Initiation à la programmation impérative. Langage C
L1PC 1er semestre TP 4

Exercice 1 : Calcul approché de la racine carrée d'un nombre réel positif

On désire écrire un programme qui calcule une approximation de la racine carrée d'un nombre réel positif avec une précision donnée. On utilisera la technique suivante dite de recherche dichotomique : soit X le nombre positif dont on cherche la racine carrée. On part d'un intervalle de recherche [0 ; a] dont on sait qu'il contient $\sqrt{X}$. Si X est supérieur à 1, on peut prendre a=X, sinon on prendra a=1. On coupe ensuite l'intervalle en deux et l'on essaie de savoir si $\sqrt{X}$ se trouve dans la moitié gauche ou droite. La fonction carrée étant strictement croissante, il suffit pour cela de comparer X au carré du centre de l'intervalle. On a donc un nouvel intervalle de recherche dont la longueur est la moitié de l'intervalle précédent. On recommence l'opération tant que la longueur de l'intervalle de recherche est supérieure à une précision ϵ donnée. A la fin, tout nombre de l'intervalle de recherche est une valeur approchée de $\sqrt{X}$ à ϵ près. En particulier, l'extrémité gauche est une valeur approchée par défaut, la droite une valeur approchée par excès. Plus formellement, on applique le procédé automatique (algorithme) suivant :

1. Imin = 0 ; **si** (X > 1) Imax = X **sinon** Imax = 1
2. C = (Imin + Imax) / 2
3. **si** (C^2 < X)
   Imin = C
   sinon
   Imax = C
   si ((Imax – Imin) > ε) **retourner** à l'étape 2.
4. **renvoyez** $\sqrt{X}$ = Imin

Le programme demandera X à l'utilisateur et affichera la valeur approchée de la racine carrée de X. La précision sera définie comme une constante. Vous devriez obtenir $\sqrt{2} \simeq 1.414063$.

Exercice 2 : Des lapins, encore des lapins ou la suite de Fibonacci

Leonardo Fibonacci, mathématicien Italien (1175 - 1240) calcule le nombre de couples de lapins obtenus après n mois à partir d'un couple de jeunes lapins sous les hypothèses suivantes :

un couple de jeunes lapins se reproduit :

- tous les mois
- à partir du début du deuxième mois
- en donnant naissance à un nouveau couple après un mois de gestation

Soit f_n est le nombre de couple de lapins au début du $n^{ième}$ mois. Au début du mois 0, il y a 0 couple donc $f_0 = 0$. Au début du premier mois, on a un couple de lapins soit $f_1 = 1$. Au début du deuxième mois, on a toujours un couple soit $f_2 = 1$. Ce couple se reproduit et donnera naissance au début du troisième mois à un jeune couple. On aura donc $f_3 = 2$. Au début du $n^{ième}$ mois le nombre de couples est la somme des couples au début du mois précédent, soit f_{n-1}, plus les couples qui naissent en ce début de $n^{ième}$ mois. Tous les couples du début du $n\text{-}2^{ième}$ mois, soit f_{n-2}, ont pu se reproduire au début du $n\text{-}1^{ième}$ mois, donnant naissance à autant de couples au début du $n^{ième}$ mois soit f_{n-2}. Finalement on a $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pour n supérieur ou égal à 2. Les nombres $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ s'appellent les nombres de Fibonacci.

Ecrivez un programme qui calcule puis affiche les 20 premiers nombres de Fibonacci. On utilisera un tableau d'entiers « fibonacci » de taille 20 que l'on remplira itérativement de sorte que fibonacci[n] = u_n pour n = 0,1,...,19 .

Vous devriez obtenir le résultat suivant :

<u>Pour la culture</u> : la suite de Fibonacci se calcule explicitement par la relation
$u_n = (\sqrt{5}/5)\,[\,((1+\sqrt{5})/2)^n - ((1-\sqrt{5})/2)^n]$. Le nombre $(1+\sqrt{5})/2$ est célèbre : c'est le nombre d'or ou nombre de la divine proportion (cf. Le Da Vinci code).

Exercices complémentaires

Exercice 3 : Tables de multiplications

1. Reprenez l'exercice 4 du TP3 et réécrivez le programme en utilisant une itération de type **`for`**, le nombre de multiplications demandées étant mémorisé dans une constante entière.

2. Améliorez le programme pour qu'il calcule et affiche la note obtenue à l'exercice par l'utilisateur (nombre de bonnes réponses / nombre de questions).

3. Définissez une structure C **`multiplication`** pour mémoriser les informations relatives à une question (par exemple opérandes, réponse).

4. En utilisant un tableau de **`multiplication`**, mémorisez l'exercice au cours de son déroulement et faites afficher un corrigé à la fin du programme, comme par exemple :

    Vous avez repondu a 8 questions sur 10
    A la question 1 : 3 x 7 = , il fallait repondre 21 et vous avez repondu 14
    A la question 1 : 9 x 8 = , il fallait repondre 72 et vous avez repondu 98

Exercice 4 : Triangle de Pascal et coefficients binomiaux

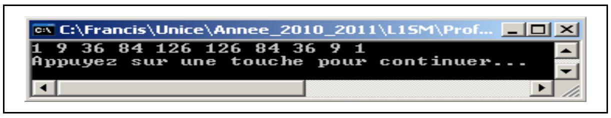
Pascal a un fameux triangle qui lui permet de trouver les coefficients du binôme $(a + b)^n$:

1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
…	…	…	…	…	…	…	…

La $n^{ième}$ ligne de ce triangle contient les n+1 coefficients C_n^p du binôme.

On remarque que : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$, ce qui permet de calculer facilement la ligne n connaissant la ligne n-1.

1. Ecrivez un programme qui calcule successivement les lignes du triangle de Pascal dans un tableau de taille N+1. A la fin du programme le tableau doit contenir la N$^{\text{ième}}$ ligne du triangle de Pascal (<u>indication</u> : construisez la ligne suivante à partir de la précédente en parcourant celle-ci de la droite vers la gauche, la ligne étant construite également de la droite vers la gauche). Avec N=9 on obtient :



2. Utilisez le code développé pour écrire un programme qui affiche le coefficient binomial C_n^p à partir de la donnée par l'utilisateur de p et n (on prendra n <= 30).

Exercice 5 : Cosinus d'un nombre réel

Ecrivez un programme qui calcule le cosinus d'un réel x en utilisant son développement en série (on s'inspirera du programme de calcul de l'exponentielle vu en cours) :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Pour x = 3.14, vous devriez obtenir cos(3.14) $\simeq$ -0.999999.