayon $R > 0$ de somme $f(z)$. Montrer que pour $r \in]0, R[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta.$$

Si de plus $R = +\infty$ et $|f(z)| \leq P(|z|)$ avec $P \in \mathbb{R}_N[X]$, montrer que $f \in \mathbb{C}_N[X]$.

Exercice 128 (66)**.** Pour $\alpha \in [0,1[$, montrer que la fonction suivante est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$:

$$S_\alpha : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sinh(\alpha^n x).$$

Donner son développement en série entière sur $\mathbb{R}$.

Exercice 129 (76). Déterminer le développement en série entière en 0 de :

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 130 (103). Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \cos(n\theta)x^n$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1,1[$.
Montrer que la série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n+1}$ converge et calculer sa somme.

21/01
28/01

Exercice 131. Pour n, p entiers, on note $d_{n,p}$ le nombre de permutations de S_n à p points fixes, $d_n = d_{n,0}$ le nombre de dérangements (permutations sans points fixes) :

$$d_{n,p} = \#\left\{\sigma \in S_n \mid \#\left\{i \in \{1, \cdots, n\} \mid s(i) = i\right\} = p\right\}.$$

(i) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!.$$

(ii) On pose f la somme de la série entière suivante $\sum \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

(iii) En déduire d_n, $d_{n,p}$ et la probabilité asymptotique ($n \to \infty$) de tirer aléatoirement (uniformément) une permutation à p points fixes.

Exercice 132. Montrer que :

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Exercice 133. Soit f la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in]0, R[,\ a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

04/02

Cours 42. Rappeler les propriétés de linéarité, positivité, croissance de l'espérance. Montrer que l'ensemble des variables aléatoires discrètes d'espérance finie est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des variables aléatoires discrètes réelles.

Cours 43. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 1. En déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une vad admettant un moment d'ordre 2.

Cours 44. Rappeler la définition de la fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Justifier la caractérisation de la loi de X par sa fonction génératrice. Exprimer les premiers moments de X selon sa fonction génératrice.

Exercice 134. Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires discrètes. On considère la matrice $C = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))$. Montrer que C est symétrique positive.

Exercice 135. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires de même loi, admettant un moment d'ordre 2. Montrer que, si $X_1 + X_2$ suit la même loi que $2X_1$, alors $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 1$. On dit que les variables sont égales presque sûrement.

Exercice 136. Supposons $X \sim \mathcal{G}(p)$. Calculer $\mathbb{E}(1/X)$.

Exercice 137. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois géométriques de paramètre p et q. Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$.
Calculer la probabilité que la matrice $\left(\begin{smallmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right)$ soit diagonalisable.

Exercice 138. Montrer qu'il est impossible de truquer deux dés indépendants, de sorte que leur somme suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

Exercice 139. Soit T variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soit (X_i) une suite de variables aléatoires iid, indépendantes de T. Notons $S = \sum_{i=1}^{T} X_i$. Montrer que $G_S = G_T \circ G_{X_1}$.

Exercice 140. Soit f continue sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$B_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

Pour $x \in]0,1[$, on considère (X_i) iid de loi de Bernoulli de paramètre x. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_i$.

(i) Calculer $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. En notant $\delta(\varepsilon) = \sup\{|f(x)-f(y)| \mid |x-y| < \varepsilon\}$, montrer que :

$$\sup_{x\in[0,1]} |B_n(x) - f(x)| \leq \delta(\varepsilon) + \frac{2\|f\|_\infty}{n\varepsilon^2}.$$

En déduire que (B_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Exercice 141. Soient X et Y variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi jointe :

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X=k, Y=l) = a\frac{k+l}{2^{k+l}}.$$

Déterminer les lois de X et de Y (en particulier a). Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$.

11/02

Cours 45. Expliciter l'algorithme de Gram-Schmidt. En déduire l'existence de familles orthonormales en dimension finie.

Cours 46. Énoncer et démontrer le théorème spectral.

Cours 47. Rappeler la définition d'un endomorphisme orthogonal. Montrer que si un sous-espace vectoriel est stable par u orthogonal, alors son orthogonal aussi. Énoncer le théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux.

Exercice 142. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient $a \in E$ et $k \in \mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction suivante soit un produit scalaire :

$$\varphi : (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle + k\langle x,a\rangle\langle y,a\rangle.$$

Exercice 143. Montrer que l'orthogonal de $\mathbb{R}[X]$ dans $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est réduit à $\{0\}$ pour le produit scalaire :

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 144. Soient $x_1,\dots,x_n$ dans E préhilbertien. Si $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ sont indépendantes de loi uniforme sur $\{-1,1\}$, montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\right\|^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2.$$

En déduire que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\right)^{1/2} \leq \max_{\varepsilon_i\in\{-1,1\}}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\right\|$$

Exercice 145. Montrer que l'application suivante définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$:

$$\varphi : (P,Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Calculer $\varphi(X^p, X^q)$. Déterminer :

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2-at-b)^2\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 146. Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité :

$$\langle x,y\rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y)\rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe α tel que $\|f(\cdot)\| = \alpha \|\cdot\|$ (considérer les vecteurs unitaires). En déduire que $f \in \alpha O(E)$.

Exercice 147. Soit E un espace euclidien. Soient u une isométrie de E et $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k$. Montrer que pour $x \in E$, la suite $(u_n(x))$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\ker(u - id)$. (On utilisera $\ker(u-id) = Im(u-id)^\perp$.)

Exercice 148. Soient A, B matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = {}^tBB$.

(i) Montrer que $\ker A = \ker B$. Montrer que si f et g sont les applications linéaires de matrices respectives A et B, alors :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^q,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle g(x), g(y)\rangle.$$

(ii) Si $e = (e_1, \dots, e_r)$ et $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_r)$ sont bases de F, telles que $\langle e_i, e_j\rangle = \langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j\rangle$, montrer qu'il existe s dans $O(F)$ envoyant e sur $\tilde{e}$. Déduire :

$$\exists U \in O_p(\mathbb{R}),\ A = UB.$$

Exercice 149. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $\alpha > 0$. Posons :

$$S_\alpha = \{M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \mid \det(M) \geq \alpha\}.$$

Montrer que :

$$\inf_{M\in S_\alpha} \operatorname{tr}(AM) = n(\alpha \det(A))^{1/n}.$$

Exercice 150. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\exists!(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ A = OS.$$

Exercice 151. Montrer que $F^\perp = \overline{F}^\perp$.

03/03

Cours 48. Énoncer le théorème de convergence dominée.

Cours 49. Donner le critère pour le caractère $\mathcal{C}^k$ d'une fonction définie par une intégrale à paramètre.

Cours 50. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme de la somme d'une série.

Exercice 152. Donner un développement asymptotique de la forme $\alpha + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ pour la suite de terme général :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n},\ \ n \geq 2.$$

Exercice 153. Montrer la bonne définition de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{t - \lfloor t\rfloor}{t(t+n)}\,\mathrm{d}t.$$

Donner une nouvelle expression de u_n en montrant l'égalité suivante :

$$\forall A > 0,\ \int_0^A \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(t+n)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t - \int_A^{A+n} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\right).$$

En étudiant la série de terme général $v_n - v_{n-1} - \frac{1}{2n}$, où $v_n = nu_n$, déduire un équivalent de u_n.

Exercice 154. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Montrer que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Exercice 155. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Montrer que :

$$\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 156. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Montrer que pour $\alpha > 0$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Exercice 157. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante de limite nulle. Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\exists M > 0,\ \forall x > 0,\ \left|\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq M.$$

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Exercice 158. Montrer l'existence puis calculer :

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 159. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle qu'il existe $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$ vérifiant : $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$. Montrer qu'il existe $g : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = (x-a)^n g(x)$$

Exercice 160. Démontrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\ln \circ \Gamma$ est convexe.

Exercice 161. Démontrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ vérifie :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Exercice 162. Montrer que la fonction suivante est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est continue en 0 et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 163. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^\alpha (\cos t)^n\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer le comportement de la série de terme général $u_n(\alpha)$. Calculer la somme des séries pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 3$.

Exercice 164. Déterminer un développement asymptotique à trois termes de :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}.$$

On pourra écrire $\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y$ comme la somme d'une série numérique.

Exercice 165. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R}$ continue vérifiant $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$. Soit $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ d'intégrale 1 et à support compact. On pose ψ l'application définie par :

$$\psi : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer qu'il existe B telle que $\psi = \phi B$. En déduire que φ s'écrit $x \mapsto \exp xA$.

Exercice 166. (i) Calculer la somme suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

(ii) Pour $a > 0$, montrer que :

$$\int_0^a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

(iii) Montrer que la série de fonctions $\sum \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$. Pour ce faire, en exploitant une comparaison série-intégrale, montrer que :

$$\lim_{a \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2}.$$

10/03

Cours 51. Justifier l'existence et l'unicité du polynôme minimal d'une matrice ou d'un endomorphisme.

Cours 52. Énoncer et démontrer le lemme de décomposition des noyaux.

Cours 53. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme scindé à racines simples annulateur de A. Traiter le cas d'un projecteur.
Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 167 (146)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant exactement n valeurs propres distinctes. Montrer que les seuls endomorphismes commutant avec f sont les polynômes en f.

Exercice 168. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \geq 2$. Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Considérons la matrice compagnon associée :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & & a_0 \\ 1 & 0 & & & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ (0) & & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que l'ensemble des matrices commutant avec C est $\mathbb{K}[C]$. En déduire le commutant de A et sa dimension si $A \in M_2(\mathbb{K})$ est non scalaire.

Exercice 169 (231,233)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que u^2 soit un projecteur, i.e. $u^4 = u^2$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $u^3 = u$.
Si l'on suppose de plus $n = 2p + 1$, tr $u = 0$ et tr $u^2 = 2p$, déterminer dans ce cas la dimension du commutant de u.

Exercice 170 (239)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $A, B \in E = M_n(\mathbb{R})$ considérons l'endomorphisme de E :

$$f : M \in E \mapsto M + \operatorname{tr}(AM)B.$$

Déterminer un polynôme annulateur de f. En déduire une CNS sur A, B pour que f soit diagonalisable.
Déterminer la dimension du commutant de f.

Exercice 171 (243)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $A^3 - A^2 + A = I_n$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors det $A = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $A^3 + A^2 + A = O_n$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors rg A est pair.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si rg $A = 2$, tr $A = 0$ avec $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors A est nilpotente ou diagonalisable.

Exercice 172 (255)**.** Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^p l'est.

Exercice 173 (Preuve de Cayley-Hamilton)**.**

Exercice 174 (Décomposition de Dunford)**.**

Exercice 175 (265,275)**.** Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, tr $A^k = 0$.
Montrer que si $A_1, \dots, A_n$ sont nilpotentes et commutent deux à deux, alors $A_1 \dots A_n = O_n$.

Exercice 176 (276)**.** Soient $a \in \mathbb{C}$ et $M \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que si M et aM sont semblables, alors a est racine de l'unité ou M est nilpotente.

Exercice 177 (277)**.** Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ soit somme de matrices nilpotentes.
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Déterminer les polynômes P pour lesquels $P(A)$ est nilpotente.

Partie MPSI

11/03

Cours 54. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.

Cours 55. Quand dit-on que deux espaces vectoriels sont en somme directe ? Donner la définition de sous-espaces vectoriels supplémentaires. En donner des caractérisations.

Cours 56. Énoncer et démontrer le théorème de la dimension. En dimension finie n, que dire du cardinal d'une famille libre ? génératrice ?

Exercice 178. Dans $E = \mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{R})$, montrer que les ensembles F et G suivants sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E :

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\} \text{ et } G = \mathrm{Vect}\{\sin, \cos\}.$$

Exercice 179. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $F_{a,b} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(a) + f(b) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et en déterminer un supplémentaire.
Montrer que la famille $(\cos, \sin, x \mapsto x\cos x, x \mapsto x \sin x)$ est libre.

Exercice 180. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Soit $a \in E \setminus \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_p\}$. Montrer que $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre.

Exercice 181. Montrer que la famille $(x \mapsto e^{ax})_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 182. Montrer que la famille $(x \mapsto \cos(ax))_{a\in\mathbb{R}_+}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 183. Soient E un espace vectoriel, $a \in E$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $a + F$ soit un sous-espace vectoriel.
Si $b \in E$ et G est un sous-espace vectoriel de E, montrer que :

$$(a+F) \cap (b+G) \neq \varnothing \iff b - a \in F + G.$$

Exercice 184. Montrer que $F = \{x \mapsto P(x)\sin x + Q(x)\cos x \mid P, Q \in \mathbb{R}_n[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dimension finie, dont on déterminera la dimension.

Exercice 185 (MinesSup 33)**.** Soient E, F deux espaces vectoriels, (E_i) une famille de sous-espaces vectoriels de E et (F_j) de F. Soit f une application linéaire de E dans F (i.e. $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ pour tous λ scalaire, $x, y \in E$). Montrer que :

(i) $f\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(E_i)$.

(ii) si f est injective, alors elle conserve la somme directe.

(iii) $\sum_{j=1}^{p} f^{-1}(F_j) \subset f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{p} F_j\right)$

Déterminer une condition suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 186. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soient H un hyperplan de E (i.e. un sev de dimension $n-1$) et D une droite vectorielle de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que H et D soient en somme directe.

Exercice 187. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Montrer que tout sous-espace vectoriel strict de E peut s'écrire comme intersection finie d'hyperplans (i.e. sev de dimension $n-1$). Quel est le nombre minimum d'hyperplans nécessaires ?