Calcul différentiel sur l'espace de Wasserstein, formule d'Itô pour un flot de mesures et applications aux EDS de McKean-Vlasov

Mémoire de stage de M2 : Avril-Juin 2020

Thomas Cavallazzi

École Normale Supérieure de Rennes et Université de Rennes 1

Sous la supervision de
Paul-Eric Chaudru de Raynal et Mihai Gradinaru

Table des matières

1 Introduction et notations

Durant mon stage, je me suis intéressé au calcul différentiel sur des espaces de mesures et à quelques applications pour les EDS de McKean-Vlasov, c'est-à-dire des EDS dont les coefficients dépendent de la loi de la solution. La référence principale est le chapitre 5 du livre [CD18] de René Carmona et François Delarue intitulé : *Probabilistic theory of Mean Field Games with applications I.*

L'objectif de la première partie est de dériver, en un certain sens, une fonction $u : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$. Il y a deux notions de dérivation présentées dans [CD18]. D'une part, il y a la L-dérivée, qui repose sur le calcul différentiel usuel sur l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$, on pourra consulter l'appendice pour avoir plus de détails à ce sujet. D'autre part, il y a la dérivée plate, qui repose sur une dérivation " en dimension 1 " le long de segments dans $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$. Bien sûr, sous certaines hypothèses, on peut passer d'une notion à l'autre. Le choix fait ici est de se focaliser sur la notion de dérivée plate contrairement à ce qui est fait dans [CD18]. On s'intéresse dans la partie suivante à la formule d'Itô le long d'un flot de mesures : il s'agit du cœur du stage. Le but est de décrire la dynamique de $t \mapsto u(\mu_t)$ où $(\mu_t)_t$ est la famille de lois marginales d'une certaine classe de semi-martingales continues à valeurs dans L^2. Dans [CD18], la formule d'Itô est énoncée et démontrée dans le cadre de la L-dérivée (théorème 6.2.16). L'objectif était de démontrer la formule d'Itô dans le cadre de la dérivée plate. En suivant la stratégie de la preuve de [CD18], on arrive à démontrer la formule d'Itô avec la dérivée plate avec des hypothèses analogues. Cependant, en explorant une méthode un peu différente, on parvient à affaiblir les hypothèses sur le flot $(\mu_t)_t$ dans le théorème 3.2.2, au prix d'une hypothèse plus forte sur u. Cela s'avère moins restrictif quand on l'applique à une solution d'EDS. De plus, on démontre une formule d'Itô avec la dérivée plate pour des flots de mesures à valeurs dans $\mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$ qui généralise le cas $p = 2$. Dans la suite, on donne quelques applications de la formule d'Itô. Elle permet notamment de donner la forme du générateur du semi-groupe associé à une EDS de McKean-Vlasov, ainsi qu'un résultat de type propagation du chaos pour le système de particules associé à une EDS de McKean-Vlasov. On pourra consulter l'appendice qui contient un théorème d'existence et d'unicité pour les EDS de McKean-Vlasov, ainsi que quelques propriétés de la solution dont on a besoin. Enfin, on étudie un exemple concret où on peut calculer explicitement le flot de probabilités et ainsi illustrer le résultat de propagation du chaos.

Dans la suite, il sera intéressant d'essayer de généraliser la formule d'Itô dans le cadre de processus à sauts. On s'intéressera notamment à des EDS dirigées par des processus stables.

Un grand merci à Mihai et Paul-Eric d'avoir encadré mon stage "à distance" : ce n'est que le début de l'aventure !

Notations

- $\mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ l'ensemble des probabilités sur $\mathbf{R}^d$.
- $\mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$: l'espace des probabilités sur $\mathbf{R}^d$ ayant un moment d'ordre p pour $p \geq 1$.
- W_p la distance de Wasserstein d'ordre p.
- $\mathcal{C}_{b,p}(\mathbf{R}^d) := \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}),\, (1 + |.|)^{-p} f(.) \in \mathcal{C}_b^0(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}) \right\}$
- $\mu(f) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\, d\mu(x)$ pour $\mu \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$
- $M_p^p(\mu) = \int_{\mathbf{R}^d} |x|^p\, d\mu(x)$ pour $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$.
- $\overline{\mu}_x^N : \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k}$ pour $x = (x_1, \ldots, x_N) \in (\mathbf{R}^d)^N$.
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité complet et sans atomes.
- $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbf{P}, B)$ un espace de probabilité muni d'une filtration satisfaisant les conditions habituelles et d'un $(\mathcal{F}_t)_t$-mouvement brownien standard de dimension d noté B.
- $\mathcal{L}(X)$ la loi d'une variable aléatoire X.
- $\mathbf{R}^{d\times d}$ les matrices de carrées de tailles d.
- A^* la transposée de $A \in \mathbf{R}^{d\times d}$.
- I la matrice identité ou également l'application identité $x \mapsto x$.
- $[A]_{i,j}$ le coefficient en position (i, j) d'une matrice A.
- M^T la martingale locale M arrêtée en un temps d'arrêt T fini presque sûrement.

2 Calcul différentiel sur l'espace de Wasserstein : dérivée plate

Le but de cette partie est de dériver une fonction $u : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$. L'espace $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ est muni de la distance de Wasserstein d'ordre 2 notée W_2, on pourra consulter l'appendice qui contient les résultats liés aux distances de Wasserstein utilisés ici. Il y a essentiellement deux notions de dérivation, qui sont distinctes. La première est la notion de L-dérivée qui consiste à voir u comme une fonction de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$ à valeurs réelles, où $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé suffisamment riche pour porter des variables aléatoires de lois quelconques : c'est pour cela qu'il est supposé sans atomes. On peut ainsi utiliser le calcul différentiel usuel des espaces vectoriels normés. C'est la notion de dérivation qui est principalement utilisée dans [CD18]. On pourra consulter l'appendice pour avoir plus de détails au sujet de la L-dérivée. On choisit de se concentrer ici sur la notion de dérivée plate d'une fonction $u : \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$, où $\mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$ est également muni de la distance de Wasserstein W_p, qui consiste à profiter de la convexité de l'espace des probabilités et donc à considérer les taux d'accroissement de : $t \in [0,1] \mapsto u(t\mu + (1-t)\nu)$, pour $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$.

2.1 Définition et premières propriétés

On fixe $p \geq 1$.

Définition 2.1.1. *Soit $u : \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$. On dit que u admet une dérivée plate s'il existe une application :*

$$\frac{\delta u}{\delta m} : (\mu, x) \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \mapsto \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \in \mathbf{R},$$

continue et telle que :

- *Pour tout $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$ compact, il existe $C_{\mathcal{K}} > 0$ telle que :*

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \sup_{\mu \in \mathcal{K}} \left\{ \left| \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \right| \right\} \leq C_{\mathcal{K}}(1 + |x|^p).$$

- *Pour toute $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$:*

$$u(\mu) - u(\nu) = \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta u}{\delta m}(t\mu + (1-t)\nu)(x)\, d(\mu - \nu)(x)\, dt.$$

Remarque 2.1.2.

- *Si u admet une dérivée plate, alors u est continue par théorème de convergence dominée.*
- *L'ajout d'une constante à $\frac{\delta u}{\delta m}$ ne change rien.*

Proposition 2.1.3. *Soit $\frac{\delta u}{\delta m} : \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ une application continue vérifiant le premier point de la définition précédente. Alors u admet $\frac{\delta u}{\delta m}$ comme dérivée plate si et seulement si pour toute $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$, l'application : $t \in [0,1] \mapsto u(t\mu + (1-t)\nu)$ est dérivable avec :*

$$\frac{d}{dt} u(t\mu + (1-t)\nu) = \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta u}{\delta m}(t\mu + (1-t)\nu)(x)\, d(\mu - \nu)(x).$$

Démonstration : Le sens retour est immédiat puisque la dérivée est continue par rapport à t (par convergence dominée), on peut intégrer entre 0 et 1. Pour le sens direct, on fixe $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$. On note pour $t \in [0,1]$: $m_t = t\mu + (1-t)\nu$. On fixe $t \in [0,1]$ et $h > 0$ tel que $t + h \in [0,1]$, le cas $h < 0$ étant analogue. Par définition de la dérivée plate on a :

$$\begin{aligned}
u(m_{t+h}) - u(m_t) &= \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta u}{\delta m}(vm_{t+h} + (1-v)m_t)(x)\, h\, d(\mu - \nu)(x)\, dv \\
&= h \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta u}{\delta m}(m_t)(x)\, d(\mu - \nu)(x) \\
&+ h \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} \left(\frac{\delta u}{\delta m}(vm_{t+h} + (1-v)m_t)(x) - \frac{\delta u}{\delta m}(m_t)(x) \right) d(\mu - \nu)(x)\, dv
\end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer que le dernier terme est un $o(h)$. Soit $(h_n)_n$ une suite, disons strictement positive, qui tend vers 0. Alors à $(x, v) \in \mathbf{R}^d \times [0,1]$ fixé, on a :

$$\frac{\delta u}{\delta m}(vm_{t+h_n} + (1-v)m_t)(x) \to \frac{\delta u}{\delta m}(m_t)(x).$$

En effet on a :

$$\begin{aligned}
W_p^p(vm_{t+h_n} + (1-v)m_t, m_t) &\leq vW_p^p(m_{t+h_n}, m_t) \quad \text{d'après la proposition 6.1.11} \\
&\leq W_p^p(m_{t+h_n}, m_t) \\
&\leq h_n W_p^p(\mu, \nu) \quad \text{d'après la proposition 6.1.12} \\
&\underset{n \to +\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

De plus, puisque $m_{t+h_n} \overset{W_p}{\to} m_t$, on déduit que l'ensemble : $\{vm_{t+h_n} + (1-v)m_t,\ v \in [0,1],\ n \geq 1\}$ est relativement compact par caractérisation séquentielle. Il existe donc $C > 0$ telle que :

$$\forall v \in [0,1],\ \forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbf{R}^d,\ \left| \frac{\delta u}{\delta m}(vm_{t+h_n} + (1-v)m_t)(x) - \frac{\delta u}{\delta m}(m_t)(x) \right| \leq 2C(1 + |x|^p).$$

Le théorème de convergence dominée assure donc que :

$$\int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} \left(\frac{\delta u}{\delta m}(vm_{t+h_n} + (1-v)m_t)(x) - \frac{\delta u}{\delta m}(m_t)(x) \right) d(\mu - \nu)(x)\, dv \to 0.$$

D'où le résultat. □

2.2 Exemples

Donnons maintenant des exemples de fonctions admettant une dérivée plate. Avant cela, on donne deux lemmes de continuité.

Lemme 2.2.1. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d; \mathbf{R})$ telle que :*

$$\forall x \in \mathbf{R}^d,\ |f(x,y)| \leq C(1 + |x|^p + |y|^p).$$

Alors l'application $(\mu, x) \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \mapsto \int_{\mathbf{R}^d} f(x,y) d\mu(y)$ est continue.

Démonstration : Soit $(\mu_n)_n$ et $(x_n)_n$ telles que :

$$\mu_n \overset{W_p}{\to} \mu \quad \text{et} \quad x_n \to x.$$

Soit $\epsilon > 0$, comme $\mu_n \overset{W_p}{\to} \mu$, le théorème 6.1.9 assure que $\mu_n \rightharpoonup \mu$, donc la suite est tendue et :

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{n\geq 1} \int_{|x|\geq R} |x|^p \, d\mu_n(x) = 0.$$

Il existe donc $R > 0$ tel que :

$$\sup_{n\geq 1} \int_{|x|\geq R} d\mu_n(x) \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \sup_{n\geq 1} \int_{|x|\geq R} |x|^p \, d\mu_n(x) \leq \epsilon.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbf{R}^d} f(x_n, y) d\mu_n(y) - \int_{\mathbf{R}^d} f(x, y) d\mu(y) \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbf{R}^d} f(x_n, y) d\mu_n(y) - \int_{\mathbf{R}^d} f(x, y) d\mu_n(y) \right| + \left| \int_{\mathbf{R}^d} f(x, y) d\mu_n(y) - \int_{\mathbf{R}^d} f(x, y) d\mu(y) \right| \\
&\leq \int_{|y|\leq R} |f(x_n, y) - f(x, y)| d\mu_n(y) + \int_{|y|>R} |f(x_n, y) - f(x, y)| d\mu_n(y) + \left| \int_{\mathbf{R}^d} f(x, y) d\mu_n(y) - \int_{\mathbf{R}^d} f(x, y) d\mu(y) \right|
\end{aligned}$$

Le théorème de Heine assure que pour n assez grand et pour tout $y \in \overline{B}(0, R)$:

$$|f(x_n, y) - f(x, y)| \leq \epsilon.$$

Donc pour n assez grand :

$$\int_{|y|\leq R} |f(x_n, y) - f(x, y)| d\mu_n(y) \leq \epsilon.$$

Le second terme de l'inégalité précédente est majorée par :

$$\int_{|y|>R} C(2 + |x_n|^p + |x|^p + 2|y|^p) \, d\mu_n(y).$$

Puisque pour n assez grand, $|x_n| \leq |x| + 1$, on déduit que pour n assez grand :

$$\int_{|y|>R} |f(x_n, y) - f(x, y)| d\mu_n(y) \leq C(2 + |x|^p + (|x| + 1)^p + 2)\epsilon.$$

Le dernier terme tend vers 0 d'après le théorème 6.1.9 puisque $f(x, .) \in \mathcal{C}_{b,p}(\mathbf{R}^d)$, d'où le résultat. □

Lemme 2.2.2. *Soit $g : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$ une application continue telle que pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathbf{R}^d \times \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$, il existe $C_{\mathcal{K}} > 0$ telle que pour tout $y \in \mathbf{R}^d$:*

$$\sup_{(x,\mu)\in\mathcal{K}} |g(x, y, \mu)| \leq C(1 + |y|^p).$$

Alors l'application :

$$(\mu, x) \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \mapsto \int_{\mathbf{R}^d} g(x, y, \mu) \, d\mu(y),$$

est continue.

Démonstration : On raisonne par caractérisation séquentielle. Soit $(\mu_n)_n$ une suite de $\mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$ qui converge vers μ pour W_p et $x_n \to x$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbf{R}^d} g(x_n, y, \mu_n)\, d\mu_n(y) - \int_{\mathbf{R}^d} g(x, y, \mu)\, d\mu(y)\right| \\
&\leq \left|\int_{\mathbf{R}^d} g(x_n, y, \mu_n)\, d\mu_n(y) - \int_{\mathbf{R}^d} g(x, y, \mu)\, d\mu_n(y)\right| + \left|\int_{\mathbf{R}^d} g(x, y, \mu)\, d\mu_n(y) - \int_{\mathbf{R}^d} g(x, y, \mu)\, d\mu(y)\right| \\
&= ⓐ + ⓑ
\end{aligned}$$

ⓑ tend vers 0 puisque $\mu_n \overset{W_p}{\to} \mu$ et $g(x, ., \mu) \in \mathcal{C}_{b,p}(\mathbf{R}^d)$. Montrons que ⓐ tend également vers 0. On fixe $\varepsilon > 0$ et on remarque qu'il existe $R > 0$ tel que :

$$\forall n \geq 1,\ \mu_n(B(0,R)^c) \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{|x| \geq R} |x|^p\, d\mu_n(x) \leq \varepsilon.$$

Le théorème de Heine assure que g est uniformément continue sur l'ensemble :

$$\{x_n,\ n \geq 1\} \times B(0,R) \times \{\mu_n,\ n \geq 1\}.$$

Ainsi il existe $N > 0$ tel que :

$$\forall n \geq N,\ \forall y \in B(0,R),\ |g(x_n, y, \mu_n) - g(x, y, \mu)| \leq \varepsilon.$$

Les hypothèses assurent qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall \nu \in \{\mu_n,\ n \geq 1\} \cup \{\mu\},\ \forall u \in \{x_n,\ n \geq 1\} \cup \{x\},\ \forall y \in \mathbf{R}^d,\ |g(u, y, \nu)| \leq C(1 + |y|^p).$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
ⓐ &= \int_{B(0,R)} |g(x_n, y, \mu_n) - g(x, y, \mu)|\, d\mu_n(y) + \int_{B(0,R)^c} |g(x_n, y, \mu_n) - g(x, y, \mu)| \\
&\leq \varepsilon + \int_{B(0,R)^c} 2C(1 + |y|^p)\, d\mu_n(y) \\
&\leq \varepsilon + 4C\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.3. *On n'a pas nécessairement besoin de continuité par rapport à la variable y mais juste que $(x, \mu) \mapsto g(x, y, \mu)$ soit uniformément continue sur les compacts et ce uniformément par rapport à y dans un compact pour contrôler l'intégrale sur $B(0,R)$ dans ⓐ.*

On donne maintenant des exemples de fonctions admettant une dérivée plate.

Exemple 2.2.4. *On se donne $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ telle que :*

$$\forall x \in \mathbf{R}^d,\ |\phi(x)| \leq C(1 + |x|^p),$$

et on considère :

$$u : \mu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \mapsto \int_{\mathbf{R}^d} \phi\, d\mu.$$

Alors un calcul direct donne que pour toute $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$:

$$\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(.) = \phi(.).$$

Exemple 2.2.5. *On se donne $h \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d; \mathbf{R})$ telle que :*

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^d,\ |h(x,y)| \leq C(1 + |x|^p + |y|^p),$$

et on considère :

$$u : \mu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \mapsto \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} h(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y).$$

Alors on a pour toute $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$:

$$\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(.) = \int_{\mathbf{R}^d} h(y,.) d\mu(y) + \int_{\mathbf{R}^d} h(.,y)\, d\mu(y).$$

Le candidat pour la dérivée plate est bien continue sur $\mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d$ par le premier lemme précédent. De plus, on a :

$$\left| \int_{\mathbf{R}^d} h(y,x) d\mu(y) + \int_{\mathbf{R}^d} h(x,y)\, d\mu(y) \right| \leq 2C \left(1 + |x|^2 + \int_{\mathbf{R}^d} |y|^2\, d\mu(y) \right),$$

ce qui montre la condition de croissance que doit vérifier la dérivée plate. Enfin, fixons $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$ et $t \in [0,1]$. On a :

$$u(t\mu + (1-t)\nu) = \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} h(x,y)\, d(\nu + t(\mu - \nu))(x)\, d(\nu + t(\mu - \nu))(y).$$

En développant et en dérivant, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} u(t\mu + (1-t)\nu) \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} h(x,y)\, d\nu(x)\, d(\mu - \nu)(y) + \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} h(x,y)\, d\nu(y)\, d(\mu - \nu)(x) \\
&+ 2t \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} h(x,y)\, d(\mu - \nu)(x)\, d(\mu - \nu)(y) \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} h(x,y)\, d(\nu + t(\mu - \nu))(x)\, d(\mu - \nu)(y) + \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} h(x,y)\, d(\nu + t(\mu - \nu))(y)\, d(\mu - \nu)(x) \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta u}{\delta m} u(t\mu + (1-t)\nu)(x)\, d(\mu - \nu)(x)
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exemple 2.2.6. *On se donne $g : \mathbf{R}^d \times \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$ continue et telle que :*

- *Pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$, il existe $C_{\mathcal{K}} > 0$ telle que :*

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \sup_{\mu \in \mathcal{K}} |g(x,\mu)| \leq C_{\mathcal{K}}(1 + |x|^p).$$

- *Pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, $g(x,.)$ admet une dérivée plate $\frac{\delta g}{\delta m}(x,\mu)(.)$ telle que :*

$$(x, \mu, v) \in \mathbf{R}^d \times \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \mapsto \frac{\delta g}{\delta m}(x,\mu)(v),$$

est continue et pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$, il existe $C_\mathcal{K} > 0$ telle que pour tout $x, v \in \mathbf{R}^d$:

$$\sup_{\mu \in \mathcal{K}} \left| \frac{\delta g}{\delta m}(x, \mu)(v) \right| \leq C_\mathcal{K}(1 + |x|^p + |v|^p).$$

On considère :

$$\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \mapsto u(\mu) := \int_{\mathbf{R}^d} g(x, \mu)\, d\mu(x).$$

Alors pour toute $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$, on a :

$$\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(v) = g(v, \mu) + \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta g}{\delta m}(x, \mu)(v)\, d\mu(x).$$

Le candidat pour la dérivée plate vérifie clairement les hypothèses de continuité (par le lemme 2.2.2) et de croissance que doit vérifier une dérivée plate. Il s'agit donc, d'après la proposition 2.1.3, de dériver :

$$t \in [0, 1] \mapsto \int_{\mathbf{R}^d} g(x, m_t)\, dm_t(x),$$

où $m_t = t\mu + (1 - t)\nu$, pour $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$. On a :

$$\int_{\mathbf{R}^d} g(x, m_t)\, dm_t(x) = \int_{\mathbf{R}^d} g(x, m_t)\, d\nu(x) + t \int_{\mathbf{R}^d} g(x, m_t)\, d(\mu - \nu)(x)$$

Or les hypothèses faites assurent que $t \mapsto g(x, m_t)$ est dérivable pour tout x et pour tout $t \in [0, 1]$, de dérivée :

$$\int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta g}{\delta m}(x, m_t)(v)\, d(\mu - \nu)(v).$$

On vérifie qu'on peut bien appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale. On a donc en utilisant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}^d} g(x, m_t)\, dm_t(x) \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta g}{\delta m}(x, m_t)(v)\, d\nu(x)\, d(\mu - \nu)(v) + t \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta g}{\delta m}(x, m_t)(v)\, d(\mu - \nu)(x)\, d(\mu - \nu)(v) \\
&+ \int_{\mathbf{R}^d} g(x, m_t)\, d(\mu - \nu)(x) \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta u}{\delta m}(m_t)(v) d(\mu - \nu)(v).
\end{aligned}$$

2.3 Projections empiriques

Un objet intéressant associé à u est sa famille de projections empiriques. Cela permet de se ramener à une fonction différentiable au sens usuel sur $(\mathbf{R}^d)^N$. Cela s'avérera utile lorsqu'on s'intéressera au système de particules associé à une EDS de McKean-Vlasov.

Définition 2.3.1. *Soit $N \geq 1$. On définit alors :*

$$u^N : \left\{ \begin{array}{cl} (\mathbf{R}^d)^N & \to \mathbf{R} \\ (x_1, \ldots, x_N) & \mapsto u\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k} \right) \end{array} \right. .$$

Donnons maintenant un théorème de régularité des projections empiriques avec la dérivée plate.

Proposition 2.3.2. *Soit $u : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$ admettant une dérivée plate $\frac{\delta u}{\delta m}$ telle que :*

- *Pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, $\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(.) \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R})$.*
- *Les applications :*

$$(\mu, x) \in (\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \mathbf{R}^d) \mapsto \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \in \mathbf{R}^d,$$
$$(\mu, x) \in (\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \mathbf{R}^d) \mapsto \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \in \mathbf{R}^{d\times d},$$

sont continues.

- *Pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, l'application $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \mapsto \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x)$ admet une dérivée plate :*

$$(\mu, v) \mapsto \frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(.)(x)\right)(\mu)(v) \in \mathbf{R}^d,$$

qui est $\mathcal{C}^1$ par rapport à v avec :

$$(\mu, x, v) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \mapsto \partial_v \frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(.)(x)\right)(\mu)(v) \in \mathbf{R}^{d\times d},$$

continue.

Alors pour tout $N \geq 1$, la projection empirique u^N de u est de classe $\mathcal{C}^2$. De plus, on a pour tout $(x_1, \dots, x_N) \in (\mathbf{R}^d)^N$:

$$\partial_{x_i} u^N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N}\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}_x^N)(x_i),$$

et

$$\partial_{x_j}\partial_{x_i} u^N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N^2}\partial_v \frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(.)(x_i)\right)(\overline{\mu}_x^N)(x_j) + \mathbf{1}_{i=j}\frac{1}{N}\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}_x^N)(x_j),$$

où on rappelle que : $\overline{\mu}_x^N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \delta_{x_k}$.

Démonstration : Un calcul simple montre que :

$$\begin{aligned} u^N(x+h) - u^N(x) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}_x^N)(x_i).h_i \\ &+ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \int_0^1\int_0^1 \left[\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(v\overline{\mu}_{x+h}^N + (1-v)\overline{\mu}_x^N)(x_i + th_i) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}_x^N)(x_i)\right].h_i \, dt\, dv. \end{aligned}$$

Le dernier terme est majoré, en valeur absolue, par :

$$|h|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \int_0^1\int_0^1 \left|\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(v\overline{\mu}_{x+h}^N + (1-v)\overline{\mu}_x^N)(x_i + th_i) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}_x^N)(x_i)\right| dt\, dv,$$

si bien que pour montrer l'aspect différentiable à l'ordre 1, il suffit de voir que pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(v\overline{\mu}^N_{x+h} + (1-v)\overline{\mu}^N_x)(x_i + th_i) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}^N_x)(x_i) \right| dt\, dv \underset{h \to 0}{\to} 0 \,.$$

Or :

$$\sup_{v \in [0,1]} W_2^2(v\overline{\mu}^N_{x+h} + (1-v)\overline{\mu}^N_x, \overline{\mu}^N_x) \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |h_k|^2 \to 0.$$

Ainsi la continuité de l'intégrande par rapport à $(\mu, x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d$ permet de conclure que u^N est $\mathcal{C}^1$ avec pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$:

$$\partial_{x_i} u^N(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{N} \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}^N_x)(x_i),$$

qui est bien continue. Pour les dérivées d'ordre 2, on remarque que si $i \neq j$, le raisonnement fait précédemment s'applique, coordonnée par coordonnée, à $\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}^N_x)(x_i)$ et on a :

$$\partial_{x_j} \partial_{x_i} u^N(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{N^2} \partial_v \frac{\delta}{\delta m} \left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(.)(x_i) \right) (\overline{\mu}^N_x)(x_j).$$

Si $i = j$, on note pour $h_j \in \mathbf{R}^d$: $\tilde{h_j} = (0, \ldots, 0, h_j, 0, \ldots, 0) \in (\mathbf{R}^d)^N$, où h_j apparaît à la j-ème coordonnée :

$$\begin{aligned}
&\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}^N_{x+\tilde{h_j}})(x_j + h_j) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}^N_x)(x_j) \\
&= \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}^N_{x+\tilde{h_j}})(x_j + h_j) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}^N_{x+\tilde{h_j}})(x_j) + \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}^N_{x+\tilde{h_j}})(x_j) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}^N_x)(x_j) \\
&= a + b.
\end{aligned}$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned}
a &= \int_0^1 \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}^N_{x+\tilde{h_j}})(x_j + th_j) h_j \, dt \\
&= \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}^N_x)(x_j) h_j + \int_0^1 \left(\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}^N_{x+\tilde{h_j}})(x_j + th_j) - \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}^N_x)(x_j) \right) h_j \, dt \\
&= \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}^N_x)(x_j) h_j + o(|h|),
\end{aligned}$$

par continuité de $\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}$ sur $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d$. Le terme b se traite comme dans le cas $i \neq j$. En effet, on a :

$$b = \frac{1}{N} \partial_v \frac{\delta}{\delta m} \left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(.)(x_j) \right) (\overline{\mu}^N_x)(x_j) + o(|h|).$$

Cela montre que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, N\}$:

$$\partial_{x_j} \partial_{x_i} u^N(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{N^2} \partial_v \frac{\delta}{\delta m} \left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(.)(x_i) \right) (\overline{\mu}^N_x)(x_j) + \mathbf{1}_{i=j} \frac{1}{N} \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\overline{\mu}^N_x)(x_j).$$

On vérifie aisément qu'il s'agit d'une fonction continue sur $(\mathbf{R}^d)^N$. $\square$

3 Formule d'Itô avec la dérivée plate le long d'un flot de probabilités

Le but de cette partie est de donner une expression intégrale exprimant la dynamique d'une application de la forme $t \in \mathbf{R}^+ \mapsto u(\mu_t)$, où $u : \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$ admet une dérivée plate et où $t \in \mathbf{R}^+ \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$ est continue. En fait on se restreindra au cas où $(\mu_t)_{t\in\mathbf{R}^+}$ est la famille de marginales d'un processus d'Itô voire d'une semi-martingale avec des hypothèses qu'on verra par la suite. L'objectif était d'aborder avec la dérivée plate les résultats obtenus dans [CD18] dans le cas $p = 2$ et avec la L-dérivée. On pourra consulter l'appendice pour voir les résultats concernant la L-dérivée et notamment le théorème 6.2.16. En particulier, le théorème 3.2.2, généralise le résultat du théorème 6.2.16 présent dans [CD18] avec des hypothèses plus fortes sur u mais moins fortes sur $(\mu_t)_t$. La preuve consiste soit à dériver directement l'application $t \in \mathbf{R}^+ \mapsto u(\mu_t)$ lorsque c'est possible, soit à écrire $u(\mu_t) - u(\mu_0)$ comme une somme télescopique le long d'une subdivision de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0.

3.1 Une première preuve pour les EDS

On donne ici une première preuve, qui est assez naturelle, de la formule d'Itô pour le flot de lois marginales associé à une EDS.

On considère : $b : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ et $\sigma : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^{d\times d}$ deux fonctions L-lipschitziennes et on suppose de plus que σ est bornée. Le théorème 6.3.1 assure qu'il existe une unique solution à l'EDS :

$$\begin{cases} dX_t &= b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t \\ X_0 &= \xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d) \end{cases}.$$

On sait par le théorème 6.3.1 que :

$$t \in \mathbf{R}^+ \mapsto X_t \in L^2,$$

est continue. On note $\mu_t = \mathcal{L}(X_t)$ la loi de X_t. On va montrer le théorème suivant qui donne la dynamique de $t \mapsto u(\mu_t)$.

Théorème 3.1.1. *Soit $u : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$ admettant une dérivée plate $\frac{\delta u}{\delta m}$ telle que :*

- *Pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, $\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(.) \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$.*
- *Pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, il existe $C_{\mathcal{K}} > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$:*

$$\sup_{\mu\in\mathcal{K}} \left| \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \right| \leq C_{\mathcal{K}}.$$

- *Les applications :*

$$(\mu, x) \in (\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \mathbf{R}^d) \mapsto \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \in \mathbf{R}^d,$$
$$(\mu, x) \in (\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \mathbf{R}^d) \mapsto \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \in \mathbf{R}^{d\times d},$$

sont continues.

Alors $t \in \mathbf{R}^+ \mapsto u(\mu_t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$u(\mu_t) = u(\mu_0) + \int_0^t \mathbf{E}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s).b(X_s)\right) ds + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{E}\left(\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s).a(X_s)\right) ds,$$

où $a(x) := \sigma\sigma^*(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^d$ et où :

$$\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s).a(X_s) = Tr\left(\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)a(X_s)\right).$$

Démonstration :

Étape 1 : On commence par remarquer que pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, il existe $C_{\mathcal{K}} > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$:

$$\sup_{\mu \in \mathcal{K}} \left| \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \right| \leq C_{\mathcal{K}}(1 + |x|).$$

En effet, il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis et d'utiliser la continuité de $\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}$.

Étape 2 : Montrons la dérivabilité de $t \mapsto u(\mu_t)$. Soit $t \geq 0$ et $h \neq 0$ tel que $t + h \in \mathbf{R}^+$. On a alors par définition de la dérivée plate :

$$\begin{aligned} u(\mu_{t+h}) - u(\mu_t) &= \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t+h} + (1-v)\mu_t)(x)\, d(\mu_{t+h} - \mu_t)(x)\, dv \\ &= \int_0^1 \mathbf{E}\left(\frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t+h} + (1-v)\mu_t)(X_{t+h}) - \frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t+h} + (1-v)\mu_t)(X_t) \right) dv. \end{aligned}$$

Fixons un instant $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, la formule classique d'Itô assure alors que presque sûrement, pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_t) = \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_0) + \int_0^t \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_s).b(X_s)\, ds + \int_0^t \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_s).(\sigma(X_s)\, dB_s) \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_s).a(X_s)\, ds. \end{aligned}$$

Les hypothèses de croissance sur les dérivées de $\frac{\delta u}{\delta m}$ et sur b et σ assurent qu'on peut bien prendre l'espérance dans l'égalité précédente. Pour la partie martingale, son espérance est nulle puisque son crochet au temps t vaut :

$$\int_0^t \left| \sigma^*(X_s) \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_s) \right|^2 ds,$$

et qu'on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_0^t \left| \sigma^*(X_s) \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_s) \right|^2 ds &\leq |\sigma|_\infty^2 \int_0^t \mathbf{E} \left| \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_s) \right|^2 ds \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

par croissance sous-linéaire de $\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(.)$ et puisque $t \mapsto X_t \in L^2$ est continue. Cela montre que cette intégrale stochastique est une vraie martingale L^2 issue de 0, donc d'espérance nulle. L'intégrabilité des autres termes résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a donc :

$$\begin{aligned} u(\mu_{t+h}) - u(\mu_t) &= \int_0^1 \left[\int_t^{t+h} \mathbf{E}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t+h} + (1-v)\mu_t)(X_s).b(X_s) \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_t^{t+h} \mathbf{E}\left(\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t+h} + (1-v)\mu_t)(X_s).a(X_s) \right) ds \right] dv \\ &= h \left[\mathbf{E}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_t)(X_t).b(X_t) \right) + \frac{1}{2} \mathbf{E}\left(\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_t)(X_t).a(X_t) \right) \right] \\ &\quad + \int_0^1 \int_t^{t+h} \mathbf{E}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t+h} + (1-v)\mu_t)(X_s).b(X_s) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s).b(X_s) \right) ds\, dv \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_t^{t+h} \mathbf{E}\left(\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t+h} + (1-v)\mu_t)(X_s).a(X_s) - \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s).a(X_s) \right) ds\, dv \\ &= (a) + (b) + (c). \end{aligned}$$

Il s'agit de voir que ⓑ et ⓒ sont des $o(h)$. Pour ⓑ, on remarque que :

$$|ⓑ| \leq |h| \sup_{v\in[0,1]} \sup_{s\in[t,t+h]} \mathbf{E} \left| \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t+h} + (1-v)\mu_t)(X_s).b(X_s) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s).b(X_s) \right|,$$

il s'agit donc de voir que :

$$\sup_{v\in[0,1]} \sup_{s\in[t,t+h]} \mathbf{E} \left| \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t+h} + (1-v)\mu_t)(X_s).b(X_s) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s).b(X_s) \right| \underset{h\to 0}{\to} 0.$$

Montrons que :

$$\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu')(X_s).b(X_s) \overset{L^1}{\to} \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_t).b(X_t),$$

lorsque $s \to t$ et $\mu' \overset{W_2}{\to} \mu$. On raisonne par caractérisation séquentielle : soit $\mu_n \overset{W_2}{\to} \mu$ et $t_n \to t$. Par continuité, on déduit que presque sûrement :

$$\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_n)(X_{t_n}).b(X_{t_n}) \to \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_t).b(X_t).$$

Montrons l'uniforme intégrabilité dans L^1. En utilisant que l'ensemble $\{\mu_n,\, n \geq 1\}$ est relativement compact et la croissance sous-linéaire de b, il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall n \geq 1, \left| \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_n)(X_{t_n}).b(X_{t_n}) \right| \leq C(1 + |X_n|^2).$$

Le second membre étant convergent dans L^1, il est uniformément intégrable, ce qui permet de conclure sur la continuité dans L^1 voulue. Le même raisonnement permet de montrer que :

$$\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu')(X_s).a(X_s) \overset{L^1}{\to} \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_t).a(X_t),$$

lorsque $s \to t$ et $\mu' \overset{W_2}{\to} \mu$ et donc que : ⓒ est un $o(h)$. On a donc montré que pour tout $t \geq 0$:

$$\frac{d}{dt} u(\mu_t) = \mathbf{E} \left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_t)(X_t).b(X_t) \right) + \frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_t)(X_t).a(X_t) \right),$$

et le raisonnement fait précédemment montre la régularité $\mathcal{C}^1$. Il reste à intégrer entre 0 et t pour avoir la formule d'Itô. □

Remarque 3.1.2.

- *On n'a pas utilisé l'hypothèse lipschitzienne dans la preuve, seulement la croissance sous-linéaire de b et σ.*
- *La preuve précédente fonctionne également en ne supposant plus σ bornée, mais en supposant que $X_0 \in L^4$. Cela assure, d'après le théorème 6.3.1, que $t \in \mathbf{R}^+ \mapsto X_t \in L^4$ est continue. Il suffit ensuite de remarquer qu'on avait utilisé le fait que σ est borné seulement pour montrer que l'intégrale stochastique qui apparaît lorsqu'on applique la formule d'Itô classique est d'espérance nulle. On voit que cela est toujours le cas en reprenant les calculs et en ayant l'hypothèse de continuité dans L^4. Dans ce qui suit, on affaiblit les hypothèses grâce à une méthode de subdivision et de temps d'arrêt.*

3.2 Le résultat général

Le résultat démontré dans cette partie est le cœur du mémoire. Il sera utilisé à des nombreuses reprises dans la partie qui suit. On fixe $p \geq 1$ et on s'intéresse à une semi-martingale définie de la manière suivante. On se donne :

- $X_0 \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$.
- $b : \mathbf{R}^+ \times \Omega \to \mathbf{R}^d$ progressivement mesurable tel que :

$$\forall T > 0,\, \mathbf{E} \int_0^T |b_s|^p \, ds < +\infty.$$

- $(M_t)_{t \in \mathbf{R}^+}$ une $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-martingale d-dimensionnelle à trajectoires continues, issue de 0, telle que :

$$\forall T > 0,\, \forall i \in \{1, \ldots, d\}\,,\, \mathbf{E}\left(\langle M^i, M^i \rangle_T^{p/2}\right) < +\infty.$$

On définit alors pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s \, ds + M_t,$$

qui est une semi-martingale à trajectoires continues. On note également $\mu_t = \mathcal{L}(X_t)$.

Proposition 3.2.1. *On a pour tout $T > 0$:*

$$\mathbf{E} \sup_{t \leq T} |X_t|^p < +\infty.$$

Ainsi les applications $t \in \mathbf{R}^+ \mapsto X_t \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$ et $t \in \mathbf{R}^+ \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$ sont continues.

Démonstration : On a pour tout $t \leq T$:

$$\begin{aligned} |X_t|^p &\leq 3^{p-1} \left(|X_0|^p + \left| \int_0^t b_s \, ds \right|^p + |M_t|^p \right) \\ &\leq 3^{p-1} \left(|X_0|^p + T^{p-1} \int_0^T |b_s|^p \, ds + \sup_{t \leq T} |M_t|^p \right) \quad \text{par l'inégalité de Jensen.} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{t \leq T} |X_t|^p &\leq 3^{p-1} \left(\mathbf{E}|X_0|^p + T^{p-1} \mathbf{E} \int_0^T |b_s|^p \, ds + \mathbf{E} \sup_{t \leq T} |M_t|^p \right) \\ &< +\infty \quad \text{d'après l'hypothèse sur } b \text{ et d'après l'inégalité BDG.} \end{aligned}$$

La continuité des trajectoires de X et le théorème de convergence dominée assurent la continuité de l'énoncé. $\square$

Théorème 3.2.2. *Soient $p \geq 2$ et $u : \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$ admettant une dérivée plate $\frac{\delta u}{\delta m}$ telle que :*

- *Pour toute $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$, $\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(.) \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$.*

- *Pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$, il existe $C_{\mathcal{K}} > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$:*

$$\sup_{\mu \in \mathcal{K}} \left| \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \right| \leq C_{\mathcal{K}}(1 + |x|^{p-2}).$$

- *Les applications :*

$$(\mu, x) \in (\mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d), \mathbf{R}^d) \mapsto \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \in \mathbf{R}^d,$$
$$(\mu, x) \in (\mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d), \mathbf{R}^d) \mapsto \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \in \mathbf{R}^{d \times d},$$

sont continues.

Soit $(X_t)_{t \in \mathbf{R}^+}$ comme précédemment. On suppose de plus que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, et pour tout $T > 0$, on a :

$$\mathbf{E}(\langle M^i + M^j, M^i + M^j \rangle_T^{p/2}) < +\infty.$$

Alors on a pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$u(\mu_t) = u(\mu_0) + \int_0^t \mathbf{E}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s).b_s \right) ds + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \mathbf{E} \int_0^t \partial_{x_i x_j}^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s) \, d\langle M^i, M^j \rangle_s.$$

Remarque 3.2.3. *L'hypothèse de croissance imposée à la dérivée seconde couplée à l'hypothèse de continuité assure que pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$, il existe $C_{\mathcal{K}} > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$:*

$$\sup_{\mu \in \mathcal{K}} \left| \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \right| \leq C_{\mathcal{K}}(1 + |x|^{p-1}).$$

Démonstration :

Étape 1 : On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\text{ps}, \, \forall t \in \mathbf{R}^+, \, X_t \in \overline{B}(0, M).$$

Soit $t > 0$, pour $n \geq 1$, on définit : $t_k^n = \frac{tk}{n}$ pour $k \in \{0, \ldots, n\}$. On a alors pour tout n :

$$\begin{aligned} u(\mu_t) - u(\mu_0) &= \sum_{k=0}^{n-1} u(\mu_{t_{k+1}^n}) - u(\mu_{t_k^n}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left[\mathbf{E}\left(\frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t_{k+1}^n} + (1-v)v\mu_{t_k^n})(X_{t_{k+1}^n}) - \frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t_{k+1}^n} + (1-v)v\mu_{t_k^n})(X_{t_k^n}) \right) \right] dv, \end{aligned}$$

en utilisant la dérivée plate de u. La formule d'Itô classique assure également qu'à $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$ fixée, presque sûrement, pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_t) = \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_0) &+ \int_0^t \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_s).b_s \, ds + \int_0^t \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_s).dM_s \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \partial_{x_i x_j}^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_s) \, d\langle M^i, M^j \rangle_s. \end{aligned}$$

Justifions qu'on peut bien prendre l'espérance dans cette formule.

1. Soit $i \in \{1, \dots, d\}$, montrons que :

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t \partial_{x_i} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_s)\, dM_s^i\right) = 0.$$

En effet, c'est le cas puisqu'il s'agit d'une vraie martingale L^2 issue de 0 car :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\int_0^t \left|\partial_{x_i} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_s)\right|^2 d\langle M^i, M^i\rangle_s \\
&\leq \sup_{x \in \overline{B}(0,M)} \left|\partial_{x_i} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x)\right|^2 \mathbf{E}\langle M^i, M^i\rangle_t \quad \text{par hypothèse sur } X \\
&< +\infty \quad \text{par hypothèse sur le crochet de } M.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbf{E}\int_0^t \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_s).dM_s = 0.$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\int_0^t \left|\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(X_s).b_s\right| ds \\
&\leq \sup_{x \in \overline{B}(0,M)} \left|\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x)\right| \mathbf{E}\int_0^t |b_s|\, d_s \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

et de même pour le dernier terme.

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
&u(\mu_t) - u(\mu_0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left[\mathbf{E}\left(\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t_{k+1}^n} + (1-v)\mu_{t_k^n})(X_s).b_s\, ds\right)\right. \\
&\left. + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \mathbf{E}\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \partial^2_{x_i\, x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t_{k+1}^n} + (1-v)\mu_{t_k^n})(X_s)\, d\langle M^i, M^j\rangle_s\right] dv. \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left[\mathbf{E}\left(\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s).b_s\, ds\right)\right. \\
&\left. + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \mathbf{E}\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \partial^2_{x_i\, x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\, d\langle M^i, M^j\rangle_s\right] dv. \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left[\mathbf{E}\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t_{k+1}^n} + (1-v)\mu_{t_k^n})(X_s) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\right).b_s\, ds\right] dv \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left[\mathbf{E}\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \left(\partial^2_{x_i\, x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t_{k+1}^n} + (1-v)\mu_{t_k^n})(X_s) - \partial^2_{x_i\, x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\right) d\langle M^i, M^j\rangle_s\right] dv \\
&= ⓐ + ⓑ + ⓒ,
\end{aligned}$$

où ⓐ désigne les deux premières lignes de l'égalité précédente. On a alors :

$$ⓐ = \int_0^t \mathbf{E}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s).b_s\right) ds + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \mathbf{E}\int_0^t \partial^2_{x_i x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\, d\langle M^i, M^j\rangle_s,$$

qui est le résultat voulu. Il s'agit donc de montrer que ⓑ et ⓒ tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On commence par le montrer pour ⓑ. La preuve est divisée en 3 points.

1. On montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$:

   $$\sup_{k\leq n-1}\sup_{v\in[0,1]}\sup_{s\in[t_k^n, t_{k+1}^n]} W_p^p(v\mu_{t_{k+1}^n} + (1-v)\mu_{t_k^n}, \mu_s) \leq \epsilon.$$

   En effet, d'après l'inégalité de convexité de la distance de Wasserstein 6.1.11 :

   $$\begin{aligned} W_p(v\mu_{t_{k+1}^n} + (1-v)\mu_{t_k^n}, \mu_s) &\leq W_p(v\mu_{t_{k+1}^n} + (1-v)\mu_{t_k^n}, \mu_{t_k^n}) + W_p(\mu_{t_k^n}, \mu_s) \\ &\leq W_p(\mu_{t_{k+1}^n}, \mu_{t_k^n}) + W_p(\mu_{t_k^n}, \mu_s) \end{aligned}$$

   Or $s \in [0,t] \mapsto \mu_s \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$ est uniformément continue, ainsi il existe $\delta > 0$ tel que :

   $$\forall s, s' \leq t,\ |s - s'| \leq \delta \Rightarrow W_p(\mu_s, \mu_{s'}) \leq \varepsilon.$$

   Ainsi pour tout $n > \frac{t}{\delta}$, pour tout $k \leq n-1$ et pour tout $s \in [t_k^n, t_{k+1}^n]$:

   $$W_p(\mu_{t_{k+1}^n}, \mu_{t_k^n}) + W_p(\mu_{t_k^n}, \mu_s) \leq 2\varepsilon.$$

2. L'ensemble $\{v\mu_s + (1-v)\mu_u,\ s,u \leq t,\ v \in [0,1]\}$ est compact dans $\mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$. On peut raisonner par caractérisation séquentielle. Soit $(v_n)_n \in [0,1]^{\mathbf{N}}$, $(s_n)_n \in [0,t]^{\mathbf{N}}$ et $(u_n)_n \in [0,t]^{\mathbf{N}}$. Quitte à extraire, on suppose qu'elles convergent respectivement vers v, s, u. De plus pour tout $\phi \in \mathcal{C}_{b,p}(\mathbf{R}^d)$, on a :

   $$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\, d(v_n\mu_{s_n} + (1-v_n)\mu_{u_n})(x) &= v_n\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\, d\mu_{s_n}(x) + (1-v_n)\int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\, d\mu_{u_n}(x) \\ &\underset{n\to+\infty}{\to} \int_{\mathbf{R}^d}\phi(x)\, d(v\mu_s + (1-v)\mu_u)(x). \end{aligned}$$

   D'où : $v_n\mu_{s_n} + (1-v_n)\mu_{u_n} \overset{W_p}{\to} v\mu_s + (1-v)\mu_u$, ce qui assure la compacité annoncée.

3. On conclut alors : puisque la fonction $\partial_x\frac{\delta u}{\delta m}$ est uniformément continue sur le compact $\{v\mu_s + (1-v)\mu_u,\ s,u \leq t,\ v \in [0,1]\} \times \overline{B}(0,M)$ par le théorème de Heine, on déduit en utilisant le premier point précédent que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$:

   $$\sup_{k\leq n-1}\sup_{v\in[0,1]}\sup_{s\in[t_k^n,t_{k+1}^n]}\sup_{x\in\overline{B}(0,M)}\left|\partial_x\frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t_{k+1}^n} + (1-v)\mu_{t_k^n})(x) - \partial_x\frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(x)\right| \leq \varepsilon.$$

   Ainsi pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a :

   $$|ⓑ| \leq \varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 \mathbf{E}\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n}|b_s|\, ds\, dv,$$

   donc :

   $$\limsup_n |ⓑ| \leq \varepsilon\mathbf{E}\int_0^t |b_s|\, ds.$$

   On laisse alors tendre ε vers 0.

Enfin pour montrer que ⓒ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on fixe $i, j \in \{1, \dots, d\}$ et on montre que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left[\mathbf{E} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \left(\partial^2_{x_i\, x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t_{k+1}^n} + (1-v)\mu_{t_k^n})(X_s) - \partial^2_{x_i\, x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s) \right) d\langle M^i, M^j \rangle_s \right] dv \to 0.$$

Or on a par définition :

$$d\langle M^i, M^j \rangle_s = \frac{1}{2}(d\langle M^i + M^j, M^i + M^j \rangle_s - d\langle M^i, M^i \rangle_s - d\langle M^j, M^j \rangle_s).$$

Dans la suite on montre que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left[\mathbf{E} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \left(\partial^2_{x_i\, x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t_{k+1}^n} + (1-v)\mu_{t_k^n})(X_s) - \partial^2_{x_i\, x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s) \right) d\langle M^i, M^i \rangle_s \right] dv \to 0,$$

l'autre intégrale contre $d\langle M^i + M^j, M^i + M^j \rangle$ se traite de la même manière puisque le crochet vérifie les mêmes hypothèses d'intégrabilité. En utilisant les points 1 et 2 de la preuve de la convergence vers 0 de ⓑ, appliqués à $\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}$ au lieu de $\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}$, on déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \mathbf{E} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \left(\partial^2_{x_i\, x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(v\mu_{t_{k+1}^n} + (1-v)\mu_{t_k^n})(X_s) - \partial^2_{x_i\, x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s) \right) d\langle M^i, M^i \rangle_s \, dv \right| \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \mathbf{E} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} d\langle M^i, M^i \rangle_s \, dv \\ &= \varepsilon \mathbf{E}(\langle M^i, M^i \rangle_t). \end{aligned}$$

Cela achève la preuve de la formule d'Itô sous l'hypothèse que les trajectoires de X vivent dans un compact fixé.

Étape 2 : On retire l'hypothèse sur X en arrêtant le processus. Pour cela on définit pour $n \geq 1$:

$$T_n := \inf \left\{ t \geq 0, \left| \int_0^t b_s \, ds \right| \geq n \,\text{ou}\, |M_t| \geq n \right\}.$$

Il s'agit d'une suite de temps d'arrêt qui converge vers $+\infty$ presque sûrement puisque les deux processus sont continus et issus de 0. On pose alors pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$X_t^n = X_0^n + \int_0^{t \wedge T_n} b_s \, ds + M_t^{T_n},$$

où $X_0^n = X_0 \mathbf{1}_{|X_0| \leq n}$ et où on note $M_t^{T_n} = M_{t \wedge T_n}$ la martingale arrêtée. On note également pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, $\mu_t^n = \mathcal{L}(X_t^n)$. Il est clair que X^n est une semi-martingale qui vérifie les mêmes hypothèses que X (en remplaçant b_s par $b_s \mathbf{1}_{s \leq T_n}$). On déduit immédiatement que : $t \in \mathbf{R}^+ \mapsto X_t^n \in L^p$ est continue. Il est également immédiat que :

$$\text{ps } \forall t \in \mathbf{R}^+ X_t^n \to X_t,$$

puisque $T_n \to +\infty$ et $X_0^n \to X_0$ ps. En fait on a également, pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, :

$$X_t^n \xrightarrow{L^p} X_t.$$

En effet, par convergence dominée, il suffit de montrer que pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbf{E} \sup_{n \geq 1} |X_t^n|^p < +\infty,$$

ce qui résulte de l'inégalité :

$$\mathbf{E} \sup_{s \leq t} \sup_{n \geq 1} |X_s^n|^p \leq 3^{p-1} \left(\mathbf{E}|X_0|^p + T^{p-1} \mathbf{E} \int_0^T |b_s|^p \, ds + \mathbf{E} \sup_{s \leq t} |M_s|^p \right) \quad (*),$$

quantité qui est finie par les hypothèses et l'inégalité de BDG. On peut appliquer le résultat de l'étape 1 à X_n puisque :

$$\text{ps } \forall t \in \mathbf{R}^+, \, X_t^n \in \overline{B}(0, 3n).$$

On a donc pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$\begin{aligned} u(\mu_t^n) &= u(\mu_0^n) + \int_0^t \mathbf{E} \left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s^n)(X_s^n).b_s \mathbf{1}_{s \leq T_n} \right) ds + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \mathbf{E} \int_0^t \partial^2_{x_i \, x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s^n)(X_s^n) \, d\langle M^{i,T_n}, M^{j,T_n} \rangle_s \\ &= u(\mu_0^n) + \int_0^t \mathbf{E} \left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s^n)(X_s^n).b_s \mathbf{1}_{s \leq T_n} \right) ds + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \mathbf{E} \int_0^{t \wedge T_n} \partial^2_{x_i \, x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s^n)(X_s^n) \, d\langle M^i, M^j \rangle_s \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, $\mu_t^n \overset{W_p}{\to} \mu_t$, et donc par continuité de u :

$$u(\mu_t^n) \to u(\mu_t).$$

Il reste à passer à la limite dans les deux autres termes. Commençons par démontrer deux résultats.

1. L'ensemble $\{\mu_s^n, \, n \geq 1, \, s \leq t\}$ est relativement compact dans $\mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$. On raisonne séquentiellement : soit $(s_k)_k \in [0,t]^{\mathbf{N}}$ et $(n_k)_k$ une suite d'entiers. On distingue deux cas. Si la suite $(n_k)_k$ vaut une infinité de fois n_0, on peut supposer par compacité $s_k \to s$ et alors :

$$\mu_{s_k}^{n_0} \underset{k \to +\infty}{\to} \mu_s^{n_0},$$

   d'après ce qui précède. Sinon on peut supposer que $n_k \to +\infty$. Dans ce cas on montre que :

$$\mu_{s_k}^{n_k} \overset{W_p}{\to} \mu_s.$$

   En effet on a :

$$W_p(\mu_{s_k}^{n_k}, \mu_s) \leq W_p(\mu_{s_k}^{n_k}, \mu_s^{n_k}) + W_p(\mu_s^{n_k}, \mu_s).$$

   Le dernier terme tend vers 0 puisque :

$$X_s^n \overset{L^p}{\to} X_s.$$

   Pour voir que le premier terme converge vers 0, il s'agit de voir que :

$$\sup_{n \geq 1} W_p(\mu_{s_k}^n, \mu_s^n) \to 0,$$

   et même que :

$$\sup_{n \geq 1} \mathbf{E} \left| X_{s_k}^n - X_s^n \right|^p \to 0.$$

Or on a, en supposant $s_k \leq s$, l'autre cas étant analogue :

$$\mathbf{E}\left|X^n_{s_k} - X^n_s\right|^p \leq 2^{p-1}\left(s^{p-1}\mathbf{E}\int_{s_k\wedge T_n}^{s\wedge T_n} |b_u|^p\, du + \mathbf{E}|M_{s_k\wedge T_n} - M_{s\wedge T_n}|^p\right)$$

D'où :

$$\sup_{n\geq 1}\mathbf{E}\left|X^n_{s_k} - X^n_s\right|^p \leq 2^{p-1}\left(s^{p-1}\mathbf{E}\int_{s_k}^{s} |b_u|^p\, du + \mathbf{E}\sup_{n\geq 1}|M_{s_k\wedge T_n} - M_{s\wedge T_n}|^p\right),$$

en distinguant selon la position de T_n par rapport à s_k et s. La première intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue converge vers 0 par convergence dominée. Il reste à montrer que :

$$\mathbf{E}\sup_{n\geq 1}|M_{s_k\wedge T_n} - M_{s\wedge T_n}|^p \to 0.$$

En remarquant que pour tout $n, k \geq 1$, on a presque sûrement :

$$|s_k \wedge T_n - s\wedge T_n| \leq |s_k - s|,$$

on déduit de la continuité des trajectoires de M que :

$$\sup_{n\geq 1}|M_{s_k\wedge T_n} - M_{s\wedge T_n}|^p \overset{\text{ps}}{\to} 0.$$

Pour conclure, il reste à dominer :

$$\sup_{n\geq 1}|M_{s_k\wedge T_n} - M_{s\wedge T_n}|^p \leq 2^p \sup_{u\leq s}|M_u|^p,$$

qui est intégrable d'après l'inégalité de BDG. D'où le résultat par convergence dominée.

2. On montre que si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ bornée dans L^q et Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ et L^p avec p et q exposants conjugués. Alors $(X_n.Y)_n$ est uniformément intégrable. En effet, la suite est bornée dans L^1 d'après l'inégalité de Hölder. De plus si $A \in \mathcal{F}$, alors on a encore grâce à l'inégalité de Hölder :

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_A|X_n.Y|) \leq \sup_{n\geq 1}(\mathbf{E}|X_n|^q)^{1/q}\ (\mathbf{E}\mathbf{1}_A|Y|^p)^{1/p}.$$

Comme $Y \in L^p$, cette inégalité permet de montrer la propriété d'uniforme continuité qui, couplée au caractère borné dans L^1, montre l'uniforme intégrabilité.

Maintenant que ces deux résultats sont prouvés, on peut passer à la limite dans les deux derniers termes. On commence par montrer que :

$$\int_0^t \mathbf{E}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu^n_s)(X^n_s).b_s\mathbf{1}_{s\leq T_n}\right) ds \to \int_0^t \mathbf{E}\left(\partial_x\frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s).b_s\right) ds.$$

On travaille dans l'espace de probabilité $([0,t]\times\Omega, \mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}, \frac{1}{t}ds\otimes d\mathbf{P})$. On sait déjà que pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$\mu^n_t \overset{W_p}{\to} \mu_t.$$

De plus, puisque :

$$\text{ps } \forall t\in\mathbf{R}^+,\ X^n_t \to X_t\,, \qquad \text{et} \quad T_n \overset{\text{ps}}{\to} +\infty,$$

on déduit de la continuité de $\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}$ que pour presque tout $(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega$:

$$\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s^n)(X_s^n).b_s \mathbf{1}_{s \le T_n} \to \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s).b_s.$$

Pour avoir la convergence L^1 il reste à montrer l'uniforme intégrabilité de cette suite. Puisque $b \in L^p([0,t] \times \Omega, \frac{1}{t} ds \otimes d\mathbf{P})$, le point 2 qui précède assure qu'il suffit dé vérifier que la suite $(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s^n)(X_s^n)\mathbf{1}_{s \le T_n})_n$ est bornée dans $L^q([0,t] \times \Omega)$. D'après le point 1 de ce qui précède et l'hypothèse de croissance de la dérivée seconde de la dérivée plate de u sur les compacts, il existe $C > 0$ telle que pour tout $n \ge 1$ et pour tout $s \in [0,t]$:

$$\left| \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s^n)(X_s^n)\mathbf{1}_{s \le T_n} \right| \le C(1 + |X_s^n|^{p-1}).$$

Ainsi puisque $q(p-1) = p$, on a :

$$\begin{aligned}
\sup_{n \ge 1} \sup_{s \le t} \mathbf{E} \left| \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s^n)(X_s^n)\mathbf{1}_{s \le T_n} \right|^q & \left(\le C(1 + \sup_{n \ge 1} \sup_{s \le t} \mathbf{E}|X_s^n|^{p-1}) \right)^q \\
& \le 2^{q-1} C^q (1 + \mathbf{E} \sup_{n \ge 1} \sup_{s \le t} |X_s^n|^{q(p-1)}) \\
& = 2^{q-1} C^q (1 + \mathbf{E} \sup_{n \ge 1} \sup_{s \le t} |X_s^n|^{p}) \\
& < +\infty \quad \text{par } (*).
\end{aligned}$$

La suite $(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s^n)(X_s^n)\mathbf{1}_{s \le T_n})_n$ est donc bornée dans $L^q([0,t] \times \Omega)$, ce qui assure l'uniforme intégrabilité et la convergence voulue dans $L^1([0,t] \times \Omega)$.

Il reste enfin à passer à la limite dans le dernier terme. Pour cela on fixe $i, j \in \{1, \dots, d\}$ et on montre que :

$$\mathbf{E} \int_0^{t \wedge T_n} \partial^2_{x_i x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s^n)(X_s^n)\, d\langle M^i, M^j \rangle_s \to \mathbf{E} \int_0^t \partial^2_{x_i x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\, d\langle M^i, M^j \rangle_s.$$

On sépare encore l'intégrale grâce à :

$$d\langle M^i, M^j \rangle_s = \frac{1}{2}(d\langle M^i + M^j, M^i + M^j \rangle_s - d\langle M^i, M^i \rangle_s - d\langle M^j, M^j \rangle_s),$$

et on montre seulement que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$:

$$\mathbf{E} \int_0^{t \wedge T_n} \partial^2_{x_i x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s^n)(X_s^n)\, d\langle M^i, M^i \rangle_s \to \mathbf{E} \int_0^t \partial^2_{x_i x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\, d\langle M^i, M^i \rangle_s,$$

les autres termes se traitent de manière analogue.

On a :

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbf{E} \int_0^{t \wedge T_n} \partial^2_{x_i x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s^n)(X_s^n)\, d\langle M^i, M^i \rangle_s - \mathbf{E} \int_0^t \partial^2_{x_i x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\, d\langle M^i, M^i \rangle_s \right| \\
& \le \mathbf{E} \int_0^{t \wedge T_n} \left| \partial^2_{x_i x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s^n)(X_s^n) - \partial^2_{x_i x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s) \right| \, d\langle M^i, M^i \rangle_s \\
& + \mathbf{E} \int_{t \wedge T_n}^t \left| \partial^2_{x_i x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s) \right| \, d\langle M^i, M^i \rangle_s \\
& = ⓐ + ⓑ
\end{aligned}$$

On commence par remarquer que :

$$\mathbf{E}\int_0^t \left|\partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\right| d\langle M^i, M^i\rangle_s \leq \mathbf{E}\left[\left(\sup_{s\leq t}\left|\partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\right|\right)\langle M^i, M^i\rangle_t\right].$$

Par hypothèse, $\langle M^i, M^i\rangle_t \in L^{p/2}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Pour montrer que cette dernière quantité est finie, il suffit de voir que :

$$\sup_{s\leq t}\left|\partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\right| \in L^q,$$

où q et $p/2$ sont conjugués. L'ensemble $\{\mu_s,\, s\leq t\}$ étant compact, il existe $C>0$ telle que pour tout $s\in[0,t]$:

$$\left|\partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\right| \leq C(1+|X_s|^{p-2}).$$

Ainsi puisque $q(p-2)=p$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\sup_{s\leq t}\left|\partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\right|^q &\left(\leq C(1+\mathbf{E}\sup_{s\leq t}|X_s|^{p-2})\right)^q\\ &\leq 2^{q-1}C^q(1+\mathbf{E}\sup_{s\leq t}|X_s|^{q(p-2)})\\ &= 2^{q-1}C^q(1+\mathbf{E}\sup_{s\leq t}|X_s|^{p})\\ &< +\infty,\end{aligned}$$

d'après la proposition précédent le théorème. On déduit donc par convergence dominée que ⓑ tend vers 0 puisque $T_n \overset{\text{ps}}{\to} +\infty$. Il reste à montrer que ⓐ tend vers 0. On a :

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\int_0^{t\wedge T_n}\left|\partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu^n_s)(X^n_s) - \partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\right| d\langle M^i, M^i\rangle_s\\ &\leq \mathbf{E}\int_0^{t}\left|\partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu^n_s)(X^n_s) - \partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\right| d\langle M^i, M^i\rangle_s.\end{aligned}$$

Puisque :

$$\text{ps } \forall s\in[0,t],\ X^n_s \to X_s,$$

on déduit que :

$$\text{ps } \forall s\in[0,t],\ \left|\partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu^n_s)(X^n_s) - \partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\right| \to 0.$$

Il existe $C>0$ telle que pour tout $n\geq 1$ et pour tout $s\in[0,t]$:

$$\left|\partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu^n_s)(X^n_s)\right| \leq C(1+|X^n_s|^{p-2}),$$

et

$$\left|\partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\right| \leq C(1+|X_s|^{p-2}),$$

Ainsi puisque $q(p-2)=p$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\sup_{n\geq 1}\sup_{s\leq t}\left|\partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu^n_s)(X^n_s)\right|^q &\left(\leq C(1+\mathbf{E}\sup_{n\geq 1}\sup_{s\leq t}|X^n_s|^{p-2})\right)^q\\ &\leq 2^{q-1}C^q(1+\mathbf{E}\sup_{n\geq 1}\sup_{s\leq t}|X^n_s|^{q(p-1)})\\ &= 2^{q-1}C^q(1+\mathbf{E}\sup_{n\geq 1}\sup_{s\leq t}|X^n_s|^{p})\\ &< +\infty \quad \text{par } (*).\end{aligned}$$

On déduit, par convergence dominée, que presque sûrement :

$$\int_0^t \left|\partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu^n_s)(X^n_s)-\partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\right| d\langle M^i,M^i\rangle_s\to 0,$$

en dominant par la quantité suivante, qui est finie presque sûrement :

$$2C(1+\sup_{n\geq 1}\sup_{s\leq t}|X^n_s|^{p-2}+\sup_{s\leq t}|X_s|^{p-2}),$$

qui appartient donc à $L^1([0,t],d\langle M^i,M^i\rangle)$ presque sûrement. On conclut en utilisant à nouveau le théorème de convergence dominée puisque :

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left|\partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu^n_s)(X^n_s)-\partial^2_{x_i\,x_j}\frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\right| d\langle M^i,M^i\rangle_s\\ &\leq 2C(1+\sup_{n\geq 1}\sup_{s\leq t}|X^n_s|^{p-2}+\sup_{s\leq t}|X_s|^{p-2})\langle M^i,M^i\rangle_t\end{aligned}$$

Cette borne appartient à $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ d'après l'inégalité de Hölder puisque :

$$\langle M^i,M^i\rangle_t\in L^{p/2}(\Omega)\quad\text{et}\quad \sup_{n\geq 1}\sup_{s\leq t}|X^n_s|^{p-2}+\sup_{s\leq t}|X_s|^{p-2}\in L^{p/(p-2)}(\Omega),$$

par $(*)$ et la proposition précédent le théorème. Cela achève la preuve de la formule d'Itô.

$\square$

Remarque 3.2.4. *Dans le cas où la martingale $(M_t)_{t\geq 0}$ est donnée par une intégrale stochastique contre le mouvement brownien, c'est-à-dire qu'il existe $\sigma:\mathbf{R}^+\times\Omega\to\mathbf{R}^{d\times d}$ progressivement mesurable et appartenant à $L^2_{loc}(B)$, où B est un mouvement brownien standard d-dimensionnel, tel que :*

$$M_t=\int_0^t\sigma_s\,dB_s.$$

Alors la condition :

$$\forall T>0,\,\forall i\in\{1,\dots,d\},\,\mathbf{E}\left(\langle M^i,M^i\rangle_T^{p/2}\right)+\mathbf{E}\left(\langle M^i+M^j,M^i+M^j\rangle_T^{p/2}\right)<+\infty,$$

du théorème est équivalente à :

$$\forall T>0,\,\mathbf{E}\left(\int_0^T|\sigma_s|^2\,ds\right)^{p/2}<+\infty.$$

Or puisque $p \geq 2$, l'inégalité de Jensen assure que :

$$\mathbf{E}\left(\int_0^T |\sigma_s|^2\, ds\right)^{p/2} \leq T^{p/2-1}\mathbf{E}\int_0^T |\sigma_s|^p\, ds.$$

Ainsi, si on se place dans le cas $p = 2$, le théorème précédent prouve la formule d'Itô pour les fonctions u vérifiant les hypothèses du théorème et pour un processus d'Itô de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s\, ds + \int_0^t \sigma_s\, dB_s,$$

où $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$ et avec :

$$\forall T > 0,\ \mathbf{E}\int_0^T |b_s|^2 + |\sigma_s|^2\, ds < +\infty \quad (*).$$

Cela affaiblit l'hypothèse :

$$\forall T > 0,\ \mathbf{E}\int_0^T |b_s|^2 + |\sigma_s|^4\, ds < +\infty \quad (**),$$

faite dans le théorème 6.2.16 présent dans [CD18], qui donne la formule d'Itô avec la L-dérivée. Bien sûr, cela se fait au prix d'hypothèses plus fortes sur u. Avec la L-dérivée, on suppose un contrôle uniforme en μ sur les compacts de $\partial_v\partial_\mu u(\mu)(.)$ (qui correspond essentiellement à $\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(.)$ d'après la proposition 6.2.11) dans $L^2(\mu)$, alors qu'ici on suppose un contrôle pour la norme uniforme. Pour les EDS, l'hypothèse $(*)$ est directement vérifiée quand on travaille sous les hypothèses du théorème 6.3.1 d'existence pour les EDS pour $p = 2$, alors que pour assurer l'hypothèse $(**)$, il faut travailler avec les hypothèses de ce même théorème mais pour $p = 4$ et donc en particulier $X_0 \in L^4$, ou bien supposer σ borné si $X_0 \in L^2$.

On se place maintenant dans le cas où $p = 1$ et avec le processus X défini en début de partie.

Corollaire 3.2.5. *Soit $u : \mathcal{P}_1(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$ admettant une dérivée plate $\frac{\delta u}{\delta m}$ telle que :*

- *Pour toute $\mu \in \mathcal{P}_1(\mathbf{R}^d)$, $\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(.) \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$.*
- *Pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_1(\mathbf{R}^d)$, il existe $C_{\mathcal{K}} > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$:*

$$\sup_{\mu\in\mathcal{K}}\left|\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x)\right| + \sup_{\mu\in\mathcal{K}}\left|\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x)\right| \leq C_{\mathcal{K}}.$$

- *Les applications :*

$$(\mu, x) \in (\mathcal{P}_1(\mathbf{R}^d), \mathbf{R}^d) \mapsto \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \in \mathbf{R}^d,$$
$$(\mu, x) \in (\mathcal{P}_1(\mathbf{R}^d), \mathbf{R}^d) \mapsto \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \in \mathbf{R}^{d\times d},$$

  sont continues.

On suppose également que pour tout $i, j \in \{1, \dots, d\}$, et pour tout $T > 0$, on a :

$$\mathbf{E}\langle M^i + M^j, M^i + M^j\rangle_T < \infty \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\langle M^i, M^i\rangle_T < \infty.$$

Alors on a pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$u(\mu_t) = u(\mu_0) + \int_0^t \mathbf{E}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s).b_s\right) ds + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \mathbf{E}\int_0^t \partial^2_{x_i\,x_j} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s)\, d\langle M^i, M^j\rangle_s.$$

Remarque 3.2.6. *Les hypothèses sur la partie martingale sont les mêmes que dans le cas $p = 2$, cela vient de l'hypothèse de croissance sur $\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}$ qui est la même que dans le cas $p = 2$.*

Démonstration : C'est exactement la même preuve que le cas $p \geq 2$. □

3.3 Le cas $p = 2$ avec des hypothèses analogues à la version L-dérivée

On donne ici l'analogue du théorème 6.2.16 présent dans [CD18] mais avec la dérivée plate au lieu de la L-dérivée.

On considère :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s \, ds + \int_0^t \sigma_s \, dB_s,$$

où $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$ et où b et σ sont des processus progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ et $\mathbf{R}^{d\times d}$ respectivement vérifiant :

$$\forall T > 0, \, \mathbf{E} \int_0^T |b_s|^2 + |\sigma_s|^4 \, ds < +\infty.$$

Commençons par un lemme d'approximation qui sera utile.

Lemme 3.3.1. *Soit $T > 0$. Il existe une suite de processus progressivement mesurables b^n et σ^n, à trajectoires continues et bornés uniformément par rapport à $t \in [0, T]$ et $\omega \in \Omega$ et tels que :*

$$\mathbf{E} \int_0^T |b_s^n - b_s|^2 + |\sigma_s^n - \sigma_s|^4 \, ds \to 0.$$

Démonstration : On montre le résultat pour σ, un raisonnement analogue dans L^2 donnera le résultat pour b.

Étape 1 : On note $\mathcal{S}$ l'ensembles des processus de la forme :

$$(\omega, t) \in \Omega \times [0, T] \mapsto \sum_{i=1}^p H_i(\omega) \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t),$$

où $p \geq 1$, H_i est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et bornée et $(t_i)_i$ une suite strictement croissante positive. Alors $\mathcal{S}$ est dense dans $L^4(\Omega \times [0, T], \text{Prog}, d\mathbf{P} \otimes ds)$, où Prog est la tribu progressive. On sait que :

$$(L^4(\Omega \times [0, T], \text{Prog}, d\mathbf{P} \otimes ds))' = L^{4/3}(\Omega \times [0, T], \text{Prog}, d\mathbf{P} \otimes ds).$$

On veut montrer que si $K \in L^{4/3}(\Omega \times [0, T], \text{Prog}, d\mathbf{P} \otimes ds)$ est telle que :

$$\forall H \in \mathcal{S}, \int_\Omega \int_0^T K_s(\omega) H_s(\omega) \, ds \, d\mathbf{P}(\omega) = 0 \quad (*),$$

alors $K = 0$ $d\mathbf{P} \otimes ds$-presque-partout. Le résultat de densité découlera du critère de densité par dualité. Soient $s < t \leq T$ et H une variable bornée $\mathcal{F}_s$-mesurable. Alors par hypothèse :

$$\mathbf{E}\left(H \int_s^t K_u \, du \right) = 0.$$

On pose pour tout $t \in [0,T]$:

$$X_t = \int_0^t K_u \, du,$$

qui est bien définie et intégrable puisque :

$$\mathbf{E} \int_0^T |K_u| \, du \leq C \|K\|_{L^{4/3}} \quad \text{par l'inégalité de Hölder.}$$

De plus $(*)$ montre que pour toute variable H bornée et $\mathcal{F}_s$-mesurable :

$$\mathbf{E}(H(X_t - X_s)) = 0,$$

ce qui montre que X est une martingale. Or par sa définition comme intégrale contre la mesure de Lebesgue, X est également un processus à variation bornée (et issu de 0). Cela assure de manière classique que presque sûrement :

$$\forall t \in [0,T], \ X_s = 0.$$

Ainsi presque sûrement $K_.$ est nulle presque partout sur $[0,T]$ pour la mesure de Lebesgue ce qui donne exactement $K = 0$ dans $L^{4/3}(\Omega \times [0,T], \mathrm{Prog}, d\mathbf{P} \otimes ds)$.

Étape 2 : Par l'étape 1, on commence par approcher σ par un processus de la forme :

$$\tilde{\sigma}(\omega, t) = \sum_{i=1}^{p} H_i(\omega) \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t),$$

et on veut montrer le résultat d'approximation pour ce processus. Grâce à des fonctions de type plateau, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, il existe une suite $(f_i^n)_n$ de fonctions continues sur $[0,T]$, positives et bornées par 1 telle que :

$$\int_0^T |f_i^n(s) - \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s)|^4 \, ds \to 0.$$

On pose donc :

$$\tilde{\sigma}^n(\omega, t) = \sum_{i=1}^{p} H_i(\omega) f_i^n(t).$$

Il est clair que $\tilde{\sigma}^n$ vérifie les hypothèses voulues. En utilisant que les H_i sont bornées et un argument de convexité, il existe $C > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_0^T |\tilde{\sigma}_s^n - \tilde{\sigma}_s|^4 \, ds &\leq C \sum_{i=1}^{p} \int_0^T |f_i^n(s) - \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s)|^4 \, ds \\ &\to 0, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Le théorème suivant est l'analogue du théorème 6.2.16 dans le cadre de la dérivée plate, avec des hypothèses qui sont analogues.

Théorème 3.3.2. *Soit $u : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$ admettant une dérivée plate $\frac{\delta u}{\delta m}$. On suppose que :*

- *Pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, $\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(.) \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$.*

- *Pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$:*

$$\sup_{\mu \in \mathcal{K}} \int_{\mathbf{R}^d} |\partial_x \frac{\delta u}{\delta m} u(\mu)(v)|^2 + |\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m} u(\mu)(v)|^2 \, d\mu(v) < +\infty.$$

- *Les applications :*

$$(\mu, x) \in (\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \mathbf{R}^d) \mapsto \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \in \mathbf{R}^d,$$
$$(\mu, x) \in (\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \mathbf{R}^d) \mapsto \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \in \mathbf{R}^{d \times d},$$

sont continues.

Alors pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, on a :

$$u(\mu_t) = u(\mu_0) + \int_0^t \mathbf{E}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s).b_s\right) ds + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{E}\left(\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_s)(X_s).a_s\right) ds,$$

avec les mêmes notations que dans le théorème 6.2.16.

On donne seulement la structure de la preuve.

Démonstration :

Étape 1 : De la même manière que dans la preuve de 6.2.16, on montre en utilisant les fonctions du type $u \star \rho$ qu'on peut supposer que $\frac{\delta u}{\delta m}$ et ses dérivées sont globalement bornées et uniformément continues sur $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d$.

Étape 2 : On utilise le lemme précédent et on montre qu'on peut supposer que b et σ sont des processus à trajectoires continues, et bornés uniformément par rapport à $t \in \mathbf{R}^+$ et $\omega \in \Omega$.

Étape 3 : Une fois qu'on a affaibli les hypothèses sur X et u, la même preuve de dérivation de $t \mapsto u(\mu_t)$ que pour le théorème 3.1.1 permet de conclure.

□

4 Applications de la formule d'Itô

L'objectif de cette partie est de donner quelques applications de la formule d'Itô pour un flot de mesures, et notamment en ce qui concerne les EDS de McKean-Vlasov. On pourra consulter l'appendice pour avoir plus de détails sur ce type d'EDS et notamment le théorème 6.3.3 d'existence et d'unicité. Les résultats présentés dans cette partie sont inspirés des résultats présents dans [CD18].

4.1 Semi-groupe généré par une EDS de type McKean-Vlasov

On s'intéresse ici au semi-groupe généré par une EDS de McKean-Vlasov :

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t, \mu_t)\, dt + \sigma(t, X_t, \mu_t)\, dB_t \\ \mu_t &= \mathcal{L}(X_t) \end{cases},$$

où $b : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}^d$ et $\sigma : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}^{d\times d}$ sont des applications continues telles que pour tout $T > 0$, il existe $C_T > 0$ telle que pour tout $t \in [0, T]$, $x, x' \in \mathbf{R}^d$, $\mu, \mu' \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$:

1. $|b(t, x, \mu)| \leq C_T(1 + |x| + M_2(\mu))$
2. $|\sigma(t, x, \mu)| \leq C_T(1 + |x| + M_2(\mu))$
3. $|b(t, x, \mu) - b(t, x', \mu')| + |\sigma(t, x, \mu) - \sigma(t, x', \mu')| \leq C_T(|x - x'| + W_2(\mu, \mu'))$,

où $M_2(\mu) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^d} |x|^2\, d\mu(x)$. On suppose que $(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P})$ est sans atomes de telle sorte à ce que pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, il existe $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$ de loi μ. Le théorème 6.3.3 assure qu'il existe une unique solution à cette EDS ayant pour donnée initiale X_0. On note cette unique solution $(X_t^{X_0,\mu})_{t\geq 0}$. Le théorème classique de Yamada-Watanabe assure qu'il y a unicité faible pour cette EDS de McKean-Vlasov puisque la famille de marginales $(\mu_t)_t$ est unique d'après le théorème de point fixe utilisé dans la preuve du théorème 6.3.3. La loi de X_t dépend donc seulement de la loi de X_0. Ainsi la définition suivante a bien un sens.

Définition 4.1.1. *Pour tout $t \in \mathbf{R}^+$ et pour toute $\phi : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$, on définit :*

$$\mathscr{P}_t\phi : \begin{cases} \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) & \to \mathbf{R} \\ \qquad \mu & \mapsto \phi(\mathcal{L}(X_t^{X_0,\mu})) \end{cases}.$$

Remarque 4.1.2. *L'hypothèse faite ici sur σ :*

$$|\sigma(t, x, \mu)| \leq C_T(1 + |x| + M_2(\mu)),$$

est moins stricte que l'hypothèse :

$$|\sigma(t, x, \mu)| \leq C_T(1 + M_2(\mu)),$$

faite dans [CD18]. Cela s'explique par l'hypothèse de moment d'ordre 4 sur la diffusion σ dans la formule d'Itô du théorème 6.2.16 présent dans [CD18]. On a vu dans le théorème 3.2.2 qu'avec des hypothèses un peu plus fortes sur u, on peut faire des hypothèses seulement sur le moment d'ordre 2 de σ ce qui est clairement assuré ici par croissance sous-linéaire des coefficients et par continuité L^2 de la solution de l'EDS de McKean-Vlasov.

Définition 4.1.3. *On note $\mathcal{C}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d);\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions $u : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$ continues, bornées, et telles que :*

$$u(\mu) \underset{M_2(\mu)\to+\infty}{\to} 0.$$

On note également $\mathcal{UC}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d);\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions $u \in \mathcal{C}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d);\mathbf{R})$ qui sont uniformément continues. On munit ces espaces de la norme uniforme :

$$\|u\| = \sup_{\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)} |u(\mu)|,$$

qui en fait des espaces de Banach.

Proposition 4.1.4. *On suppose, en plus des hypothèses précédentes, que b et σ ne dépendent pas du temps t. Alors la famille $(\mathscr{P}_t)_{t\in\mathbf{R}^+}$ forme un semi-groupe de contraction d'opérateurs fortement continu sur $\mathcal{UC}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d);\mathbf{R})$.*

Démonstration : On a : $\mathscr{P}_0 = \mathrm{I}$. La propriété de semi-groupe découle de l'unicité dans le théorème 6.3.3 et du fait que b et σ ne dépendent pas de t.

On remarque que :

1. La proposition 6.3.6 assure que pour tout $T > 0$, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour toutes variables $X_0, X_0' \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$:

$$\forall t \in [0,T],\ \mathbf{E}|X_t^{X_0} - X_t^{X_0'}|^2 \leq C_T \mathbf{E}|X_0 - X_0'|^2.$$

   Cela montre que si ϕ est une fonction continue bornée, alors pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, $\mathscr{P}_t\phi$ est également une fonction continue bornée. De même, cela permet de montrer que $\mathscr{P}_t$ préserve les applications lipschitziennes et bornées, et également les fonctions bornées et uniformément continues.
2. La proposition 6.3.7 assure qu'il existe $C_T, C_T' > 0$ indépendantes de X_0 telles que :

$$\forall t \leq T,\ \mathbf{E}|X_t^{X_0}|^2 \geq e^{-C_T t}(\mathbf{E}|X_0|^2 - C_T').$$

   Cette propriété permet de montrer que si $\phi \in \mathcal{UC}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d);\mathbf{R})$ alors pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$\mathscr{P}_t\phi(\mu) \underset{M_2(\mu)\to+\infty}{\to} 0.$$

   On a donc montré, avec ce qui précède, que pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, $\mathscr{P}_t$ est un opérateur linéaire continu sur $\mathcal{C}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d);\mathbf{R})$, et également sur $\mathcal{UC}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d);\mathbf{R})$ puisque cet espace est stable par le semi-groupe.

Il reste alors à montrer l'aspect fortement continu du semi-groupe. Pour cela, on remarque que pour tout $T > 0$, il existe $L_T > 0$ indépendante de X_0 telle que :

$$\forall t \in [0,T],\ \mathbf{E}|X_t^{X_0} - X_0|^2 \leq tL_T(1 + \mathbf{E}|X_0|^2).$$

En effet, on a pour tout $t \in [0,T]$ et pour toute donnée initiale $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|X_t^{X_0} - X_0|^2 &\leq 2\left(t\int_0^t |b(X_s^{X_0}, \mathcal{L}(X_s^{X_0}))|^2\,ds + \int_0^t |\sigma(X_s^{X_0}, \mathcal{L}(X_s^{X_0}))|^2\,ds\right) \\
&\leq L'_T\left(\int_0^t (1 + \mathbf{E}|X_s^{X_0}|^2)\,ds\right) \quad \text{d'après les hypothèses de croissance sur } b \text{ et } \sigma, \\
&\leq tL_T(1 + \mathbf{E}|X_0|^2).
\end{aligned}$$

En effet, pour tout $s \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|X_s^{X_0}|^2 &\leq 2\mathbf{E}|X_s^{X_0} - X_s^0|^2 + 2\mathbf{E}|X_s^0|^2 \\
&\leq 2C_T\mathbf{E}|X_0|^2 + 2\mathbf{E}\sup_{s\leq T}|X_s^0|^2,
\end{aligned}$$

et on conclut en remarquant que :

$$\mathbf{E}\sup_{s\leq T}|X_s^0|^2 < +\infty,$$

d'après le théorème 6.3.3. On fixe $\phi \in \mathcal{UC}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d); \mathbf{R})$ et $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$, et on a alors pour tout $t \in \mathbf{R}^+$ et pour tout $R > 0$:

$$\begin{aligned}
|\phi(\mathcal{L}(X_t^{X_0}) - \phi(\mathcal{L}(X_0))| &\leq |\phi(\mathcal{L}(X_t^{X_0}) - \phi(\mathcal{L}(X_0))|\mathbf{1}_{\mathbf{E}|X_0|^2\leq R^2} + |\phi(\mathcal{L}(X_t^{X_0}) - \phi(\mathcal{L}(X_0))|\mathbf{1}_{\mathbf{E}|X_0|^2> R^2} \\
&\leq \sup_{W_2^2(\mu,\nu)\leq tL_T(1+R^2)} |\phi(\mu) - \phi(\nu)| + \sup_{M_2(\mu)\geq R}|\phi(\mu)| + \sup_{M_2^2(\mu)\geq e^{-C_T}(R^2 - C'_T)}|\phi(\mu)| \\
&= ⓐ + ⓑ + ⓒ.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\sup_{\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)} |\mathscr{P}_t\phi(\mu) - \phi(\mu)| \leq ⓐ + ⓑ + ⓒ.$$

On fixe $\varepsilon > 0$. On commence par choisir $R > 0$ tel que : ⓑ et ⓒ soient inférieurs à ε, ce qui est possible puisque $\phi(\mu)$ tend vers 0 lorsque $M_2(\mu)$ tend vers $+\infty$. On choisit ensuite $t > 0$ tel que ⓐ soit inférieur à ε, ce qui est possible par uniforme continuité de ϕ.

□

Une fois le semi-groupe défini, on s'intéresse à son générateur.

Définition 4.1.5. *Le générateur de $(\mathscr{P}_t)_{t\in\mathbf{R}^+}$ est l'opérateur non borné sur $\mathcal{UC}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d); \mathbf{R})$ noté $\mathscr{L}$ défini par son domaine $\mathcal{D}(\mathscr{L})$ égal à l'ensemble des $f \in \mathcal{UC}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d); \mathbf{R})$ tel qu'il existe $g \in \mathcal{UC}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d); \mathbf{R})$ tel que :*

$$\lim_{t\downarrow 0}\left\|\frac{\mathscr{P}_t f - f}{t} - g\right\| = 0,$$

et avec $\mathscr{L}f = g$.

Commençons par un lemme qui est utile en pratique.

Lemme 4.1.6. *Supposons que $(\mathscr{P}_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de contraction et fortement continu sur $\mathcal{UC}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \mathbf{R})$. On suppose de plus que si f est positive, alors $\mathscr{P}_t f$ est également positive pour tout $t \in \mathbf{R}^+$. Supposons que pour $f \in \mathcal{UC}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \mathbf{R})$, il existe $g \in \mathcal{UC}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \mathbf{R})$ tel que :*

$$\forall \mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d),\ \lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathscr{P}_t f(\mu) - f(\mu)}{t} = g(\mu).$$

Alors $f \in \mathcal{D}(\mathscr{L})$ et on a :

$$\mathscr{L}f = g.$$

Démonstration : On définit l'opérateur $\tilde{\mathscr{L}}$ dont le domaine est l'ensemble des $f \in \mathcal{UC}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \mathbf{R})$ tel qu'il existe $g \in \mathcal{UC}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \mathbf{R})$ tel que :

$$\forall \mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d),\ \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathscr{P}_t f(\mu) - f(\mu)}{t} = g(\mu),$$

et on pose :

$$\tilde{\mathscr{L}} f = g.$$

Il est clair que $\tilde{\mathscr{L}}$ est une extension de $\mathscr{L}$. Montrons que si $f \in \mathcal{D}(\tilde{\mathscr{L}})$ est telle que :

$$f(\mu_0) = \max f > 0,$$

alors $\tilde{\mathscr{L}} f(\mu_0) \leq 0$. En effet pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, si on note f^+ la partie positive de f, alors par positivité de $\mathscr{P}_t$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_t f(\mu_0) - f(\mu_0) &\leq \mathscr{P}_t f^+(\mu_0) - \|f^+\| \\
&\leq \|\mathscr{P}_t f^+\| - \|f^+\| \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

d'où le résultat en divisant par $t > 0$ et en laissant tendre t vers 0. Fixons maintenant $q > 0$, par hypothèse sur le semi-groupe, on sait que $q\mathrm{I} - \mathscr{L}$ est une bijection de $\mathcal{D}(\mathscr{L})$ sur $\mathcal{UC}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \mathbf{R})$. On sait que $q\mathrm{I} - \tilde{\mathscr{L}}$ est une extension de $q\mathrm{I} - \mathscr{L}$. Montrons que cet opérateur est injectif. Supposons par l'absurde que, pour $f \in \mathcal{D}(\tilde{\mathscr{L}})$ non nulle, on a : $(q\mathrm{I} - \tilde{\mathscr{L}})f = 0$. Quitte à prendre $-f$, on peut supposer que $f^+ \neq 0$. Il existe donc μ_0 tel que :

$$f(\mu_0) = \max f > 0.$$

On remarque ensuite que :

$$(q\mathrm{I} - \tilde{\mathscr{L}}) f(x_0) \geq q f(x_0) > 0,$$

ce qui est absurde. D'où l'injectivité de $q\mathrm{I} - \tilde{\mathscr{L}}$. Puisque l'image de $q\mathrm{I} - \mathscr{L}$ est égale à $\mathcal{UC}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \mathbf{R})$, on déduit que les domaines de $\mathscr{L}$ et $\tilde{\mathscr{L}}$ sont égaux et que :

$$q\mathrm{I} - \mathscr{L} = q\mathrm{I} - \tilde{\mathscr{L}},$$

et donc $\tilde{\mathscr{L}} = \mathscr{L}$. □

Le semi-groupe associé à une EDS de McKean-Vlasov comme précédemment vérifie les hypothèses du lemme précédent. On peut donc dériver $t \in \mathbf{R}^+ \mapsto \mathscr{P}_t f(\mu)$ à μ fixée pour trouver le générateur, sans travailler avec le norme uniforme. On ne cherche pas à déterminer le domaine exact du générateur.

Dans le calcul qui suit, on n'a pas besoin de supposer que b et σ ne dépendent pas du temps. On fixe $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ et on note $\mu_t = \mathcal{L}(X_t^{X_0})$, où X_0 est de loi μ. On se donne alors une application $u : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$ admettant une dérivée plate satisfaisant les hypothèses du théorème 3.2.2 pour $p = 2$. On a alors, grâce à la formule d'Itô qu'on dérive (ce qui est légitime puisque l'intégrande est continue par un argument d'uniforme intégrabilité), pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\mathscr{P}_t u(\mu)\right) &= \mathbf{E}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_t)(X_t^{X_0}).b(t, X_t^{X_0}, \mu_t)\right) + \frac{1}{2}\mathbf{E}\left(\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_t)(X_t^{X_0}).(\sigma\sigma^*)(t, X_t^{X_0}, \mu_t)\right) \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_t)(x).b(t, x, \mu_t)\, d\mu_t(x) + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu_t)(x).(\sigma\sigma^*)(t, x, \mu_t)\, d\mu_t(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, l'application suivante est bien définie, pour tout $t \in \mathbf{R}^+$ et pour toute $u : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$ vérifiant les hypothèses précédentes :

$$\mathscr{L}_t u : \begin{cases} \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) & \to \mathbf{R} \\ \mu & \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}^d} \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x).b(t,x,\mu)\, d\mu(x) + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x).(\sigma\sigma^*)(t,x,\mu)\, d\mu(x) \end{cases}.$$

On a alors pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathscr{P}_t u(\mu)\right) = \left[\mathscr{P}_t(\mathscr{L}_t u)\right](\mu).$$

Il s'agit d'une équation de Kolmogorov sur $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$. On suppose maintenant que b et σ ne dépendent pas du temps. Alors $\mathscr{L}$ ne dépend pas non plus du temps. On déduit donc la proposition suivante.

Proposition 4.1.7. *Sous les hypothèses précédentes sur l'EDS de McKean-Vlasov, le domaine du générateur $\mathscr{L}$ du semi-groupe $(\mathscr{P}_t)_{t\in\mathbf{R}^+}$ contient l'ensemble des fonctions $u \in \mathcal{UC}_0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \mathbf{R}^d)$ admettant une dérivée plate $\frac{\delta u}{\delta m}$ vérifiant :*

1. *Il existe un ensemble borné de $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$: $\mathcal{B} = \{\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d),\ M_2(\mu) \leq R\}$, tel que pour toute $\mu \in \mathcal{B}^c$, $\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(.) = 0$.*
2. *Pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, $\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(.) \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R})$.*
3. *Il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$:*

$$\sup_{\mu\in\mathcal{B}} \left|\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x)\right| \leq C \quad et \quad \sup_{\mu\in\mathcal{B}} \left|\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x)\right| \leq C(1+|x|).$$

4. *Les applications :*

$$(\mu,x) \in (\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \mathbf{R}^d) \mapsto \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \in \mathbf{R}^d,$$
$$(\mu,x) \in (\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \mathbf{R}^d) \mapsto \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \in \mathbf{R}^{d\times d},$$

   sont continues.

5. *L'application :*

$$\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \mapsto \int_{\mathbf{R}^d} \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x).b(x,\mu)\, d\mu(x) + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x).(\sigma\sigma^*)(x,\mu)\, d\mu(x),$$

   est uniformément continue.

De plus, pour tout u vérifiant ces propriétés, on a :

$$\forall \mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d),\ \mathscr{L}u(\mu) = \int_{\mathbf{R}^d} \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x).b(x,\mu)\, d\mu(x) + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x).(\sigma\sigma^*)(x,\mu)\, d\mu(x).$$

Démonstration : Les calculs faits précédemment permettent de conclure en appliquant le lemme 4.1.6. Le caractère uniformément continu est supposé. On remarque que $\mathscr{L}u(\mu) = 0$ si $\mu \in \mathcal{B}^c$, d'où la propriété de convergence vers 0 lorsque $M_2(\mu) \to +\infty$. Les hypothèses de croissance sur u, ses dérivées, b et σ montrent que $\mathscr{L}u$ définit une fonction bornée sur $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$. Remarquons que si l'hypothèse 3 était remplacée par l'hypothèse analogue valable sur chaque compact, cela ne garantirait pas, a priori, le caractère borné de $\mathscr{L}u$. $\square$

La proposition suivante donne des conditions sur u pour que l'hypothèse 5 d'uniforme continuité de la proposition précédente soit vérifiée.

Proposition 4.1.8. *Soit u vérifiant les hypothèses 1, 2 et 3 de la proposition précédente. On suppose qu'il existe $K > 0$ telle que : $\forall x, y \in \mathbf{R}^d$, $\forall \mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$:*

$$\left|\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\nu)(y)\right| \leq K(|x-y| + W_2(\mu,\nu)(1+|x|+|y|)),$$

et

$$\left|\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\nu)(y)\right| \leq K(|x-y| + W_2(\mu,\nu)).$$

On suppose de plus qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^d,\ \forall \mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d),\ |\sigma(x,\mu)| \leq C(1+M_2(\mu)).$$

Alors $\mathscr{L}u$ est uniformément continue sur $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$.

Démonstration : Puisque $\mathscr{L}u$ est nulle en dehors du borné $\mathcal{B}$, on montre facilement qu'il suffit de montrer l'uniforme continuité sur $\mathcal{B}$ puisqu'on peut supposer sans perte de généralité que si $M_2(\mu) = R$, alors $\mathscr{L}u = 0$. Fixons $\mu, \nu \in \mathcal{B}$ et π un plan de transport optimal entre μ et ν. Traitons le premier terme dans l'expression de $\mathscr{L}u$.

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbf{R}^d} \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x).b(x,\mu)\, d\mu(x) - \int_{\mathbf{R}^d} \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\nu)(y).b(y,\nu)\, d\nu(y)\right| \\
&\leq \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \left|\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x).b(x,\mu) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\nu)(y).b(y,\nu)\right| d\pi(x,y) \\
&\leq \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \left|\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x).(b(x,\mu) - b(y,\nu))\right| d\pi(x,y) \\
&+ \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \left|\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\nu)(y)\right).b(y,\nu))\right| d\pi(x,y) \\
&= ⓐ + ⓑ.
\end{aligned}$$

Dans la suite C désigne une constante qui ne dépend pas de μ, ν, x et y et qui peut changer d'une ligne à l'autre.

$$\begin{aligned}
ⓐ &\leq C \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \left|\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x)\right| (|x-y| + W_2(\mu,\nu))\, d\pi(x,y) \\
&\leq C \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} (1+|x|)(|x-y| + W_2(\mu,\nu))\, d\pi(x,y) \\
&\leq C \left(\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} (1+|x|)^2\, d\pi(x,y)\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} (|x-y| + W_2(\mu,\nu))^2\, d\pi(x,y)\right)^{1/2} \\
&\leq C(1+M_2(\mu))W_2(\mu,\nu) \\
&\leq C(1+R)W_2(\mu,\nu).
\end{aligned}$$

De même :

$$
\begin{aligned}
ⓑ &\leq C \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} (|y| + M_2(\nu))(|x-y| + W_2(\mu,\nu)(1+|x|+|y|))\, d\pi(x,y) \\
&\leq C \left(\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} (|y| + M_2(\nu))^2\, d\pi(x,y)\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} |x-y|^2\, d\pi(x,y)\right)^{1/2} \\
&+ C \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} ((|y| + M_2(\nu))(1+|x|+|y|))\, d\pi(x,y) W_2(\mu,\nu) \\
&\leq C(R) W_2(\mu,\nu).
\end{aligned}
$$

Cela achève la preuve de l'uniforme continuité du premier terme apparaissant dans $\mathscr{L}u$. Pour le second, on écrit :

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbf{R}^d} \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x).\sigma\sigma^*(x,\mu)\, d\mu(x) - \int_{\mathbf{R}^d} \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\nu)(y).\sigma\sigma^*(y,\nu)\, d\nu(y)\right| \\
&\leq \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \left|\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x).\sigma\sigma^*(x,\mu) - \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\nu)(y).\sigma\sigma^*(y,\nu)\right| d\pi(x,y) \\
&\leq \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \left|\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x).(\sigma\sigma^*(x,\mu) - \sigma\sigma^*(y,\nu))\right| d\pi(x,y) \\
&+ \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \left|\left(\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) - \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\nu)(y)\right).\sigma\sigma^*(y,\nu))\right| d\pi(x,y) \\
&= ⓒ + ⓓ
\end{aligned}
$$

Par hypothèse sur $\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}$, on a :

$$
\begin{aligned}
ⓒ &\leq \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \left|\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x).(\sigma\sigma^*(x,\mu) - \sigma\sigma^*(y,\nu))\right| d\pi(x,y) \\
&\leq C \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} |\sigma(x,\mu)(\sigma^*(x,\mu) - \sigma^*(y,\nu))| + |(\sigma(x,\mu) - \sigma(y,\nu))\sigma^*(y,\nu)|\, d\pi(x,y) \\
&\leq C(1 + M_2(\mu) + M_2(\nu)) \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} |\sigma^*(x,\mu) - \sigma^*(y,\nu)| + |\sigma(x,\mu) - \sigma(y,\nu)|\, d\pi(x,y) \\
&\leq C(1+2R) \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} (|x-y| + W_2(\mu,\nu))\, d\pi(x,y) \\
&\leq C(1+2R) W_2(\mu,\nu).
\end{aligned}
$$

De même, on a :

$$
\begin{aligned}
ⓓ &\leq \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \left|\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) - \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\nu)(y)\right| |\sigma\sigma^*(y,\nu))|\, d\pi(x,y) \\
&\leq C(1 + M_2(\nu))^2 \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \left|\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) - \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\nu)(y)\right| d\pi(x,y) \\
&\leq C(1 + M_2(\nu))^2 \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} (|x-y| + W_2(\mu,\nu))\, d\pi(x,y) \\
&\leq C(1+R)^2 W_2(\mu,\nu).
\end{aligned}
$$

Cela achève la preuve. $\square$

Remarque 4.1.9. *Si on laisse l'hypothèse :*

$$|\sigma(x,\mu)| \leq C(1+|x|+M_2(\mu)),$$

l'uniforme continuité du dernier terme ⓓ semble difficile à obtenir. La preuve fonctionne tout de même si on a :

$$|\sigma(x,\mu)| \leq C(1+\sqrt{|x|}+M_2(\mu)),$$

Donnons des exemples de fonctions u dans le domaine de $\mathscr{L}$.

Proposition 4.1.10. *On suppose toujours que :*

$$\forall x \in \mathbf{R}^d,\ \forall \mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d),\ |\sigma(x,\mu)| \leq C(1+M_2(\mu)).$$

On considère $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^+;\mathbf{R})$ une fonction plateau valant 1 sur un intervalle $[0,R]$. Alors :

$$\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \mapsto \phi(\mu) := \rho(M_2(\mu)),$$

admet comme dérivée plate :

$$\frac{\delta \phi}{\delta m}(\mu)(x) = \frac{\rho'(M_2(\mu))}{2M_2(\mu)}|x|^2.$$

De plus, si on se donne $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R})$, alors l'application :

$$\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \mapsto \psi(\mu) = \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,d\mu(x)\right)\phi(\mu),$$

admet comme dérivée plate :

$$(\mu,x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)\times\mathbf{R}^d \mapsto \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,d\mu(x)\right)\frac{\rho'(M_2(\mu))}{2M_2(\mu)}|x|^2 + f(x)\rho(M_2(\mu)),$$

et est dans le domaine de $\mathscr{L}$.

Démonstration : On commence par donner la dérivée plate de ϕ. Pour cela on remarque que la fonction $\rho(\sqrt{.})$ est $\mathcal{C}_c^\infty$ puisque ρ est constante égale à 1 au voisinage de 0. On a alors :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+,\ \frac{d}{dx}\rho(\sqrt{x}) = \frac{\rho'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}},$$

prolongée par 0 en 0 par continuité. La fonction $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \mapsto M_2(\mu)^2$ admettant comme dérivée plate la fonction $|.|^2$, on déduit que pour toutes $\mu,\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a par dérivation d'une composition de fonctions :

$$\frac{d}{dt}\rho(M_2(t\mu+(1-t)\nu) = \frac{\rho'(M_2(t\mu+(1-t)\nu)}{2M_2(t\mu+(1-t)\nu)}\int_{\mathbf{R}^d}|x|^2 d(\mu-\nu)(x).$$

La proposition 2.1.3 donne la dérivée plate de ϕ, qui vérifie bien les hypothèses requises de régularité et croissance au plus quadratique.

On calcule de même la dérivée plate de ψ par dérivation d'un produit de fonctions. Il reste à montrer que ψ est bien dans le domaine de $\mathscr{L}$. Les hypothèses 1, 2, 3, et 4 du théorème 4.1.7

sont immédiatement vérifiées. Pour conclure grâce à ce même théorème, il s'agit de voir l'uniforme continuité de $\mathscr{L}\psi$. On montre que la proposition 4.1.8 s'applique. Or on a :

$$\partial_x \frac{\delta \psi}{\delta m}(\mu)(x) = \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\, d\mu(x) \right) \frac{\rho'(M_2(\mu))}{M_2(\mu)} x + f'(x)\rho(M_2(\mu)),$$

et

$$\partial_x^2 \frac{\delta \psi}{\delta m}(\mu)(x) = \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\, d\mu(x) \right) \frac{\rho'(M_2(\mu))}{M_2(\mu)} \mathrm{I} + f''(x)\rho(M_2(\mu)).$$

□

On a alors, pour $x, y \in \mathbf{R}^d$ et $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, et en notant toujours π un plan optimal entre μ et ν :

$$\begin{aligned}
&\left| \partial_x^2 \frac{\delta \psi}{\delta m}(\mu)(x) - \partial_x^2 \frac{\delta \psi}{\delta m}(\nu)(y) \right| \\
&= \left| \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\, d\mu(x) \right) \frac{\rho'(M_2(\mu))}{M_2(\mu)} \mathrm{I} + f''(x)\rho(M_2(\mu)) - \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\, d\nu(x) \right) \frac{\rho'(M_2(\nu))}{M_2(\nu)} \mathrm{I} + f''(y)\rho(M_2(\nu)) \right| \\
&\leq \left| \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\, d\mu(x) \right) \frac{\rho'(M_2(\mu))}{M_2(\mu)} \mathrm{I} - \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\, d\nu(x) \right) \frac{\rho'(M_2(\nu))}{M_2(\nu)} \mathrm{I} \right| \\
&+ \left| f''(x)\rho(M_2(\mu)) - f''(y)\rho(M_2(\nu)) \right| \\
&\leq \left| \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\, d\mu(x) \right) \left(\frac{\rho'(M_2(\mu))}{M_2(\mu)} \mathrm{I} - \frac{\rho'(M_2(\nu))}{M_2(\nu)} \mathrm{I} \right) \right| + \left| \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\, d\mu(x) - \int_{\mathbf{R}^d} f(y)\, d\nu(y) \right) \frac{\rho'(M_2(\nu))}{M_2(\nu)} \mathrm{I} \right| \\
&+ \left| f''(x)(\rho(M_2(\mu)) - \rho(M_2(\nu))) \right| + \left| (f''(x) - f''(y))\rho(M_2(\nu)) \right| \\
&\leq C \left(\left| \frac{\rho'(M_2(\mu))}{M_2(\mu)} \mathrm{I} - \frac{\rho'(M_2(\nu))}{M_2(\nu)} \mathrm{I} \right| + \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} |f(x) - f(y)|\, d\pi(x,y) \right) \\
&+ C \left(|\rho(M_2(\mu)) - \rho(M_2(\nu))| + \left| (f''(x) - f''(y)) \right| \right),
\end{aligned}$$

où la constante C provient du caractère borné de f, f'', ρ et $x \in \mathbf{R}^+ \mapsto \frac{\rho'(x)}{x}$, puisque ρ' est nulle au voisinage de 0. En utilisant le caractère globalement lipschitzien des fonctions $x \in \mathbf{R}^+ \mapsto \frac{\rho'(x)}{x}$, f, ρ et f'', on peut conclure si on montre que $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \mapsto M_2(\mu)$ est globalement lipschitzienne sur $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$. Or on a par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
M_2(\mu) &= \left(\int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} |x - y + y|^2\, d\pi(x,y) \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} |x - y|^2\, d\pi(x,y) \right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} |y|^2\, d\pi(x,y) \right)^{1/2} \\
&= W_2(\mu, \nu) + M_2(\nu),
\end{aligned}$$

d'où le résultat par symétrie entre μ et ν.

On raisonne de même pour $\partial_x \frac{\delta\psi}{\delta m}$ en écrivant :

$$\begin{aligned}
&\left|\partial_x \frac{\delta\psi}{\delta m}(\mu)(x) - \partial_x \frac{\delta\psi}{\delta m}(\nu)(y)\right| \\
&\leq \left|\left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,d\mu(x)\right)\frac{\rho'(M_2(\mu))}{M_2(\mu)}x - \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,d\nu(x)\right)\frac{\rho'(M_2(\nu))}{M_2(\nu)}y\right| \\
&+ \left|f'(x)\rho(M_2(\mu)) - f'(y)\rho(M_2(\nu))\right| \\
&\leq \left|\left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,d\mu(x)\right)\frac{\rho'(M_2(\mu))}{M_2(\mu)}(x-y)\right| \\
&+ \left|\left[\left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,d\mu(x)\right)\frac{\rho'(M_2(\mu))}{M_2(\mu)} - \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,d\nu(x)\right)\frac{\rho'(M_2(\nu))}{M_2(\nu)}\right]y\right| \\
&+ \left|f'(x)\rho(M_2(\mu)) - f'(y)\rho(M_2(\nu))\right| \\
&= ⓐ + ⓑ + ⓒ.
\end{aligned}$$

En utilisant le même raisonnement que pour la dérivée seconde, il est clair qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$ⓐ + ⓒ \leq C(|x-y| + W_2(\mu,\nu)).$$

Pour ⓑ, encore une fois le même raisonnement montre qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$ⓑ \leq CW_2(\mu,\nu)|y|.$$

On a donc vérifié les hypothèses de la proposition 4.1.8, ce qui achève la preuve.

4.2 Équation rétrograde

On fixe $T > 0$. On fait les mêmes hypothèses sur l'EDS qui apparaissent au début de la sous-partie précédente (on autorise b et σ à dépendre du temps). On commence par définir le flot associé à l'EDS.

Définition 4.2.1 (Flot)**.** *On définit le flot associé à l'EDS par :*

$$\psi : \begin{cases} [0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) & \to \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \\ (t,\mu) & \mapsto \mathcal{L}(X_T^{T-t,\xi\sim\mu}) \end{cases},$$

où $X_T^{T-t,\xi\sim\mu}$ désigne la solution au temps T de l'EDS de McKean-Vlasov de la partie précédente, initialisée au temps $T-t$ par une variable aléatoire ξ de loi μ.

Remarque 4.2.2. *Si b et σ ne dépendent pas de t, alors :*

$$\psi : \begin{cases} [0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) & \to \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \\ (t,\mu) & \mapsto \mathcal{L}(X_t^{X_0,\mu}) \end{cases},$$

Définition 4.2.3. *Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d);\mathbf{R})$. On définit :*

$$\phi : \begin{cases} [0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) & \to \mathbf{R} \\ (t,\mu) & \mapsto \varphi(\mathcal{L}(X_T^{T-t,\xi\sim\mu})) \end{cases}.$$

On a alors le résultat suivant qui donne l'EDP vérifiée par ϕ sur $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ sous certaines hypothèses.

Théorème 4.2.4. *On suppose que :*

1. *Pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, $t \in [0,T] \mapsto \phi(t,\mu)$ est $\mathcal{C}^1$ avec de plus $\partial_t \phi$ continue sur $[0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$.*
2. *Pour tout $t \in [0,T]$, la fonction $\phi(t,.)$ admet une dérivée plate :*
$$(\mu, x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \mapsto \frac{\delta \phi}{\delta m}(t,\mu)(x),$$
vérifiant les hypothèses habituelles pour appliquer la formule d'Itô 3.2.2 pour $p = 2$ avec la dérivée plate.

Alors pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$:
$$\partial_t \phi(T-t,\mu) = \int_{\mathbf{R}^d} b(t,v,\mu).\partial_x \frac{\delta \phi}{\delta m}(T-t,\mu)(v)\, d\mu(v) + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} a(t,v,\mu).\partial_x^2 \frac{\delta \phi}{\delta m}(T-t,\mu)(v)\, d\mu(v),$$
avec la condition de bord : $\phi(0,.) = \varphi(.)$ et où on note toujours $a = \sigma\sigma^*$.

Démonstration : On note $\mu_t = \mathcal{L}(X_t^{X_0})$ pour une certaine variable $X_0 \in L^2$. L'objectif est de dériver :
$$t \in [0,T] \mapsto \phi(t,\mu_t).$$
Pour $h > 0$, on a en utilisant la formule d'Itô 3.2.2 :
$$\begin{aligned}\phi(t+h,\mu_{t+h}) - \phi(t,\mu_t) &= \phi(t+h,\mu_{t+h}) - \phi(t,\mu_{t+h}) + \phi(t,\mu_{t+h}) - \phi(t,\mu_t)\\ &= \int_t^{t+h} \partial_t \phi(s,\mu_{t+h})\, ds + \int_t^{t+h} \mathbf{E}\left(\partial_x \frac{\delta \phi}{\delta m}(t,\mu_s)(X_s^{X_0}).b(s,X_s^{X_0},\mu_s)\right) ds\\ &+ \frac{1}{2}\int_t^{t+h} \mathbf{E}\left(\partial_x^2 \frac{\delta \phi}{\delta m}(t,\mu_s)(X_s^{X_0}).a(s,X_s^{X_0},\mu_s)\right) ds.\end{aligned}$$
En utilisant la continuité de $\partial_t \phi$, de :
$$s \mapsto \mathbf{E}\left(\partial_x \frac{\delta \phi}{\delta m}(t,\mu_s)(X_s^{X_0}).b(s,X_s^{X_0},\mu_s)\right),$$
et de
$$s \mapsto \mathbf{E}\left(\partial_x^2 \frac{\delta \phi}{\delta m}(t,\mu_s)(X_s^{X_0}).a(s,X_s^{X_0},\mu_s)\right),$$
on déduit que :
$$\frac{d}{dt}\phi(t,\mu_t) = \partial_t \phi(t,\mu_t) + \int_{\mathbf{R}^d} b(t,v,\mu_t).\partial_x \frac{\delta \phi}{\delta m}(t,\mu)(v)\, d\mu_t(v) + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} a(t,v,\mu_t).\partial_x^2 \frac{\delta \phi}{\delta m}(t,\mu_t)(v)\, d\mu_t(v).$$
Ainsi :
$$\frac{d}{dt}\phi(T-t,\mu_t) = -\partial_t \phi(T-t,\mu_t) + \int_{\mathbf{R}^d} b(t,v,\mu_t).\partial_x \frac{\delta \phi}{\delta m}(T-t,\mu)(v)\, d\mu_t(v) + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} a(t,v,\mu_t).\partial_x^2 \frac{\delta \phi}{\delta m}(T-t,\mu_t)(v)\, d\mu_t(v).$$
Or le membre de gauche est nul puisque $t \mapsto \phi(T-t,\mu_t)$ est constante. En remarquant qu'on peut initialiser le processus au temps t avec une loi μ quelconque, on a le résultat. $\square$

4.3 Propagation du chaos

On considère maintenant le système de particules associé à l'EDS de McKean-Vlasov. On suppose que l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbf{P})$ porte une suite de mouvements browniens standards sur $\mathbf{R}^d$ indépendants qu'on note $(B^i)_{i\in\mathbf{N}}$. On se donne également une suite de variables aléatoires iid $(X_0^i)_{i\in\mathbf{N}}$ qui suivent la loi μ_0 d'une certaine variable $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$. On fait les mêmes hypothèses sur b et σ que dans la partie sur le semi-groupe généré par l'EDS. Pour tout $N \geq 1$, le théorème 6.3.1 assure qu'il existe un unique N-uplet de processus $(X^1, \ldots, X^N)$ à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ et solution de :

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\},\ dX_t^i = b(t, X_t^i, \overline{\mu}_t^N)dt + \sigma(t, X_t^i, \overline{\mu}_t^N)dB_t^i,$$

de donnée initiale $(X_0^1, \ldots, X_0^N)$, et où on note :

$$\overline{\mu}_t^N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \delta_{X_t^k},$$

la mesure empirique associée au système. On vérifie que les variables X^i ont la même loi. L'objectif est de montrer que $\overline{\mu}_t^N$ se comporte comme la loi μ_t de la solution de l'EDS de McKean-Vlasov initialisée à X_0.

Théorème 4.3.1. *On fixe $T > 0$ et on suppose qu'il existe une classe de fonctions $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_b^0(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d); \mathbf{R})$ telle que pour toute $\varphi \in \mathcal{C}$, la fonction associée ϕ vérifie :*

1. *Pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, $t \in [0, T] \mapsto \phi(t, \mu)$ est $\mathcal{C}^1$ avec de plus $\partial_t \phi$ continue sur $[0, T] \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$.*
2. *Pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $\phi(t, .)$ admet une dérivée plate :*
$$(\mu, x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \mapsto \frac{\delta \phi}{\delta m}(t, \mu)(x),$$
vérifiant les hypothèses habituelles pour appliquer la formule d'Itô 3.2.2 pour $p = 2$ avec la dérivée plate.
3. *Les applications $\partial_x \frac{\delta \phi}{\delta m}$ et $\partial_x^2 \frac{\delta \phi}{\delta m}$ sont continues sur $[0, T] \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d$.*
4. *Pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, et pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \mapsto \partial_x \frac{\delta \phi}{\delta m}(t, \mu)(x)$ admet une dérivée plate :*
$$(\mu, v) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \mapsto \frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x \frac{\delta \phi}{\delta m}(t, .)(x)\right)(\mu)(v),$$
qui est dérivable par rapport à v et tel que :
$$(t, \mu, x, v) \in [0, T] \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \mapsto \partial_v \frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x \frac{\delta \phi}{\delta m}(t, .)(x)\right)(\mu)(v),$$
est continue.
5. *On a :*
$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)} \int_{\mathbf{R}^d} \left|\partial_x \frac{\delta \phi}{\delta m}(t, \mu)(x)\right|^2 d\mu(x) < +\infty.$$
6. *On a :*
$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)} \int_{\mathbf{R}^d} \left|\partial_v \frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x \frac{\delta \phi}{\delta m}(t, .)(v)\right)(\mu)(v)\right| d\mu(v) < +\infty.$$

On suppose également qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall t \in [0,T],\ \forall x \in \mathbf{R}^d,\ \forall \mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d),\ |\sigma(t,x,\mu)| \leq C(1 + M_2(\mu)).$$

Alors pour toute $\varphi \in \mathcal{C}$, on a :

$$\mathbf{E}|\varphi(\overline{\mu}_T^N) - \varphi(\mu_T)|^2 \to 0.$$

Démonstration :

Étape 1 : On commence par montrer que :

$$\sup_{N\geq 1} \sup_{t \leq T} \mathbf{E}(M_2^2(\overline{\mu}_t^N)) < +\infty,$$

ce qui sera utile dans la suite. Or :

$$\mathbf{E}(M_2^2(\overline{\mu}_t^N)) = \mathbf{E}|X_t^N|^2,$$

puisque les X^i ont la même loi. Après quelques calculs simples, on obtient qu'il existe $C(T) > 0$ indépendante de N telle que pour tout $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|X_t^N|^2 &\leq C(T)\left(\mathbf{E}|X_0|^2 + \int_0^t \mathbf{E}(1 + |X_s^N|^2 + M_2^2(\overline{\mu}_s^N))\,ds\right) \\
&\leq 2C(T)\left(\mathbf{E}|X_0|^2 + \int_0^t \mathbf{E}|X_s^N|^2\,ds\right).
\end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall permet de conclure.

Étape 2 : On rappelle que pour $x = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbf{R}^d)^N$: $\overline{\mu}_x^N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \delta_{x_k}$. Les hypothèses faites et la proposition 2.3.2 assurent que :

$$(t,x) \in [0,T] \times (\mathbf{R}^d)^N \mapsto \phi(T-t, \overline{\mu}_x^N) \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T] \times (\mathbf{R}^d)^N; \mathbf{R}).$$

Ainsi la formule classique d'Itô assure que pour tout $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
d\phi(T-t, \overline{\mu}_t^N) &= -\partial_t \phi(T-t, \overline{\mu}_t^N)dt \\
&\quad + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N b(t, X_t^i, \overline{\mu}_t^N).\partial_x \frac{\delta\phi}{\delta m}(T-t, \overline{\mu}_t^N)(X_t^i)dt \\
&\quad + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \partial_x \frac{\delta\phi}{\delta m}(T-t, \overline{\mu}_t^N)(X_t^i).(\sigma(t, X_t^i, \overline{\mu}_t^N).dB_t^i) \\
&\quad + \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^N a(t, X_t^i, \overline{\mu}_t^N).\partial_x^2 \frac{\delta\phi}{\delta m}(T-t, \overline{\mu}_t^N)(X_t^i)dt \\
&\quad + \frac{1}{2N^2}\sum_{i=1}^N a(t, X_t^i, \overline{\mu}_t^N).\partial_v \frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x \frac{\delta\phi}{\delta m}(T-t, .)(X_t^i)\right)(\overline{\mu}_t^N)(X_t^i)dt \\
&= \text{ⓐ} + \text{ⓑ} + \text{ⓒ} + \text{ⓓ} + \text{ⓔ}.
\end{aligned}$$

Remarquons qu'on peut réécrire :

$$ⓑ = \int_{\mathbf{R}^d} b(t,y,\overline{\mu}_t^N).\partial_x \frac{\delta\phi}{\delta m}(T-t,\overline{\mu}_t^N)(y)\,d\overline{\mu}_t^N(y),$$

et

$$ⓓ = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} a(t,y,\overline{\mu}_t^N).\partial_x^2 \frac{\delta\phi}{\delta m}(T-t,\overline{\mu}_t^N)(y)\,d\overline{\mu}_t^N(y).$$

Ainsi le théorème 4.2.4 assure que :

$$\begin{aligned}
d(\phi(T-t,\overline{\mu}_t^N)-\phi(T-t,\mu_t)) &= d\phi(T-t,\overline{\mu}_t^N) \qquad (\text{car } t\mapsto\phi(T-t,\mu_t) \text{ est constante})\\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \partial_x\frac{\delta\phi}{\delta m}(T-t,\overline{\mu}_t^N)(X_t^i).(\sigma(t,X_t^i,\overline{\mu}_t^N).dB_t^i)\\
&+ \frac{1}{2N^2}\sum_{i=1}^N a(t,X_t^i,\overline{\mu}_t^N).\partial_v\frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x\frac{\delta\phi}{\delta m}(T-t,.)(X_t^i)\right)(\overline{\mu}_t^N)(X_t^i)dt.
\end{aligned}$$

On applique encore une fois la formule d'Itô pour la fonction $x\mapsto x^2$ qui assure que presque sûrement, pour tout $t\in[0,T]$:

$$\begin{aligned}
&|\phi(T-t,\overline{\mu}_t^N)-\phi(T-t,\mu_t)|^2\\
&= |\phi(T,\overline{\mu}_0^N)-\phi(T,\mu_0)|^2\\
&+2\int_0^t(\phi(T-s,\overline{\mu}_s^N)-\phi(T-s,\mu_s))\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\partial_x\frac{\delta\phi}{\delta m}(T-s,\overline{\mu}_s^N)(X_s^i).(\sigma(s,X_s^i,\overline{\mu}_s^N).dB_s^i)\right)\\
&+2\int_0^t(\phi(T-s,\overline{\mu}_s^N)-\phi(T-s,\mu_s))\left(\frac{1}{2N^2}\sum_{i=1}^N a(s,X_s^i,\overline{\mu}_s^N).\partial_v\frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x\frac{\delta\phi}{\delta m}(T-s,.)(X_s^i)\right)(\overline{\mu}_s^N)(X_s^i)\right)ds\\
&+\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N\int_0^t\left|\sigma^*(s,X_s^i,\overline{\mu}_s^N)\partial_x\frac{\delta\phi}{\delta m}(T-s,\overline{\mu}_s^N)(X_s^i)\right|^2 ds\\
&= ⓐ + ⓑ + ⓒ + ⓓ.
\end{aligned}$$

On veut maintenant passer à l'espérance dans cette formule. La partie martingale est d'espérance nulle. En effet son crochet est donné par :

$$\frac{4}{N^2}\sum_{i=1}^N\int_0^t|\phi(T-s,\overline{\mu}_s^N)-\phi(T-s,\mu_s)|^2\left|\sigma^*(s,X_s^i,\overline{\mu}_s^N)\partial_x\frac{\delta\phi}{\delta m}(T-s,\overline{\mu}_s^N)(X_s^i)\right|^2 ds,$$

qu'on peut réécrire :

$$\frac{4}{N}\int_0^t\int_{\mathbf{R}^d}|\phi(T-s,\overline{\mu}_s^N)-\phi(T-s,\mu_s)|^2\left|\sigma^*(s,y,\overline{\mu}_s^N)\partial_x\frac{\delta\phi}{\delta m}(T-s,\overline{\mu}_s^N)(y)\right|^2 d\overline{\mu}_s^N(y)\,ds.$$

En utilisant l'hypothèse 5, le fait que ϕ est bornée et l'hypothèse de croissance sur σ, on montre qu'il existe $C>0$ indépendante de N telle que :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\int_0^t\int_{\mathbf{R}^d}|\phi(T-s,\overline{\mu}_s^N)-\phi(T-s,\mu_s)|^2\left|\sigma^*(s,y,\overline{\mu}_s^N)\partial_x\frac{\delta\phi}{\delta m}(T-s,\overline{\mu}_s^N)(y)\right|^2 d\overline{\mu}_s^N(y)\,ds\\
&\le C\int_0^t(1+\mathbf{E}(M_2^2(\overline{\mu}_s^N)))\,ds,
\end{aligned}$$

l'étape 1 permet alors de conclure que l'espérance du crochet est finie. En remplaçant les sommes dans les termes ⓒ et ⓓ par des intégrales contre $\overline{\mu}_s^N$ et en raisonnant comme on vient de faire pour contrôler l'espérance du crochet, on déduit qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $N \geq 1$:

$$\mathbf{E}(|ⓒ| + |ⓓ|) \leq \frac{C}{N}.$$

On a donc montré que pour tout $N \geq 1$, on a :

$$\mathbf{E}|\phi(T-t, \overline{\mu}_t^N) - \phi(T-t, \mu_t)|^2 \leq \mathbf{E}|\phi(T, \overline{\mu}_0^N) - \phi(T, \mu_0)|^2 + \frac{C}{N} \quad (*).$$

Or $\phi(T, .)$ est continue pour W_2 (car admet une dérivée plate) et bornée par hypothèse. De plus puisque la suite $(X_0^i)_{i\in\mathbf{N}}$ est iid de loi $\mu_0 = \mathcal{L}(X_0) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, le théorème de Varadarajan et la loi des grands nombres assurent que presque sûrement :

$$\overline{\mu}_0^N \overset{W_2}{\to} \mu_0.$$

Le théorème de convergence dominée montre alors que :

$$\mathbf{E}|\phi(T, \overline{\mu}_0^N) - \phi(T, \mu_0)|^2 \to 0,$$

d'où le résultat en prenant $t = T$ dans $(*)$ et en remarquant que $\phi(0, .) = \varphi(.)$.

□

5 Un exemple concret

Avant de nous intéresser à un exemple concret d'EDS de McKean-Vlasov pour laquelle on peut calculer explicitement les lois marginales, on s'intéresse au problème suivant. On considère une fonction $u : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$ admettant une dérivée plate et $\phi : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$: à quelle condition $u \circ \phi$ admet une dérivée plate ? Le théorème qui suit donne une condition pour que $u \circ \phi$ admette une dérivée plate, lorsque ϕ envoie $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ dans une certaine classe de mesures à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Théorème 5.0.1. *On suppose que :*

1. *u admet une dérivée plate $\frac{\delta u}{\delta m}$.*
2. *Il existe une fonction $f : \mathbf{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}^+$ telle que pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, $\phi(\mu)$ admet $f(., \mu)$ comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue.*
3. *Pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, l'application $f(x, .)$ admet une dérivée plate telle que :*
$$(x, \mu, v) \in \mathbf{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \to \frac{\delta f}{\delta m}(x, \mu)(v),$$
est mesurable.
4. *Pour tous compacts $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ et $\mathcal{K}' \subset \mathbf{R}^d$:*
$$\int_{\mathbf{R}^d} (1 + |x|^2) \sup_{\mu \in \mathcal{K}} \sup_{y \in \mathcal{K}'} \left| \frac{\delta f}{\delta m}(x, \mu)(y) \right| dx < +\infty.$$
5. *Pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, il existe $C > 0$ telle que :*
$$\int_{\mathbf{R}^d} (1 + |x|^2) \sup_{\mu \in \mathcal{K}} \left| \frac{\delta f}{\delta m}(x, \mu)(y) \right| dx \leq C(1 + |y|^2).$$

Alors $u \circ \phi$ admet comme dérivée plate :
$$(\mu, v) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \mapsto \frac{\delta u \circ \phi}{\delta m}(\mu)(v) := \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta u}{\delta m}(\phi(\mu))(x) \frac{\delta f}{\delta m}(x, \mu)(v) \, dx.$$

Démonstration : Fixons $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ et notons pour tout $t \in [0, 1]$: $m_t = t\mu + (1 - t)\nu$. On va utiliser la proposition 2.1.3 pour trouver la dérivée plate de $u \circ \phi$. Il s'agit donc de dériver la fonction $t \in [0, 1] \mapsto u(\phi(m_t))$.

Soit h tel que $t+h \in [0,1]$. On a :

$$\begin{aligned}
&u(\phi(m_{t+h})) - u(\phi(m_t)) \\
&= \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta u}{\delta m}(v\phi(m_{t+h}) + (1-v)\phi(m_t))(x)\, d(\phi(m_{t+h}) - \phi(m_t))(x)\, dv \\
&= \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta u}{\delta m}(v\phi(m_{t+h}) + (1-v)\phi(m_t))(x)\, [f(x, m_{t+h}) - f(x, m_t)]\, dx\, dv \\
&= \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta u}{\delta m}(v\phi(m_{t+h}) + (1-v)\phi(m_t))(x) \left[\int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta f}{\delta m}(x, pm_{t+h} + (1-p)m_t)(y)\, d(m_{t+h} - m_t)(y)\, dp\right] dx\, dv \\
&= \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta u}{\delta m}(v\phi(m_{t+h}) + (1-v)\phi(m_t))(x) \left[\int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta f}{\delta m}(x, pm_{t+h} + (1-p)m_t)(y)\, hd(\mu - \nu)(y)\, dp\right] dx\, dv \\
&= h \int_{\mathbf{R}^d} \left[\int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta u}{\delta m}(\phi(m_t))(x) \frac{\delta f}{\delta m}(x, m_t)(y)\, dx\right] d(\mu - \nu)(y) \\
&+ h \int_0^1 \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} \left[\frac{\delta u}{\delta m}(v\phi(m_{t+h}) + (1-v)\phi(m_t))(x) \frac{\delta f}{\delta m}(x, pm_{t+h} + (1-p)m_t)(y)\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{\delta u}{\delta m}(\phi(m_t))(x) \frac{\delta f}{\delta m}(x, m_t)(y)\right] dx\, d(\mu - \nu)(y)\, dp\, dv \quad \text{par Fubini avec l'hypothèse 5.}
\end{aligned}$$

Pour conclure quant à l'aspect dérivable de $t \mapsto u(\phi(m_t))$, il s'agit de voir que le dernier terme est un $o(h)$ donc que :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} \left[\frac{\delta u}{\delta m}(v\phi(m_{t+h}) + (1-v)\phi(m_t))(x) \frac{\delta f}{\delta m}(x, pm_{t+h} + (1-p)m_t)(y)\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{\delta u}{\delta m}(\phi(m_t))(x) \frac{\delta f}{\delta m}(x, m_t)(y)\right] dx\, d(\mu - \nu)(y)\, dp\, dv \underset{h \to 0}{\to} 0.
\end{aligned}$$

On raisonne par caractérisation séquentielle. On considère une suite $(h_n)_n$ qui tend vers 0 et telle que $t + h_n \in [0,1]$ pour tout n. Alors à x, y, p, v fixés, on a :

$$\left|\frac{\delta u}{\delta m}(v\phi(m_{t+h_n}) + (1-v)\phi(m_t))(x) \frac{\delta f}{\delta m}(x, pm_{t+h_n} + (1-p)m_t)(y) - \frac{\delta u}{\delta m}(\phi(m_t))(x) \frac{\delta f}{\delta m}(x, m_t)(y)\right| \to 0.$$

En effet, ϕ est continue et on a déjà vu que $m_{t+h_n} \overset{W_2}{\to} m_t$ ce qui assure d'après 6.1.11 que pour tout $v \in [0,1]$:

$$v\phi(m_{t+h_n}) + (1-v)\phi(m_t) \overset{W_2}{\to} m_t.$$

Il reste à dominer pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée. Les ensembles $\{v\phi(m_{t+h_n}) + (1-v)\phi(m_t),\ v \in [0,1],\ n \geq 1\}$ et $\{pm_{t+h_n} + (1-p)m_t,\ p \in [0,1],\ n \geq 1\}$ étant relativement compacts dans $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, il existe $\mathcal{K}$ compact dans $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ et $C > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\delta u}{\delta m}(v\phi(m_{t+h_n}) + (1-v)\phi(m_t))(x) \frac{\delta f}{\delta m}(x, pm_{t+h_n} + (1-p)m_t)(y) - \frac{\delta u}{\delta m}(\phi(m_t))(x) \frac{\delta f}{\delta m}(x, m_t)(y)\right| \\
&\leq C(1 + |x|^2) \sup_{\mu \in \mathcal{K}} \left|\frac{\delta f}{\delta m}(x, \mu)(y)\right|,
\end{aligned}$$

quantité indépendante de n et intégrable pour $dx \otimes d(\mu+\nu)(y) \otimes dp \otimes dv$ sur $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times [0,1] \times [0,1]$. On a donc montré que pour tout $t \in [0,1]$:

$$\frac{d}{dt} u(\phi(m_t)) = \int_{\mathbf{R}^d} \left[\int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta u}{\delta m}(\phi(m_t))(x) \frac{\delta f}{\delta m}(x, m_t)(y)\, dx\right] d(\mu - \nu)(y).$$

Pour pouvoir conclure avec la proposition 2.1.3, il suffit de voir la continuité et la condition de croissance au plus quadratique du candidat :

$$(\mu, v) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \mapsto \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta u}{\delta m}(\phi(\mu))(x) \frac{\delta f}{\delta m}(x,\mu)(v)\, dx.$$

En remarquant que ϕ préserve les compacts puisqu'elle est continue et en utilisant l'hypothèse de croissance au plus quadratique de $\frac{\delta u}{\delta m}$ et l'hypothèse 5, on conclut sur la croissance au plus quadratique du candidat, uniformément sur les compacts. Pour la continuité, on applique le théorème de continuité sous l'intégrale puisque l'intégrande est continue par rapport à (μ, v) à x fixé, par hypothèse. Il reste à dominer uniformément par rapport à μ et v dans des compacts par caractérisation séquentielle encore une fois. Cette domination découle de l'hypothèse 4. □

On donne maintenant un exemple d'une EDS de type Langevin pour laquelle le flot se calcule explicitement. On se place en dimension 1. On fixe $a \neq b$ deux réels et $\sigma > 0$ et on s'intéresse à l'équation :

$$dX_t = [(a-b)X_t + b\mathbf{E}(X_t)]\, dt + \sigma dB_t.$$

Cette équation vérifie les conditions du théorème 6.3.3, elle admet donc une unique solution partant de $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; \mathbf{R})$. On note toujours :

$$\psi : (t,\mu) \in \mathbf{R}^+ \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \mapsto \mathcal{L}(X_t^{X_0,\mu}) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}).$$

On sait que $t \mapsto X_t^{X_0} \in L^2$ est continue, tout comme $X_0 \in L^2 \mapsto X_t^{X_0} \in L^2$, pour tout t. On déduit qu'à t fixé, $\psi(t,.)$ définit une application continue de $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$. On cherche maintenant à calculer explicitement le flot pour montrer que le théorème 5.0.1 s'applique bien.

On applique la formule d'Itô à la fonction $f(t,x) = e^{-(a-b)t}x$ qui assure que presque sûrement pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$\begin{aligned} e^{-(a-b)t}X_t &= X_0 + \int_0^t -(a-b)e^{-(a-b)s}X_s\, ds + \int_0^t e^{-(a-b)s}\left[(a-b)X_s + b\mathbf{E}(X_s)\right] ds + \int_0^t e^{-(a-b)s}\sigma\, dB_s \\ &= X_0 + \int_0^t e^{-(a-b)s} b\mathbf{E}(X_s)\, ds + \int_0^t e^{-(a-b)s}\sigma\, dB_s. \end{aligned}$$

On peut calculer explicitement la fonction continue $t \mapsto \mathbf{E}(X_t)$. En effet en posant pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$g(t) = e^{-(a-b)t}\mathbf{E}(X_t),$$

on a :

$$g(t) = \mathbf{E}(X_0) + b\int_0^t g(s)\, ds.$$

En effet la partie martingale est une vraie martingale L^2 puisque son crochet est intégrable. On déduit donc que pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, $g(t) = e^{bt}\mathbf{E}(X_0)$. On déduit donc que :

$$\mathbf{E}(X_t) = e^{at}\mathbf{E}(X_0).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} e^{-(a-b)t}X_t &= X_0 + b\int_0^t e^{bs}\mathbf{E}(X_0)\, ds + \sigma\int_0^t e^{-(a-b)s}\, dB_s \\ &= X_0 + \mathbf{E}(X_0)(e^{bt}-1) + \sigma\int_0^t e^{-(a-b)s}\, dB_s, \end{aligned}$$

d'où :

$$X_t = X_0 e^{(a-b)t} + \mathbf{E}(X_0) e^{(a-b)t}(e^{bt} - 1) + \sigma e^{(a-b)t} \int_0^t e^{-(a-b)s} \, dB_s.$$

On s'intéresse à la loi de X_t. On commence par déterminer les marginales de $\displaystyle\int_0^\cdot e^{-(a-b)s} \, dB_s$. Il s'agit clairement d'un processus gaussien (en écrivant l'intégrale stochastique comme limite de sommes de Riemann). Ce processus est centré comme on a vu précédemment et on a pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\int_0^t e^{-(a-b)s} \, dB_s \right)^2 &= \int_0^t e^{-2(a-b)s} \, ds \\ &= \frac{e^{-2(a-b)t} - 1}{-2(a-b)}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t e^{-(a-b)s} \, dB_s \right) = \mathcal{N}\left(0, \frac{e^{-2(a-b)t} - 1}{-2(a-b)} \right).$$

On note $g_{a,b,t}$ la densité de cette gaussienne. On fixe $t > 0$ et $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbf{R}; \mathbf{R})$. En remarquant que X_0 et $\displaystyle\int_0^t e^{-(a-b)s} \, dB_s$ sont indépendantes, on a :

$$\mathbf{E}(f(X_t)) = \int_{\mathbf{R}^2} f(x_0 e^{(a-b)t} + \mathbf{E}(X_0) e^{(a-b)t}(e^{bt} - 1) + \sigma e^{(a-b)t} y) \, d\mathbf{P}_{X_0}(x_0) \, g_{a,b,t}(y) \, dy.$$

Le changement de variables :

$$u = x_0 e^{(a-b)t} + \mathbf{E}(X_0) e^{(a-b)t}(e^{bt} - 1) + \sigma e^{(a-b)t} y,$$

à x_0 fixé, conduit à :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f(X_t)) &= \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(u) g_{a,b,t} \left(\frac{u e^{-(a-b)t} - x_0 - \mathbf{E}(X_0)(e^{bt} - 1)}{\sigma} \right) \frac{e^{-(a-b)t}}{\sigma} \, du \right) d\mathbf{P}_{X_0}(x_0) \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(u) \left(\int_{\mathbf{R}} g_{a,b,t} \left(\frac{u e^{-(a-b)t} - x_0 - \mathbf{E}(X_0)(e^{bt} - 1)}{\sigma} \right) \frac{e^{-(a-b)t}}{\sigma} \, d\mathbf{P}_{X_0}(x_0) \right) du. \end{aligned}$$

Ainsi si $t > 0$, la loi de X_t est à densité :

$$u \mapsto \int_{\mathbf{R}} g_{a,b,t} \left(\frac{u e^{-(a-b)t} - x_0 - \mathbf{E}(X_0)(e^{bt} - 1)}{\sigma} \right) \frac{e^{-(a-b)t}}{\sigma} \, d\mathbf{P}_{X_0}(x_0),$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. On est ainsi dans le cadre du théorème 5.0.1 pour le flot :

$$\psi : (t, \mu) \in \mathbf{R}^+ \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \mapsto \mathcal{L}(X_t^{X_0,\mu}),$$

à $t > 0$ fixé. En gardant les mêmes notations que dans le théorème 5.0.1, et en indiquant la dépendance de la densité par rapport à $t > 0$, on a :

$$\forall \mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}), \, \forall x \in \mathbf{R}, \, f_t(x, \mu) = \int_{\mathbf{R}} g_{a,b,t} \left(\frac{x e^{-(a-b)t} - y - \mu(\mathrm{I})(e^{bt} - 1)}{\sigma} \right) \frac{e^{-(a-b)t}}{\sigma} \, d\mu(y),$$

où $\mu(\mathrm{I}) = \int_{\mathbf{R}} x \, d\mu(x)$. Pour appliquer le théorème, il s'agit d'abord de voir qu'à x et $t > 0$ fixés, la fonction :

$$\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \mapsto f_t(x, \mu),$$

admet une dérivée plate continue sur $\mathbf{R} \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}$. La fonction $f_t(x, .)$ est du même type que dans l'exemple 2.2.6. Pour utiliser cet exemple, on a besoin, à x, y fixés, de calculer la dérivée plate de :

$$\mu \mapsto h(\mu) := g_{a,b,t}\left(\frac{xe^{-(a-b)t} - y - \mu(\mathrm{I})(e^{bt} - 1)}{\sigma}\right).$$

On fixe $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ et on note pour $v \in [0, 1]$: $m_v = v\mu + (1 - v)\nu$. On a alors par dérivation d'une composée de fonctions :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dv}\left[g_{a,b,t}\left(\frac{xe^{-(a-b)t} - y - m_v(\mathrm{I})(e^{bt} - 1)}{\sigma}\right)\right] \\ &= -\frac{e^{bt} - 1}{\sigma} g'_{a,b,t}\left(\frac{xe^{-(a-b)t} - y - m_v(\mathrm{I})(e^{bt} - 1)}{\sigma}\right) \int_{\mathbf{R}} u \, d(\mu - \nu)(u). \end{aligned}$$

On vérifie aisément les hypothèses de continuité et de croissance nécessaires pour être une dérivée plate. La proposition 2.1.3 assure que la dérivée plate de h est donnée par :

$$(\mu, v) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R} \mapsto -\frac{e^{bt} - 1}{\sigma} g'_{a,b,t}\left(\frac{xe^{-(a-b)t} - y - \mu(\mathrm{I})(e^{bt} - 1)}{\sigma}\right) v.$$

La fonction $g_{a,b,t}$ étant bornée et régulière, comme ses dérivées, on vérifie facilement que les conditions de l'exemple 2.2.6 sont vérifiées. Ainsi, à x et $t > 0$ fixés, l'application $f_t(x, .)$ admet comme dérivée plate la fonction :

$$\begin{aligned} (\mu, v) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R} \mapsto &\frac{\delta f_t}{\delta m}(x, \mu)(v) := g_{a,b,t}\left(\frac{xe^{-(a-b)t} - v - \mu(\mathrm{I})(e^{bt} - 1)}{\sigma}\right) \frac{e^{-(a-b)t}}{\sigma} \\ &- v \frac{e^{-(a-b)t}}{\sigma} \frac{e^{bt} - 1}{\sigma} \int_{\mathbf{R}} g'_{a,b,t}\left(\frac{xe^{-(a-b)t} - y - \mu(\mathrm{I})(e^{bt} - 1)}{\sigma}\right) d\mu(y), \end{aligned}$$

qui est bien continue par rapport à (x, μ, v). Les hypothèses 4 et 5 du théorème 5.0.1 sont aisément vérifiées puisque $g_{a,b,t}$ est régulière et bornée, tout comme ses dérivées. On peut donc appliquer ce théorème qui assure que pour tout $t \in \mathbf{R}^+$ (le cas $t = 0$ étant immédiat), pour toute $u : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \mapsto \mathbf{R}$ admettant une dérivée plate, l'application :

$$\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \mapsto u(\psi(t, \mu)) = \mathscr{P}_t u(\mu),$$

admet une dérivée plate donnée dans le cas $t > 0$ par :

$$(\mu, v) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R} \mapsto \frac{\delta(u \circ \psi(t, .))}{\delta m}(\mu)(v) := \int_{\mathbf{R}} \frac{\delta u}{\delta m}(\psi(t, \mu))(x) \frac{\delta f_t}{\delta m}(x, \mu)(v) \, dx.$$

On s'intéresse maintenant à l'application du théorème 4.3.1 de propagation du chaos.

Proposition 5.0.2. *Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions bornées $u : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ admettant une dérivée plate telle que :*

- *Pour toute* $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$, $\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(.) \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R};\mathbf{R})$ *et les deux dérivées sont continues et bornées sur* $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}$.
- *Pour tout* $x \in \mathbf{R}$, *l'application :* $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \mapsto \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x)$ *admet une dérivée plate :*

$$(\mu, v) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R} \mapsto \frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(.)(x)\right)(\mu)(v),$$

dérivable par rapport à v *et telle que :*

$$(\mu, x, v) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mapsto \frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(.)(x)\right)(\mu)(v),$$

et

$$(\mu, x, v) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mapsto \partial_v \frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(.)(x)\right)(\mu)(v),$$

sont continues et globalement bornées.

Alors $\mathcal{C}$ *vérifie les hypothèses du théorème 4.3.1.*

Démonstration : On vérifie les hypothèses du théorème point par point.

1. Si on fixe $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$, l'application $\phi(., \mu) = u(\psi(., \mu)) = u(\mathcal{L}(X_.^{X_0,\mu}))$ est bien dérivable d'après la formule d'Itô, avec :

$$\partial_t \phi(t,\mu) = \int_{\mathbf{R}} \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\psi(t,\mu))(x)[(a-b)x + b\psi(t,\mu)(\mathrm{I})]\, d\psi(t,\mu)(x) + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\psi(t,\mu))(x)\sigma^2\, d\psi(t,\mu)(x).$$

En remarquant que ψ est continue sur $[0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$, le lemme 2.2.2 assure que cette application est continue sur $[0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$.

2. On a déjà vu que l'application $\phi(t, .)$ admet comme dérivée plate pour $t > 0$:

$$\begin{aligned}(\mu, v) \mapsto\in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R} \mapsto \int_{\mathbf{R}} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \Bigg[& g_{a,b,t}\left(\frac{xe^{-(a-b)t} - v - \mu(\mathrm{I})(e^{bt}-1)}{\sigma}\right)\frac{e^{-(a-b)t}}{\sigma} \\ & -v\frac{e^{-(a-b)t}}{\sigma}\frac{e^{bt}-1}{\sigma}\int_{\mathbf{R}} g'_{a,b,t}\left(\frac{xe^{-(a-b)t} - y - \mu(\mathrm{I})(e^{bt}-1)}{\sigma}\right) d\mu(y)\Bigg]\, dx,\end{aligned}$$

et pour $t = 0$:

$$(\mu, v) \mapsto\in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R} \mapsto \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(v).$$

Il est clair que cette dérivée plate vérifie les hypothèses de régularité (grace au lemme 2.2.2 et un théorème de régularité sous l'intégrale) et de croissance pour appliquer la formule d'Itô 3.2.2, à t fixé.

3. On montre seulement la continuité par rapport à (t, μ, v) en les points tels que $t = 0$, il s'agit du point le plus difficile car on perd la densité par rapport à la mesure de Lebesgue lorsque

$t = 0$. Raisonnons pour $\partial_x \frac{\delta \phi}{\delta m}$. Le théorème de dérivation sous l'intégrale assure que :

$$\begin{aligned}
&\partial_x \frac{\delta \phi}{\delta m}(t,\mu)(v) \\
&= -\frac{1}{\sigma}\int_{\mathbf{R}} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x)\left[g'_{a,b,t}\left(\frac{xe^{-(a-b)t} - v - \mu(\mathrm{I})(e^{bt}-1)}{\sigma}\right)\frac{e^{-(a-b)t}}{\sigma}\right. \\
&\qquad \left. -\frac{e^{-(a-b)t}}{\sigma}\frac{e^{bt}-1}{\sigma}\int_{\mathbf{R}} g'_{a,b,t}\left(\frac{xe^{-(a-b)t} - y - \mu(\mathrm{I})(e^{bt}-1)}{\sigma}\right) d\mu(y)\right] dx. \\
&= -\frac{1}{\sigma}\int_{\mathbf{R}} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(e^{(a-b)t}[\sigma u + v + \mu(\mathrm{I})(e^{bt}-1)])g'_{a,b,t}(u)\, du \\
&- \frac{e^{bt}-1}{\sigma}\int_{\mathbf{R}}\left(\int_{\mathbf{R}} \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(e^{(a-b)t}[\sigma u + y + \mu(\mathrm{I})(e^{bt}-1)])g'_{a,b,t}(u)\ du\right) d\mu(y) \\
&= e^{(a-b)t}\int_{\mathbf{R}} \partial_x\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(e^{(a-b)t}[\sigma u + v + \mu(\mathrm{I})(e^{bt}-1)])g_{a,b,t}(u)\, du \qquad (\mathrm{IPP}) \\
&+ e^{(a-b)t}(e^{bt}-1)\int_{\mathbf{R}}\left(\int_{\mathbf{R}} \partial_x\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(e^{(a-b)t}[\sigma u + y + \mu(\mathrm{I})(e^{bt}-1)])g_{a,b,t}(u)\ du\right) d\mu(y) \\
&= e^{(a-b)t}\int_{\mathbf{R}} \partial_x\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(e^{(a-b)t}[\sigma\sqrt{K(t)}u + v + \mu(\mathrm{I})(e^{bt}-1)])\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\, du \\
&+ e^{(a-b)t}(e^{bt}-1)\int_{\mathbf{R}}\left(\int_{\mathbf{R}} \partial_x\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(e^{(a-b)t}[\sigma\sqrt{K(t)}u + y + \mu(\mathrm{I})(e^{bt}-1)])\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\, du\right) d\mu(y) \\
&= ⓐ + ⓑ.
\end{aligned}$$

Pour la continuité, on raisonne séquentiellement en considérant des suites $t_n \to 0$, $\mu_n \overset{W_2}{\to} \mu$ et $v_n \to v$. On montre facilement que :

$$e^{(a-b)t_n}(e^{bt_n}-1)\int_{\mathbf{R}}\left(\int_{\mathbf{R}} \partial_x\frac{\delta u}{\delta m}(\mu_n)(e^{(a-b)t_n}[\sigma\sqrt{K(t_n)}u + y + \mu_n(\mathrm{I})(e^{bt_n}-1)])\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\, du\right) d\mu_n(y) \to 0,$$

le terme intégral étant borné uniformément en n puisque $\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}$ est globalement bornée. Pour ⓐ, on raisonne par convergence dominée et on voit qu'il converge vers :

$$\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(v).$$

Cela montre la continuité de $\partial_x \frac{\delta \phi}{\delta m}$ par rapport à (t, μ, v) pour les points tels que $t = 0$. Le même raisonnement permet de montrer la continuité de $\partial_x^2 \frac{\delta \phi}{\delta m}$ par rapport à (t, μ, v).

4. Il s'agit maintenant de voir que pour tout $x \in \mathbf{R}$, et pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \mapsto \partial_x \frac{\delta \phi}{\delta m}(t, \mu)(x)$ admet une dérivée plate :

$$(\mu, v) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R} \mapsto \frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x \frac{\delta \phi}{\delta m}(t, .)(x)\right)(\mu)(v),$$

qui est dérivable par rapport à v et tel que :

$$(t, \mu, x, v) \in [0, T] \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mapsto \partial_v \frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x \frac{\delta \phi}{\delta m}(t, .)(x)\right)(\mu)(v),$$

est continue. En reprenant les calculs faits précédemment dans le point 3, il s'agit de voir qu'une fonction du type :

$$\mu \mapsto \int_{\mathbf{R}} g(x,\mu)\,dx,$$

admet une dérivée plate sachant que $g(.,\mu) \in L^1(\mathbf{R})$ et que $g(x,.)$ admet une dérivée plate. On montre facilement que c'est le cas si l'on suppose que pour tous compacts $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ et $\mathcal{K}' \subset \mathbf{R}$:

$$\int_{\mathbf{R}} \sup_{\mu\in\mathcal{K}} \left| \frac{\delta g}{\delta m}(x,\mu)(y) \right| dx \leq C_{\mathcal{K}}(1+|y|^2),$$

et

$$\int_{\mathbf{R}} \sup_{\mu\in\mathcal{K}} \sup_{y\in\mathcal{K}'} \left| \frac{\delta g}{\delta m}(x,\mu)(y) \right| dx < +\infty.$$

La dérivée plate est alors donnée par :

$$(\mu,v) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R} \mapsto \int_{\mathbf{R}} \frac{\delta g}{\delta m}(x,\mu)(v)\,dx.$$

Pour la dérivée plate du terme ⓐ, il s'agit de voir que :

$$\mu \mapsto \int_{\mathbf{R}} \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(e^{(a-b)t}[\sigma\sqrt{K(t)}u + v + \mu(\mathrm{I})(e^{bt}-1)]) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du,$$

admet une dérivée plate. D'après ce qui précède, il s'agit, en simplifiant un peu, de voir qu'à x, v fixés :

$$\mu \mapsto \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x + v + \mu(\mathrm{I})),$$

admet une dérivée plate, les conditions d'intégrabilité et de croissance requises dans la remarque précédente seront clairement vérifiées. Soient $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ et $m_t = t\mu + (1-t)\nu$. On écrit alors :

$$\begin{aligned}
&\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(m_{t+h})(x+v+m_{t+h}(\mathrm{I})) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(m_t)(x+v+m_t(\mathrm{I})) \\
&= \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(m_{t+h})(x+v+m_{t+h}(\mathrm{I})) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(m_t)(x+v+m_{t+h}(\mathrm{I})) \\
&+ \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(m_t)(x+v+m_{t+h}(\mathrm{I})) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(m_t)(x+v+m_t(\mathrm{I})) \\
&= \int_0^1 \int_{\mathbf{R}} \frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(.)(x+v+m_{t+h}(\mathrm{I}))\right)(pm_{t+h}+(1-p)m_t)(y)\,hd(\mu-\nu)(y)\,dp \\
&+ \int_t^{t+h} \partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(m_t)(x+v+m_s(\mathrm{I}))(\mu(\mathrm{I})-\nu(\mathrm{I}))\,ds.
\end{aligned}$$

En utilisant la continuité de $\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}$ et de :

$$(\mu,x,v) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mapsto \frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(.)(x)\right)(\mu)(v),$$

on déduit que la dérivée plate qu'on cherchait est :

$$(\mu,y) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R} \mapsto \frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(.)(x+v+\mu(\mathrm{I}))\right)(\mu)(y) + y\partial_x^2 \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x+v+\mu(\mathrm{I})).$$

Cela permet de conclure pour ⓐ. On raisonne de même pour ⓑ. On obtient alors la longue expression :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x \frac{\delta\phi}{\delta m}(t,.)(x)\right)(\mu)(v)\\
&= e^{(a-b)t}\int_{\mathbf{R}}\left[\frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x\frac{\delta u}{\delta m}(.)(e^{(a-b)t}[\sigma\sqrt{K(t)}u+x+\mu(\mathrm{I})(e^{bt}-1)])\right)(\mu)(v)\right.\\
&\qquad\left.+\partial_x^2\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(e^{(a-b)t}[\sigma\sqrt{K(t)}u+x+\mu(\mathrm{I})(e^{bt}-1)])v(e^{bt}-1)\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du\\
&+e^{(a-b)t}(e^{bt}-1)\int_{\mathbf{R}}\left[\partial_x\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(e^{(a-b)t}[\sigma\sqrt{K(t)}u+v+\mu(\mathrm{I})(e^{bt}-1)])\right.\\
&\qquad+\int_{\mathbf{R}}\left(\frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x\frac{\delta u}{\delta m}(.)(e^{(a-b)t}[\sigma\sqrt{K(t)}u+y+\mu(\mathrm{I})(e^{bt}-1)])\right)(\mu)(v)\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left.+\partial_x^2\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(e^{(a-b)t}[\sigma\sqrt{K(t)}u+y+\mu(\mathrm{I})(e^{bt}-1)])v(e^{bt}-1)\right)\,d\mu(y)\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du
\end{aligned}
$$

La continuité de :

$$(t,\mu,x,v)\in[0,T]\times\mathcal{P}_2(\mathbf{R})\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\mapsto\partial_v\frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x\frac{\delta\phi}{\delta m}(t,.)(x)\right)(\mu)(v),$$

s'obtient par un raisonnement analogue à la continuité de $\partial_x\frac{\delta\phi}{\delta m}$ et $\partial_x^2\frac{\delta\phi}{\delta m}$ sur $[0,T]\times\mathcal{P}_2(\mathbf{R})\times\mathbf{R}$.

5. On doit montrer que :

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbf{R})}\int_{\mathbf{R}}\left|\partial_x\frac{\delta\phi}{\delta m}(t,\mu)(x)\right|^2\,d\mu(x)<+\infty.$$

On reprend l'expression trouvée à la fin du point 3 pour $\partial_x\frac{\delta\phi}{\delta m}(t,\mu)(v)$. Les hypothèses faites sur u montrent qu'il s'agit d'une fonction globalement bornée sur $[0,T]\times\mathcal{P}_2(\mathbf{R})\times\mathbf{R}$, ce qui permet de conclure.

6. On raisonne de même pour la dernière hypothèse grâce à l'expression trouvée à la fin du point 4 en remarquant que :

$$(t,\mu,x,v)\in[0,T]\times\mathcal{P}_2(\mathbf{R})\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\mapsto\partial_v\frac{\delta}{\delta m}\left(\partial_x\frac{\delta\phi}{\delta m}(t,.)(x)\right)(\mu)(v),$$

est globalement bornée d'après les hypothèses faites sur u.

$\square$

Corollaire 5.0.3. *Pour toute fonction bornée $\varphi\in\mathcal{C}_b^2(\mathbf{R};\mathbf{R})$ dont les dérivées d'ordre 1 et 2 sont également bornées, on a pour tout $T>0$:*

$$\mathbf{E}\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\varphi(X_T^k)-\int_{\mathbf{R}}\varphi\,d\mu_T\right|^2\underset{N\to+\infty}{\to}0,$$

où on garde les mêmes notations que dans le théorème 4.3.1 pour le système de particules.

Démonstration : Il s'agit de voir que la fonction :

$$\mu \mapsto \int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\, d\mu(x),$$

est bien dans l'ensemble $\mathcal{C}$ de la proposition précédente. Or cette fonction admet φ comme dérivée plate, qui vérifie les hypothèses de cette proposition. $\square$

6 Appendice

6.1 Espaces de mesures de probabilité : distances de Wasserstein

On fixe (X,d) un espace polonais, avec d une métrique le rendant complet. On fixe également $p \in [1+\infty[$. On trouvera les preuves des résultats de cette partie dans [Vil09].

6.1.1 Définitions

Définition 6.1.1. *Soit $x_0 \in X$. On définit :*

$$\mathcal{P}_p(X) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X), \quad \int_X d(x,x_0)^p \, d\mu(x) < +\infty \right\}.$$

Si $\mu \in \mathcal{P}_p(X)$, on dira que μ admet un moment d'ordre p fini.

Remarque 6.1.2.

- *Il est facile de voir, grâce à l'inégalité triangulaire, que si la condition dans la définition est réalisée pour un x_0, alors elle l'est pour tout x_0.*
- *Si d est une distance bornée, alors pour tout $p \geq 1$, on a : $\mathcal{P}_p(X) = \mathcal{P}(X)$.*

Notation : Soient X et Y des espaces polonais, $\mu \in \mathcal{P}(X)$ et $\nu \in \mathcal{P}(Y)$. On note $\Pi(\mu,\nu)$ l'ensemble des probabilités π sur $X \times Y$ ayant comme lois marginales μ et ν. De telles probabilités sont appelées plans de transport envoyant μ sur ν.

Définition 6.1.3. *Si $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$, on notera :*

$$M_p(\mu) := \left(\int_{\mathbf{R}^d} |x|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Théorème 6.1.4. *L'application W_p définie par :*

$$W_p : \begin{cases} \mathcal{P}_p(X) \times \mathcal{P}_p(X) & \to \quad \mathbf{R}^+ \\ \quad (\mu,\nu) & \mapsto \quad \left(\inf\limits_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \displaystyle\int_{X \times X} d(x,y)^p \, d\pi(x,y) \right)^{1/p} \end{cases}$$

est une distance sur $\mathcal{P}_p(X)$, appelée distance de Wasserstein.

Remarque 6.1.5. *Une réécriture plus concise de la distance de Wasserstein est la suivante :*

$$\forall \mu,\nu \in \mathcal{P}_p(X), \quad W_p(\mu,\nu) = \left(\inf_{U\sim\mu,\, V\sim\nu} \mathbf{E}\, d(U,V)^p \right)^{1/p},$$

où on note $U \sim \mu$ une variable aléatoire de loi μ.

L'inégalité de Hölder entraîne directement la proposition qui suit.

Proposition 6.1.6. *Soient $1 \leq p \leq q < +\infty$, alors : $W_p \leq W_q$.*

Inversement, si la distance d est bornée, alors : $W_q^q \leq (diam(X))^{q-p}\, W_p^p$.

Théorème 6.1.7. *Pour tout $p \geq 1$, l'espace de Wasserstein $(\mathcal{P}_p(X), W_p)$ est un espace polonais.*

6.1.2 Convergence en distance de Wasserstein

On peut maintenant s'intéresser au lien entre la convergence d'une suite pour la distance de Wasserstein W_p et la convergence étroite.

Définition 6.1.8. *On définit :*

$$\mathcal{C}_{b,p}(X) := \left\{ f \in \mathcal{C}^0(X;\mathbf{R}), (1+d(x_0,.))^{-p} f \in \mathcal{C}_b^0(X;\mathbf{R}) \right\} \supset \mathcal{C}_b^0(X;\mathbf{R}).$$

Théorème 6.1.9. *Soient $(\mu_n)_n \in \mathcal{P}_p(X)^{\mathbf{N}}$ et $\mu \in \mathcal{P}_p(X)$. On note $\rightharpoonup$ la convergence étroite de mesures de probabilités. Alors, il y a équivalence entre :*

1. $\mu_n \overset{W_p}{\to} \mu$.
2. $\forall f \in \mathcal{C}_{b,p}(X), \quad \displaystyle\int_X f \, d\mu_n \underset{n\to+\infty}{\to} \int_X f \, d\mu.$
3. $\mu_n \rightharpoonup \mu \quad$ et $\quad \displaystyle\int_X d(x,x_0)^p \, d\mu_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_X d(x,x_0)^p \, d\mu(x), \quad \forall x_0 \in X.$
4. $\mu_n \rightharpoonup \mu \quad$ et $\quad \displaystyle\overline{\lim_n} \int_X d(x,x_0)^p \, d\mu_n(x) \leq \int_X d(x,x_0)^p \, d\mu(x), \quad \forall x_0 \in X.$
5. $\mu_n \rightharpoonup \mu \quad$ et $\quad \displaystyle\lim_{R\to+\infty} \sup_n \int_{d(x,x_0)\geq R} d(x,x_0)^p \, d\mu_n(x) = 0.$

Remarque 6.1.10.

- *On remarque que si d est une distance bornée, alors $\mathcal{P}_p(X) = \mathcal{P}(X)$ et la convergence en distance de Wasserstein coïncide avec la convergence étroite puisque $\mathcal{C}_b^0 = \mathcal{C}_{b,p}$.*
- *Dans le cas où d est une distance non bornée, si $\tilde{d}$ est une distance bornée définissant la même topologie que d (par exemple $\tilde{d} = \frac{d}{1+d}$), alors n'importe laquelle des distances de Wasserstein métrise la convergence étroite.*

6.1.3 Inégalité de convéxité

L'inégalité suivante, dite de convexité, s'avérera être utile dans la suite pour obtenir certaines majorations.

Proposition 6.1.11. *Soient $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2 \in \mathcal{P}_p(X)$ et $\alpha \in [0,1]$. Alors on a l'inégalité dite de convexité suivante :*

$$W_p^p(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2, \alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2) \leq \alpha W_p^p(\mu_1,\nu_1) + (1-\alpha) W_p^p(\mu_2,\nu_2)$$

Démonstration : On prend un plan de transport optimal π_1 envoyant μ_1 sur ν_1 et un plan optimal π_2 envoyant μ_2 sur ν_2. On considère la probabilité :

$$\pi = \alpha\pi_1 + (1-\alpha)\pi_2 \in \mathcal{P}(X \times X).$$

On remarque que les marges de π sont $\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$ et $\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2$. Ainsi on a :

$$
\begin{aligned}
W_p^p(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2, \alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2) &\leq \int\limits_{X\times X} d(x,y)^p \, d\pi(x,y) \\
&= \alpha \int\limits_{X\times X} d(x,y)^p \, d\pi_1(x,y) + (1-\alpha) \int\limits_{X\times X} d(x,y)^p \, d\pi_2(x,y) \\
&= \alpha W_p^p(\mu_1,\nu_1) + (1-\alpha) W_p^p(\mu_2,\nu_2).
\end{aligned}
$$

□

On a également l'inégalité suivante.

Proposition 6.1.12. *Soient $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(X)$. Pour $t \in [0,1]$, on définit $m_t = \nu + t(\mu - \nu)$. Alors si $t \in [0,1]$ et h tel que $t + h \in [0,1]$, on a :*

$$W_p^p(m_{t+h}, m_t) \leq |h| W_p^p(\mu, \nu).$$

Démonstration : On prouve le cas $h > 0$. Pour cela on remarque qu'on peut écrire :

$$m_{t+h} = h\mu + (1-h)\frac{(1-(t+h))\nu + t\mu}{1-h} \quad \text{et} \quad m_t = h\nu + (1-h)\frac{(1-(t+h))\nu + t\mu}{1-h},$$

et on applique l'inégalité précédente. □

6.2 L-dérivée et formule d'Itô

Avant de commencer, mentionnons que les preuves des résultats présents dans cette sous-partie se trouvent toutes dans [CD18].

6.2.1 L-dérivée

Dans la suite, on notera toujours : $u : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$. L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ étant supposé complet et sans atomes, pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, il existe $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbf{R}^d)$ de loi μ. On définit alors :

$$\tilde{u} \begin{cases} L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d) & \to \mathbf{R} \\ \qquad\qquad X & \mapsto u(\mathcal{L}(X)) \end{cases},$$

où $\mathcal{L}(X)$ désigne la loi de X. On appelle $\tilde{u}$ le lifting de u.

Définition 6.2.1. *On dit que u est L-différentiable si $\tilde{u}$ est Fréchet-différentiable et on note $D\tilde{u}$ sa différentielle (identifiée à son gradient). De même on dit que u est continûment L-différentiable si $\tilde{u}$ est $\mathcal{C}^1$ au sens usuel.*

Remarque 6.2.2. *Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$, la différentielle de $\tilde{u}$ en X est notée $D\tilde{u}(X)$. Cette notation porte légèrement confusion car on peut avoir l'impression que $D\tilde{u}(X)$ est l'image de la variable X par une certaine application déterministe, ce qui n'est a priori pas le cas. La proposition suivante apporte une précision à cette remarque.*

Proposition 6.2.3. *Si u est L-différentiable, la loi du couple $(X, D\tilde{u}(X))$ ne dépend que de la loi de X et pas de la variable X de loi donnée. De plus, la variable aléatoire $D\tilde{u}(X) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$ est $\sigma(X)$-mesurable et pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, il existe une fonction mesurable : $\partial_\mu u(\mu)(.) : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ telle que pour toute variable aléatoire X de loi μ, on a :*

$$D\tilde{u}(X) \stackrel{ps}{=} \partial_\mu u(\mu)(X).$$

Remarque 6.2.4. *L'application $\partial_\mu u(\mu)(.)$ appartient à $L^2(\mu)$, donc est définie seulement μ-presque-partout.*

Dans la suite, on s'intéresse aux propriétés de régularité de la L-dérivée.

Proposition 6.2.5. *Supposons que u est continûment L-différentiable. Alors pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, il existe une version de $\partial_\mu u(\mu)(.) \in L^2(\mathbf{R}^d, \mu)$, telle que l'application :*

$$(\mu, x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \mapsto \partial_\mu u(\mu)(x),$$

soit mesurable, où on munit $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ de la tribu borélienne pour la topologie induite par W_2. De plus, si $\partial_\mu u(\mu)(.)$ possède une version continue, alors les deux versions coïncident sur le support de μ.

Théorème 6.2.6. *Supposons que u est L-différentiable et telle que $D\tilde{u}$ est globalement lipschitzienne sur $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$. Alors pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, il existe une version de $\partial_\mu u(\mu)(.) \in L^2(\mathbf{R}^d, \mu)$ lipschitzienne, de constante de Lipschitz indépendante de μ et telle que l'application :*

$$(\mu, x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \mapsto \partial_\mu u(\mu)(x),$$

soit mesurable et continue en chaque (μ, x) tel que $x \in Supp(\mu)$.

On a également le résultat suivant qui donne un résultat de différentiabilité des projections empiriques de u définies dans la définition 2.3.1.

Proposition 6.2.7. *Supposons que u est continûment L-dérivable. Alors pour tout $N \geq 1$, u^N est différentiable et on a pour tout $(x_1, \ldots, x_N) \in (\mathbf{R}^d)^N$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$:*

$$\partial_{x_i} u^N(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{N} \partial_\mu u \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \delta_{x_k} \right)(x_i).$$

Remarquons que dans la formule précédente, il n'y a pas d'ambiguïté à évaluer $\partial_\mu u \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \delta_{x_k} \right)$ en x_i puisque c'est un élément du support de $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \delta_{x_k}$.

Donnons maintenant des exemples de fonctions qui sont L-dérivables.

Exemple 6.2.8. *On se donne $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ telle que :*

$$\forall x \in \mathbf{R}^d,\, |\nabla \phi(x)| \leq C(1 + |x|),$$

et on considère :

$$u : \mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \mapsto \int_{\mathbf{R}^d} \phi \, d\mu.$$

Alors un calcul direct montre que u est continûment L-dérivable et que pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$:

$$\partial_\mu u(\mu)(.) = \nabla \phi(.).$$

Ce résultat est quelque peu contre-intuitif, la fonction u étant linéaire en μ, on pourrait s'attendre à ce que "la" dérivée de u soit simplement ϕ et non son gradient. Nous verrons dans la partie suivante que ce sera le cas pour la dérivée plate de u, sous des hypothèses plus faibles sur ϕ.

Exemple 6.2.9. *On se donne $h \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d; \mathbf{R})$ telle que :*

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^d,\, |\nabla h(x, y)| \leq C(1 + |x| + |y|),$$

et on considère :

$$u : \mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \mapsto \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} h(x, y) \, d\mu(x) \, d\mu(y).$$

Alors on a pour tout $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$:

$$\partial_\mu u(\mu)(.) = \int_{\mathbf{R}^d} \partial_y h(y, .) d\mu(y) + \int_{\mathbf{R}^d} \partial_x h(., y) \, d\mu(y).$$

Exemple 6.2.10. *On se donne $g : \mathbf{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$ continue et telle que :*

- *Pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, $g(., \mu)$ est $\mathcal{C}^1$ et $(x, \mu) \in \mathbf{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \mapsto \partial_x g(x, \mu)$ est continue. On suppose de plus que pour tout borné $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, i.e :*

  $$\sup_{\mu \in \mathcal{K}} \int_{\mathbf{R}^d} |x|^2 \, d\mu(x) < +\infty,$$

  il existe $C_{\mathcal{K}} > 0$ telle que :

  $$\forall x \in \mathbf{R}^d,\, \sup_{\mu \in \mathcal{K}} |\partial_x g(x, \mu)| \leq C_{\mathcal{K}}(1 + |x|).$$

- *Pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, $g(x, .)$ est L-dérivable et pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ on peut trouver une version de $\partial_\mu g(x, \mu)(.)$ telle que :*

  $$(x, v) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \mapsto \partial_\mu g(x, \mu)(v),$$

  est mesurable et pour tout borné $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, il existe $C_{\mathcal{K}} > 0$ telle que pour tout $x, v \in \mathbf{R}^d$:

  $$\sup_{\mu \in \mathbf{K}} |\partial_\mu g(x, \mu)(v)| \leq C_{\mathcal{K}}(1 + |x| + |v|).$$

  On considère :

  $$\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \mapsto u(\mu) := \int_{\mathbf{R}^d} g(x, \mu) \, d\mu(x).$$

  Alors pour tout $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, on a :

  $$\partial_\mu u(\mu)(v) = \partial_x g(v, \mu) + \int_{\mathbf{R}^d} \partial_\mu g(x, \mu)(v) \, d\mu(x).$$

6.2.2 Lien avec la dérivée plate

Les deux notions de dérivation de u sont distinctes. On a vu que la dérivée plate consiste à dériver : $t \in [0,1] \mapsto u(t\mu + (1-t)\nu)$. En revanche, la L-dérivée permet en particulier de dériver les applications de la forme $t \in [0,1] \mapsto u(\mathcal{L}(tX + (1-t)Y))$, où $\mathcal{L}(X) = \mu$ et $\mathcal{L}(Y) = \nu$. On a évidemment pas de manière générale : $\mathcal{L}(tX + (1-t)Y) = t\mathcal{L}(X) + (1-t)\mathcal{L}(Y)$. Une bonne manière de comprendre $\mathcal{L}(tX + (1-t)Y)$ est de voire cette probabilité comme la loi de la variable :

$$\mathbf{1}_{U \leq t} X + \mathbf{1}_{U > t} Y,$$

où U est une variable indépendante de X et Y et distribuée uniformément sur $[0,1]$.

Commençons par donner un contre-exemple d'une fonction qui admet une dérivée plate mais qui n'est pas L-dérivable. On considère l'application moment d'ordre 1 :

$$u : \begin{cases} \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) & \to \mathbf{R} \\ \mu & \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}^d} |x| \, d\mu(x) \end{cases}.$$

Cette application admet comme dérivée plate l'application constante égale à $|.|$ d'après les exemples de la partie précédente. Montrons que u n'est pas L-dérivable. Le lifting de u est l'application :

$$\tilde{u} : X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d) \mapsto \mathbf{E}|X|.$$

Si u était L-dérivable alors pour tout $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$, l'application $t \in \mathbf{R} \mapsto \mathbf{E}|tX|$ serait dérivable par composition. Ce n'est pas le cas comme on le voit en prenant $X = 1$.

On cherche maintenant comment passer d'une dérivée plate à une L-dérivée. On fixe toujours $u : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$.

Proposition 6.2.11. *Supposons que u admet une dérivée plate $\frac{\delta u}{\delta m}$. On suppose de plus que pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$, $\frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(.)$ est différentiable et vérifie :*

1. *$(\mu, x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \mapsto \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \in \mathbf{R}^d$ est continue.*
2. *Pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, il existe $C_{\mathcal{K}} > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$:*

$$\sup_{\mu \in \mathcal{K}} \left| \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(x) \right| \leq C_{\mathcal{K}}(1 + |x|).$$

Alors sous ces hypothèses, la fonction u est L-dérivable. De plus on a :

$$\forall \mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d), \, \partial_\mu u(\mu)(.) = \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mu)(.).$$

Démonstration : On fixe $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$ Alors pour tout $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$. On a :

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(X+Y) - \tilde{u}(X) &= u(\mathcal{L}(X+Y)) - u(\mathcal{L}(X)) \\
&= \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\delta u}{\delta m}(t\mathcal{L}(X+Y) + (1-t)\mathcal{L}(X))(w)\, d(\mathcal{L}(X+Y) - \mathcal{L}(X))(w)\, dt \\
&= \int_0^1 \mathbf{E}\left(\frac{\delta u}{\delta m}(t\mathcal{L}(X+Y) + (1-t)\mathcal{L}(X))(X+Y) - \frac{\delta u}{\delta m}(t\mathcal{L}(X+Y) + (1-t)\mathcal{L}(X))(X) \right) dt \\
&= \int_0^1 \mathbf{E}\left(\int_0^1 \left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(t\mathcal{L}(X+Y) + (1-t)\mathcal{L}(X))(X+vY) \right).Y\, dv \right) dt \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{E}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(t\mathcal{L}(X+Y) + (1-t)\mathcal{L}(X))(X+vY).Y \right) dv\, dt \\
&= \mathbf{E}\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mathcal{L}(X))(X).Y \right) \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{E}\left(\left(\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(t\mathcal{L}(X+Y) + (1-t)\mathcal{L}(X))(X+vY) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mathcal{L}(X))(X) \right).Y \right) dv\, dt \\
&= ⓐ + ⓑ.
\end{aligned}$$

L'hypothèse de décroissance sur $\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}$ assure que le gradient de $\tilde{u}$ en X est $\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mathcal{L}(X))(X)$ si on montre que ⓑ est un $o(\|Y\|_{L^2})$. Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|ⓑ| \leq \|Y\|_{L^2} \int_0^1 \int_0^1 \left(\mathbf{E} \left| \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(t\mathcal{L}(X+Y) + (1-t)\mathcal{L}(X))(X+vY) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mathcal{L}(X))(X) \right|^2 \right)^{1/2} dv\, dt.$$

Il s'agit donc de voir que :

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\mathbf{E} \left| \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(t\mathcal{L}(X+Y) + (1-t)\mathcal{L}(X))(X+vY) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mathcal{L}(X))(X) \right|^2 \right)^{1/2} dv\, dt \underset{Y \underset{L^2}{\to} 0}{\to} 0.$$

On raisonne séquentiellement. Soit $(Y_n)_n$ une suite qui converge vers 0 dans L^2. Montrons tout d'abord que pour tout $t, v \in [0,1]$:

$$\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(t\mathcal{L}(X+Y_n) + (1-t)\mathcal{L}(X))(X+vY_n) \overset{L^2}{\to} \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mathcal{L}(X))(X).$$

Il est clair que :

$$t\mathcal{L}(X+Y_n) + (1-t)\mathcal{L}(X) \overset{W_2}{\to} \mathcal{L}(X).$$

De plus, la continuité de $\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}$ assure que :

$$\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(t\mathcal{L}(X+Y_n) + (1-t)\mathcal{L}(X))(X+vY_n) \overset{\mathbf{P}}{\to} \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mathcal{L}(X))(X),$$

par critère de sous-suites convergentes presque sûrement. Pour avoir la convergence dans L^2, il s'agit de voir que la suite est uniformément intégrable dans L^2. Or l'ensemble :

$$\{t\mathcal{L}(X+Y_n) + (1-t)\mathcal{L}(X),\, n \geq 1\},$$

est relativement compact dans $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$. Il existe donc $C > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$:

$$\left| \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(t\mathcal{L}(X+Y_n) + (1-t)\mathcal{L}(X))(X+vY_n) \right| \leq C(1 + |X| + |Y_n|).$$

Le membre de droite est convergent dans L^2 donc uniformément intégrable. Ainsi pour tout $t, v \in [0,1]$:

$$\left(\mathbf{E}\left|\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(t\mathcal{L}(X+Y_n)+(1-t)\mathcal{L}(X))(X+vY_n) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mathcal{L}(X))(X)\right|^2\right)^{1/2} \to 0.$$

L'ensemble : $\{t\mathcal{L}(X+Y_n)+(1-t)\mathcal{L}(X),\, t \in [0,1],\, n \geq 1\}$ est relativement compact dans $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, par caractérisation séquentielle, il existe donc $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t, v \in [0,1]$:

$$\left|\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(t\mathcal{L}(X+Y_n)+(1-t)\mathcal{L}(X))(X+vY_n)\right| + \left|\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(t\mathcal{L}(X)+(1-t)\mathcal{L}(X))(X)\right| \leq C(1+|X|+|Y_n|).$$

On a donc pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t, v \in [0,1]$:

$$\left(\mathbf{E}\left|\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(t\mathcal{L}(X+Y_n)+(1-t)\mathcal{L}(X))(X+vY_n) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mathcal{L}(X))(X)\right|^2\right)^{1/2} \leq (3C^2(1+\mathbf{E}|X|^2+\mathbf{E}|Y_n|^2))^{1/2}.$$

Le membre de droite est borné par une constante indépendante de n, le théorème de convergence dominée assure que :

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\mathbf{E}\left|\partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(t\mathcal{L}(X+Y_n)+(1-t)\mathcal{L}(X))(X+vY_n) - \partial_x \frac{\delta u}{\delta m}(\mathcal{L}(X))(X)\right|^2\right)^{1/2} dv\, dt \to 0,$$

ce qui achève la preuve. □

On souhaite maintenant donner des conditions pour qu'une fonction L-dérivable admette également une dérivée plate. La proposition suivante est le résultat clé.

Proposition 6.2.12. *Supposons que u est L-dérivable et que sa L-dérivée est globalement lipschitzienne. Alors pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, on peut trouver une version de $\partial_\mu u(\mu)(.)$ continue sur $\mathbf{R}^d$ et telle qu'il existe $p^\mu \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ avec $p^\mu(0) = 0$ telle que :*

$$\partial_\mu u(\mu)(.) = \nabla p^\mu(.).$$

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}^d,\, p^\mu(x) = \int_0^1 \partial_\mu u(\mu)(tx).x\, dt.$$

De cette proposition, on déduit le résultat suivant.

Proposition 6.2.13. *Supposons que u est L-dérivable et que sa L-dérivée est globalement lipschitzienne. On suppose également que pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, on peut trouver une version de $\partial_\mu u(\mu)(.)$ telle que :*

$$(\mu, x) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \mapsto \partial_\mu u(\mu)(x),$$

est continue. Alors u admet une dérivée plate, donnée par l'application p de la proposition précédente, et qui satisfait également l'hypothèse de croissance sous-linéaire uniformément sur les compacts de $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ de la proposition 6.2.11.

6.2.3 Formule d'Itô

Dans le cadre classique, la formule d'Itô requiert de la régularité sur la fonction test. Il en est de même pour la formule d'Itô pour un flot de probabilités. On pourrait penser à demander de la régularité $\mathcal{C}^2$ du lifting $\tilde{u}$, cependant cela ne serait pas satisfaisant puisqu'il existe des fonctions de la forme : $X \in L^2 \mapsto \mathbf{E}(h(X))$, où $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$, qui ne sont pas $\mathcal{C}^2$ (voir la remarque 5.80 page 449 dans [CD18]). La définition suivante est plus adaptée.

Définition 6.2.14. *On dit que u est partiellement $\mathcal{C}^2$ si u est continûment L-dérivable et telle que pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$ il existe une version continue de $\partial_\mu u(\mu)(.)$ telle que :*

1. *$(\mu, v) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d \mapsto \partial_\mu u(\mu)(v)$ est localement bornée et continue en (μ, v) tel que $v \in Supp(\mu)$.*
2. *Pour toute $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$, l'application : $v \in \mathbf{R}^d \mapsto \partial_\mu u(\mu)(v) \in \mathbf{R}^d$ est $\mathcal{C}^1$ et $(\mu, v) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^)\times \mathbf{R}^d \mapsto \partial_v \partial_\mu u(\mu)(v)$ est localement bornée et conjointement continue en chaque (μ, v) tel que $v \in Supp(\mu)$.*

On considère alors un processus d'Itô de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s \, ds + \int_0^t \sigma_s \, dB_s,$$

où $X_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$ et où b et σ sont des processus progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ et $\mathbf{R}^{d \times d}$ respectivement vérifiant :

$$\forall T > 0, \, \mathbf{E} \int_0^T |b_s|^2 + |\sigma_s|^4 \, ds < +\infty.$$

On note également $\mu_t = \mathcal{L}(X_t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}^+$.

Lemme 6.2.15. *X est un processus adapté à trajectoires continues presque sûrement et vérifiant :*

$$\forall T > 0, \, \mathbf{E} \sup_{s \leq T} |X_s|^2 \leq +\infty,$$

ce qui assure que $t \in \mathbf{R}^+ \mapsto X_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$ est continue.

Démonstration : Les premières propriétés sont évidentes. Fixons $T > 0$, alors les inégalités de Jensen et de BDG assurent que :

$$\mathbf{E} \sup_{s \leq T} |X_s|^2 \leq 3 \left(\mathbf{E}|X_0|^2 + T\mathbf{E} \int_0^T |b_s|^2 \, ds + 4\mathbf{E} \int_0^T |\sigma_s|^2 \, ds \right) < +\infty.$$

□

On peut maintenant énoncer la formule d'Itô qui donne la dynamique de $t \mapsto u(\mu_t)$.

Théorème 6.2.16. *Soit $u : \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$ partiellement $\mathcal{C}^2$. On suppose également que pour tout compact*
$\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$:

$$\sup_{\mu \in \mathcal{K}} \int_{\mathbf{R}^d} |\partial_v \partial_\mu u(\mu)(v)|^2 \, d\mu(v) < +\infty.$$

On note toujours $\mu_t = \mathcal{L}(X_t)$ et on suppose toujours que :

$$\forall T > 0, \, \mathbf{E} \int_0^T |b_s|^2 + |\sigma_s|^4 \, ds < +\infty.$$

Alors pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, on a :

$$u(\mu_t) = u(\mu_0) + \int_0^t \mathbf{E}(\partial_\mu u(\mu_s)(X_s).b_s) \, ds + \frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{E}(\partial_v \partial_\mu u(\mu_s)(X_s).a_s) \, ds,$$

où $a_s = \sigma_s \sigma_s^*$ et où pour toutes matrices $A, B \in \mathbf{R}^{d \times d}$:

$$A.B = Tr(AB^*),$$

désigne le produit scalaire canonique.

La preuve détaillée se trouve dans [CD18], donnons en les étapes.

Démonstration :

Étape 1 : On montre qu'on peut supposer que u, $\partial_\mu u$ et $\partial_v \partial_\mu u$ sont uniformément continues sur $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d$ et globalement bornées. En effet pour $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$, on définit :

$$u \star \rho : \mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \mapsto u(\mu \circ \rho^{-1}),$$

où $\mu \circ \rho^{-1}$ désigne la mesure image de μ par ρ. On montre alors que la formule d'Itô pour $u \star \rho$ pour tout $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$, implique la formule d'Itô pour u. Cela permet de restreindre u à un compact de $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d)$. Pour avoir les propriétés voulue, notamment la continuité globale, il s'agit de considérer, pour $\varepsilon > 0$: φ_ε la densité de la gaussienne $\mathcal{N}_d(0, \varepsilon I_d)$. On pose alors :

$$\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \mapsto u \star \rho(\mu \star \varphi_\varepsilon),$$

où $\mu \star \varphi_\varepsilon$ désigne la convolution de μ par φ_ε, qui est une probabilité à densité strictement positive sur $\mathbf{R}^d$ donnée par :

$$x \in \mathbf{R}^d \mapsto \int_{\mathbf{R}^d} \varphi_\varepsilon(x - y) \, d\mu(y).$$

Son support étant $\mathbf{R}^d$, les hypothèses faites sur u et ses dérivées assurent que :

$$\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \mapsto u \star \rho(\mu \star \varphi_\varepsilon),$$

et ses dérivées ∂_μ et $\partial_v \partial_\mu$ sont uniformément continues et bornées sur $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \times \mathbf{R}^d$. On montre ensuite, en laissant tendre ε vers 0, que la formule d'Itô pour les fonctions $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}^d) \mapsto u \star \rho(\mu \star \varphi_\varepsilon)$ implique la formule d'Itô pour $u \star \rho$. On remarque également que considérer $u \star \rho$ est équivalent à remplacer $(X_t)_t$ par $(\rho(X_t))_t$ et on peut donc supposer qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\text{ps } \forall t \in \mathbf{R}^+, \, |X_t| \leq M.$$

Étape 2 : On considère les projections empiriques u^N, pour $N \geq 1$ définie dans la définition 2.3.1. Elles permettent de se ramener à du calcul différentiel usuel en dimension finie grâce à la proposition 6.2.7, le but étant d'appliquer une formule d'Itô "classique" à $u^N(X_t^1, \ldots, X_t^N)$, où les X^i sont des copies iid de X. En effet la remarque essentielle qui permet de comprendre le raisonnement est de remarquer que, si on note $\widehat{\mu}_t^N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \delta_{X_t^k}$ la mesure empirique associée à l'échantillon, alors on a :

$$W_2(\widehat{\mu}_t^N, \mu_t) \overset{\text{ps et } L^2}{\to} 0,$$

la convergence presque sûre résultant du théorème de Varadarajan et de la loi des grands nombres et la convergence L^2 d'un argument d'uniforme intégrabilité. On comprend alors que par définition de u^N, on a :

$$u^N(X_t^1, \ldots, X_t^N) \underset{N \to +\infty}{\to} u(\mu_t),$$

et également, au vu de l'expression de la différentielle de u^N, qu'un bon candidat pour approcher $\partial_\mu u(\mu_t)(X_t)$ en loi est :

$$N \partial_{x_i} u^N(X_t^1, \ldots, X_t^N).$$

Ainsi on a l'espoir qu'en utilisant la formule classique d'Itô pour u^N et $X^1, \ldots, X^N$, on puisse trouver à la limite la formule d'Itô pour le flot de probabilités.

□

6.3 EDS classiques et de type McKean-Vlasov

6.3.1 Un théorème d'existence et d'unicité classique pour les EDS

Théorème 6.3.1. *On fixe $p \geq 2$ et $T > 0$ et on considère :*

$$b : [0,T] \times \Omega \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d \quad et \quad \sigma : [0,T] \times \Omega \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^{d \times d},$$

mesurables par rapport à $Prog \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$, où $Prog$ désigne la tribu progressive. On suppose de plus que :

1. *Pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, on a :*

$$\mathbf{E} \int_0^T |b(s,x)|^p + |\sigma(s,x)|^p \, ds < +\infty,$$

où on omet la variable $\omega \in \Omega$.

2. *Il existe $K > 0$ telle que :*

$$\forall t \in [0,T], \, \forall \omega \in \Omega, \, \forall x, y \in \mathbf{R}^d, \, |b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|.$$

Alors pour toute variable $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$, l'EDS :

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t \\ X_0 &= \xi \end{cases},$$

admet une solution à trajectoires continues. De plus il y a unicité trajectorielle et on a :

$$\mathbf{E} \sup_{t \leq T} |X_t|^p < +\infty,$$

ce qui assure que $t \mapsto X_t \in L^p$ est continue.

La démonstration de ce résultat est adaptée de la preuve du théorème 2.9 page 289 de [KS87] qui traite le cas $p = 2$ avec des coefficients qui ne dépendent pas de l'aléa ω et à croissance sous-linéaire à la place de notre hypothèse 1.

Démonstration :

Étape 1 : On définit par récurrence pour tout $t \in [0,T]$:

$$\begin{cases} X_t^0 &= \xi \\ X_t^{n+1} &= \xi + \int_0^t b(x, X_s^n)\, ds + \int_0^t \sigma(x, X_s^n)\, dB_s \end{cases}.$$

On montre par récurrence que cette suite est bien définie. Il est clair que l'aspect progressivement mesurable sur X^n se transmet directement sur X^{n+1} pourvu que les intégrales soient bien définies. On va montrer par récurrence que :

$$\mathbf{E} \int_0^T |X_s^n|^p\, ds < +\infty.$$

L'initialisation est immédiate. Supposons le résultat montré au rang n. En utilisant les hypothèses on a :

$$|b(t, X_t^n)| + |\sigma(t, X_t^n)| \leq K|X_t^n| + |b(t,0)| + |\sigma(t,0)|.$$

On déduit alors de l'hypothèse de récurrence que :

$$\mathbf{E} \int_0^T |b(s, X_s^n)|^p\, ds < +\infty,$$

et de même pour σ. Cela montre que les intégrales sont bien définies et donc que X^{n+1} a bien un sens. De plus on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_0^T |X_s^{n+1}|^p\, ds &\leq 3^{p-1} \mathbf{E} \int_0^T \left(|\xi|^p + \left| \int_0^s b(u, X_u^n)\, du \right|^p + \left| \int_0^s \sigma(u, X_u^n)\, dB_u \right|^p \right) ds \\ &\leq 3^{p-1} \left(T\mathbf{E}|\xi|^p + T^p \mathbf{E} \int_0^T |b(u, X_u^n)|^p\, du + T\mathbf{E} \sup_{s \leq T} \left| \int_0^s \sigma(u, X_u^n)\, dB_u \right|^p \right) \quad \text{(Jensen)} \\ &\leq 3^{p-1} \left(T\mathbf{E}|\xi|^p + T^p \mathbf{E} \int_0^T |b(u, X_u^n)|^p\, du + C(T,p) \mathbf{E} \left(\int_0^T |\sigma(u, X_u^n)|^2\, du \right)^{p/2} \right) \quad \text{(BDG)} \\ &\leq 3^{p-1} \left(T\mathbf{E}|\xi|^p + T^p \mathbf{E} \int_0^T |b(u, X_u^n)|^p\, du + C(T,p) \mathbf{E} \int_0^T |\sigma(u, X_u^n)|^p\, du \right) \quad \text{car } p \geq 2, \end{aligned}$$

où $C(T,p)$ peut changer d'une ligne à l'autre. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_0^T |X_s^{n+1}|^p\, ds &\leq C(T,p) \left(\mathbf{E}|\xi|^p + \mathbf{E} \int_0^T |b(u, X_u^n)|^p\, du + \mathbf{E} \int_0^T |\sigma(u, X_u^n)|^p\, du \right) \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

d'après ce qui précède. Ceci achève la récurrence.

Étape 2 : On montre qu'il existe $C > 0$ (qui dépend de K, p et T) et telle que :

$$\forall n \geq 1,\ \forall t \in [0,T],\ \mathbf{E} \sup_{s \leq t} |X_s^n|^p \leq C(1 + \mathbf{E}|\xi|^p) e^{Ct}.$$

On raisonne par récurrence en choisissant C a posteriori. Pour initialiser, il suffit de prendre $C \geq 1$. Supposons qu'on ait le résultat au rang n. On a alors pour tout $t \in [0,T]$, d'après ce qui précède et en utilisant les hypothèses sur b et σ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\sup_{s\le t}|X_s^{n+1}|^p &\le C(T,p)\left(\mathbf{E}|\xi|^p + \mathbf{E}\int_0^t |b(u,X_u^n)|^p\,du + \mathbf{E}\int_0^t |\sigma(u,X_u^n)|^p\,du\right) \quad \text{(Jensen et BDG)}\\
&\le C(T,p,K)\left(\mathbf{E}|\xi|^p + \mathbf{E}\int_0^t |b(u,0)|^p\,du + \mathbf{E}\int_0^t |\sigma(u,0)|^p\,du + \mathbf{E}\int_0^t |X_u^n|^p\,du\right)\\
&\le C(T,p,K)\left(1+\mathbf{E}|\xi|^p + \mathbf{E}\int_0^t |X_u^n|^p\,du\right)\\
&\le C(T,p,K)\left(1+\mathbf{E}|\xi|^p + \int_0^t C(1+\mathbf{E}|\xi|^p)e^{Cu}\,du\right)\\
&\le C(T,p,K)(1+\mathbf{E}|\xi|^p)e^{Ct}.
\end{aligned}$$

Il suffit de choisir $C=\max(C(T,p,K),1)$ pour que la récurrence fonctionne.

Étape 3 : On écrit : $X_t^{n+1}-X_t^n = A_t^n + M_t^n$, où :

$$A_t^n = \int_0^t (b(s,X_s^n)-b(s,X_s^{n-1}))\,ds,$$

et

$$M_t^n = \int_0^t (\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s^{n-1}))\,dB_s.$$

Remarquons que M^n est une martingale L^p puisque pour tout n :

$$\mathbf{E}\int_0^t |\sigma(s,X_s^n)|^p\,ds < +\infty,$$

d'après ce qui précède. Par l'inégalité de BDG et de Jensen, on a pour tout $t\le T$:

$$\mathbf{E}\sup_{s\le t}|M_s^n|^p \le C(p)K^p\mathbf{E}\int_0^t |X_s^n - X_s^{n-1}|^p\,ds < +\infty.$$

L'inégalité de Jensen assure que :

$$\mathbf{E}\sup_{s\le t}|A_s^n|p \le T^{p-1}K^p\mathbf{E}\int_0^t |X_s^n - X_s^{n-1}|^p\,ds.$$

Il existe donc une constante $C(p,T,K)$ telle que pour tout $t\in[0,T]$ et pour tout n :

$$\mathbf{E}\sup_{s\le t}|X_s^{n+1}-X_s^n|^p \le C(p,T,K)\int_0^t \mathbf{E}|X_s^{n+1}-X_s^n|^p\,ds.$$

En itérant, on obtient que :

$$\mathbf{E}\sup_{s\le t}|X_s^{n+1}-X_s^n|^p \le C'\frac{(C(p,T,K)t)^n}{n!} \quad (*),$$

où : $C' = \sup_{s\le T}\mathbf{E}|X_s^1-\xi|^p$ qui est finie d'après l'étape 2. On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\sup_{t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n| > 2^{-n-1}) &\le \frac{\mathbf{E}\sup_{t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^p}{2^{-p(n+1)}}\\
&\le 2^pC'\frac{(2^pC(p,T,K)T)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Cette quantité étant sommable en n, le lemme de Borel-Cantelli 1 assure que pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe $N(\omega) > 0$ tel que :

$$\forall n \geq N(\omega),\, \forall t \leq T,\, |X_t^{n+1}(\omega) - X_t^n(\omega)| \leq 2^{-n-1},$$

ce qui implique en sommant que :

$$\forall n \geq N(\omega),\, \forall t \leq T,\, \forall m \geq 1,\, |X_t^{n+m}(\omega) - X_t^n(\omega)| \leq 2^{-n}.$$

Cela assure que la suite X^n est presque sûrement de Cauchy sur $\mathcal{C}^0[0,T]$ et donc convergente presque sûrement uniformément sur $[0,T]$ vers un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$. Ce processus est à trajectoires continues et est adapté comme limite de processus adaptés. On remarque également par le lemme de Fatou que pour tout $t \in [0,T]$:

$$\mathbf{E} \sup_{s\leq t} |X_s|^p \leq C(1 + \mathbf{E}|\xi|^p)e^{Ct}.$$

Il reste alors à montrer que X est bien solution de l'EDS.

Étape 4 :

1. On a immédiatement : $\mathbf{P}(X_0 = \xi) = 1$.
2. Les calculs précédents montrent que :

$$\mathbf{E} \int_0^T |b(s,X_s)|^p + |\sigma(s,X_s)|^p \, ds < +\infty,$$

   puisque :

$$\mathbf{E}|X_t|^p \leq C(1 + \mathbf{E}|\xi|^p)e^{Ct},$$

   donc les intégrales sont bien définies.
3. L'inégalité $(*)$ montre, en utilisant le lemme de Fatou, que :

$$\mathbf{E} \sup_{s\leq t} |X_s - X_s^n|^p \leq C' \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(C(p,T,K)t)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0.$$

   On déduit alors que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \sup_{s\leq T} \left| \int_0^s (b(u,X_u^n) - b(u,X_u))\, du \right|^p &\leq T^{p-1} \mathbf{E} \int_0^T |b(u,X_u^n) - b(u,X_u)|^p \, du \quad \text{Jensen} \\
&\leq T^{p-1} K^p \mathbf{E} \int_0^T |X_u^n - X_u|^p \, du \\
&\rightarrow 0.
\end{aligned}$$

   De même :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \sup_{s\leq T} \left| \int_0^s (\sigma(u,X_u^n) - \sigma(u,X_u))\, dB_u \right|^p &\leq C(p) \mathbf{E} \left(\int_0^T |\sigma(u,X_u^n) - \sigma(u,X_u)|^2 \, du \right)^{p/2} \quad \text{par BDG} \\
&\leq C(p) \mathbf{E} \int_0^T |\sigma(u,X_u^n) - \sigma(u,X_u)|^p \, du \quad \text{par Jensen} \\
&\leq C(p) \mathbf{E} \int_0^T |X_u^n - X_u|^p \, du \\
&\rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Quitte à extraire, on peut donc supposer que presque sûrement, pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$\int_0^t b(u, X_u^{n_k})\, du \underset{k \to +\infty}{\to} \int_0^t b(u, X_u)\, du \quad \text{et} \quad \int_0^t \sigma(u, X_u^{n_k})\, dB_u \underset{k \to +\infty}{\to} \int_0^t \sigma(u, X_u)\, dB_u.$$

Ainsi passant à la limite dans la définition de X^{n_k+1}, on déduit que presque sûrement, pour tout $t \in [0, T]$:

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s.$$

L'unicité trajectorielle résulte de l'inégalité de Gronwall.

□

Remarque 6.3.2. *Si les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites pour tout $T > 0$, alors en recollant les solutions, par unicité trajectorielle, on construit une solution globale sur $\mathbf{R}^+$, qui est unique.*

6.3.2 Un théorème d'existence et d'unicité pour les EDS de type McKean-Vlasov

Le théorème suivant est démontré au chapitre 4 de [CD18], dans le cas où $p = 2$.

Théorème 6.3.3. *On fixe $p \geq 2$ et $T > 0$ et on considère :*

$$b : [0, T] \times \Omega \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}^d \quad \textit{et} \quad \sigma : [0, T] \times \Omega \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}^{d \times d},$$

mesurables par rapport à Prog $\otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d))$. On suppose de plus que :

1. *Pour tout $(x, \mu) \in \mathbf{R}^d \times \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$, on a :*

$$\mathbf{E} \int_0^T |b(s, x, \mu)|^p + |\sigma(s, x, \mu)|^p\, ds < +\infty.$$

2. *Il existe $K > 0$ telle que : $\forall t \in [0, T]$, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall x, y \in \mathbf{R}^d$, $\forall \mu$, $\mu' \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$, :*

$$|b(t, x, \mu) - b(t, y, \mu')| + |\sigma(t, x, \mu) - \sigma(t, y, \mu')| \leq K(|x - y| + W_p(\mu, \mu')).$$

Alors pour toute variable $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; \mathbf{R}^d)$, l'EDS de McKean-Vlasov :

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t, \mu_t)\, dt + \sigma(t, X_t, \mu_t)\, dB_t \\ \mu_t &= \mathcal{L}(X_t) \\ X_0 &= \xi \end{cases},$$

admet une solution à trajectoires continues. Il y a unicité trajectorielle. De plus on a :

$$\mathbf{E} \sup_{t \leq T} |X_t|^p < +\infty,$$

et donc $t \mapsto X_t \in L^p$ est continue.

Démonstration :

Étape 1 : Soit $\mu \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d))$ fixée. Alors il existe une unique solution à l'EDS classique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} dX_t & = b(t, X_t, \mu_t)\, dt + \sigma(t, X_t, \mu_t)\, dB_t \\ X_0 & = \xi \end{array} \right. .$$

En effet, il suffit de vérifier que les hypothèses du théorème 6.3.1 sont satisfaites.

1. Les hypothèses de mesurabilité requises sont immédiatement vérifiées.
2. Pour tout $x \in \mathbf{R}^d$ et pour tout $s \in [0,T]$, on a :

   $$|b(s,x,\mu_s)|^p \leq 2^{p-1}(|b(s,x,\mu_0)|^p + K^p W_p^p(\mu_s,\mu_0)).$$

   D'où la condition d'intégrabilité sur b, puisque :

   $$\int_0^T W_p^p(\mu_s,\mu_0)\, ds < +\infty,$$

   par continuité. De même pour σ.
3. On a directement : $\forall s \in [0,T]$, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall x, y \in \mathbf{R}^d$:

   $$|b(s,x,\mu_s) - b(s,y,\mu_s)| + |\sigma(s,x,\mu_s) - \sigma(s,y,\mu_s)| \leq K|x-y|.$$

D'où l'existence et l'unicité voulue. Ainsi pour toute $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$, on note X^μ cette unique solution issue de ξ. De plus, le théorème 6.3.1 assure que : $t \mapsto X_t^\mu \in L^p$, est continue. Ainsi, on peut définir l'application :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{C}^0([0,T], \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)) & \to \mathcal{C}^0([0,T], \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)) \\ \mu & \mapsto (\mathcal{L}(X_t^\mu))_{t\in[0,T]} \end{array} \right. .$$

Étape 2 : Montrons que ϕ admet un unique point fixe. Soient $\mu, \mu' \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d))$. Puisque X^μ et $X^{\mu'}$ ont la même donnée initiale, alors pour tout $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{s\leq t} |X_s^\mu - X_s^{\mu'}|^p &\leq 2^{p-1} \left(\mathbf{E} \sup_{s\leq t} \left| \int_0^s b(u, X_u^\mu, \mu_u) - b(u, X_u^{\mu'}, \mu'_u)\, du \right|^p \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{E} \sup_{s\leq t} \left| \int_0^s \sigma(u, X_u^\mu, \mu_u) - \sigma(u, X_u^{\mu'}, \mu'_u)\, dB_u \right|^p \right) \\ &\leq C(p,T,K) \left(\int_0^t \mathbf{E} \sup_{u\leq s} |X_u^\mu - X_u^{\mu'}|^p\, ds + \int_0^t W_p^p(\mu_s, \mu'_s)\, ds \right) \quad \text{par Jensen et BDG.} \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall assure alors que pour tout $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{s\leq t} |X_s^\mu - X_s^{\mu'}|^p &\leq C(p,T,K) \int_0^t W_p^p(\mu_s,\mu'_s)\, ds + \int_0^t \left(\int_0^s C(p,T,K) W_p^p(\mu_u,\mu'_u)\, du \right) C(p,T,K) e^{(t-s)C(p,T,K)}\, ds \\ &\leq C(p,T,K) \int_0^t W_p^p(\mu_s,\mu'_s)\, ds, \end{aligned}$$

où la constante $C(p,T,K)$ peut toujours changer d'une ligne à l'autre. En itérant cette inégalité, on déduit que pour tout $k \geq 1$:

$$\sup_{s\leq T} W_p^p(\phi^k(\mu)_s, \phi^k(\mu')_s) \leq \frac{C(p,T,K)^k T^k}{k!} \sup_{s\leq T} W_p^p(\mu_s, \mu'_s).$$

Cela montre que pour k assez grand, ϕ^k est contractante sur l'espace de Banach $\mathcal{C}_0([0,T],\mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d))$ munit de la norme uniforme. ϕ admet donc un unique point fixe $\mu \in \mathcal{C}^0([0,T],\mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d))$. Cela signifie que la famille de marginales du processus X^μ est exactement μ, donc que X^μ est solution de l'EDS de McKean-Vlasov.

Étape 3 : Il reste à montrer l'unicité trajectorielle. Supposons qu'on ait une autre solution $\tilde{X}$ de l'EDS de McKean-Vlasov. Alors par définition, sa famille de marginales qu'on note $\tilde{\mu}$ est un point fixe de ϕ. Par unicité du point fixe, on déduit que $\mu = \tilde{\mu}$. Ainsi X^μ et $\tilde{X}$ sont solutions de l'EDS classique, où μ est fixée :

$$\begin{cases} dX_t &= b(t,X_t,\mu_t)\,dt + \sigma(t,X_t,\mu_t)\,dB_t \\ X_0 &= \xi \end{cases}.$$

D'après le théorème 6.3.1, les deux processus sont indistinguables. Le caractère continu sur L^p découle immédiatement du théorème 6.3.1. $\square$

Remarque 6.3.4. *Si les hypothèses précédentes sont vérifiées pour tout $T > 0$, on peut construire, par unicité, une solution globale sur $\mathbf{R}^+$, qui est unique.*

Exemple 6.3.5. *On donne un exemple d'applications b vérifiant les hypothèses du théorème. On se donne :*

$$g : [0,T] \times \Omega \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}^d,$$

mesurable par rapport à $Prog \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d))$ avec :

- *Pour $(x,\mu) \in \mathbf{R}^d \times \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$ fixés, il existe $C > 0$ telle que :*

$$\forall t \in [0,T],\ \forall \omega \in \Omega,\ \forall y \in \mathbf{R}^d,\ |g(t,\omega,x,y,\mu)| \leq C(1+|y|^p).$$

- *Il existe $K > 0$ tel que : $\forall t \in [0,T]$, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall x, x' \in \mathbf{R}^d$, $\forall y, y' \in \mathbf{R}^d$, $\forall \mu, \mu' \in \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d)$, :*

$$|g(t,\omega,x,y,\mu) - g(t,\omega,x',y',\mu')| \leq K(|x-x'| + |y-y'| + W_p(\mu,\mu')).$$

Alors l'application :

$$b : \begin{cases} [0,T] \times \Omega \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{P}_p(\mathbf{R}^d) & \to \mathbf{R}^d \\ (t,\omega,x,\mu) & \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}^d} g(t,\omega,x,y,\mu)\,d\mu(y) \end{cases},$$

satisfait les hypothèses du théorème précédent.

Proposition 6.3.6. *On note X^{X_0} la solution de l'EDS de McKean-Vlasov du théorème précédent. Alors pour tout $T > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toutes variables $X_0, X_0' \in L^p(\Omega,\mathcal{F}_0,\mathbf{P})$:*

$$\forall t \in [0,T],\ \mathbf{E}|X_t^{X_0} - X_t^{X_0'}|^p \leq C\mathbf{E}|X_0 - X_0'|^p.$$

Démonstration : Cela découle du lemme de Gronwall et de l'hypothèse lipschitzienne. □

Proposition 6.3.7. *On se place dans le même cadre que le théorème 6.3.3, pour $p = 2$ disons. On suppose de plus que pour tout $T > 0$, il existe $K_T > 0$ telle que :*

$$\forall t \in [0, T],\, \forall \omega \in \Omega,\, \forall x \in \mathbf{R}^d,\, |b(t, \omega, x)| \leq K_T(1 + |x| + M_2(\mu)),$$

et

$$\forall t \in [0, T],\, \forall \omega \in \Omega,\, \forall x \in \mathbf{R}^d,\, |\sigma(t, \omega, x, \mu)| \leq K_T(1 + |x| + M_2(\mu)),$$

où on note :

$$M_2(\mu) = \left(\int_{\mathbf{R}^d} |x|^2 \, d\mu(x) \right)^{1/2}.$$

Alors pour tout $T > 0$ il existe $C_T, C'_T > 0$ telles que :

$$\forall t \leq T,\, \mathbf{E}|X_t|^2 \geq e^{-C_T t}(\mathbf{E}|X_0|^2 - C'_T).$$

Démonstration : On pose :

$$T_n := \inf\{t \geq 0,\, |X_t| > n\},$$

qui est une suite de temps d'arrêt tendant vers $+\infty$ presque sûrement et on note X^{T_n} le processus arrêté. Soit $C > 0$ à choisir. On applique la formule d'Itô à $f(t, x) = e^{Ct}|x|^2$ et au processus arrêté X^{T_n} :

$$\begin{aligned}
e^{C(t\wedge T_n)}|X_t^{T_n}|^2 &= |X_0|^2 + \int_0^{t\wedge T_n} Ce^{Cs}|X_s|^2 \, ds + \int_0^{t\wedge T_n} 2e^{Cs} X_s.dX_s + \sum_{i,j=1}^d \int_0^{t\wedge T_n} e^{Cs} \, d\langle X^i, X^j \rangle_s \\
&= |X_0|^2 + \int_0^{t\wedge T_n} Ce^{Cs}|X_s|^2 \, ds + \int_0^{t\wedge T_n} 2e^{Cs} X_s.b(s, X_s, \mu_s) \, ds + \int_0^{t\wedge T_n} 2e^{Cs} X_s.(\sigma(s, X_s, \mu_s) \, dB_s) \\
&+ \sum_{i,j=1}^d \int_0^{t\wedge T_n} e^{Cs}[\sigma\sigma^*]_{i,j}(s, X_s, \mu_s) \, ds.
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance et en remarquant que $\left(\int_0^{t\wedge T_n} 2e^{Cs} X_s.(\sigma(s, X_s, \mu_s)\, dB_s)\right)_{t\geq 0}$ est une vraie martingale issue de 0 par choix de T_n, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}e^{C(t\wedge T_n)}|X_t^{T_n}|^2 &\geq \mathbf{E}|X_0|^2 + \mathbf{E}\int_0^{t\wedge T_n} Ce^{Cs}|X_s|^2\, ds - 2\mathbf{E}\int_0^{t\wedge T_n} e^{Cs}(K_T|X_s|(1+|X_s|+M_2(\mu_s)))\, ds \\
&- \mathbf{E}\int_0^{t\wedge T_n} e^{Cs}|\sigma(s, X_s, \mu_s)|^2\, ds \\
&\geq \mathbf{E}|X_0|^2 + \mathbf{E}\int_0^{t\wedge T_n} Ce^{Cs}|X_s|^2\, ds - 2\mathbf{E}\int_0^{t\wedge T_n} e^{Cs}(K_T|X_s|(1+|X_s|+M_2(\mu_s)))\, ds \\
&- \mathbf{E}\int_0^{t\wedge T_n} 3e^{Cs}K_T^2(1+|X_s|^2+M_2^2(\mu_s))\, ds \\
&\geq \mathbf{E}|X_0|^2 + \mathbf{E}\int_0^{t\wedge T_n} Ce^{Cs}|X_s|^2\, ds - 4K_T\mathbf{E}\int_0^{t\wedge T_n} e^{Cs}(1+|X_s|^2+|X_s|M_2(\mu_s))\, ds \\
&- \mathbf{E}\int_0^{t\wedge T_n} 3e^{Cs}K_T^2(1+|X_s|^2+M_2^2(\mu_s))\, ds \\
&\geq \mathbf{E}|X_0|^2 + \mathbf{E}\int_0^{t\wedge T_n} Ce^{Cs}|X_s|^2\, ds - 8K_T\mathbf{E}\int_0^{t\wedge T_n} e^{Cs}(1+|X_s|^2)\, ds \\
&- \mathbf{E}\int_0^{t\wedge T_n} 6e^{Cs}K_T^2(1+\mathbf{E}|X_s|^2)\, ds \\
&\geq \mathbf{E}|X_0|^2 + C\mathbf{E}\int_0^{t\wedge T_n} e^{Cs}|X_s|^2\, ds - 14(K_T+K_T^2)\mathbf{E}\int_0^{t\wedge T_n} e^{Cs}|X_s|^2\, ds - 14(K_T+K_T^2)Te^{CT}
\end{aligned}$$

En prenant $C_T = 14(K_T + K_T^2)$, on trouve que pour tout $t \in [0, T]$:

$$\mathbf{E}e^{C(t\wedge T_n)}|X_t^{T_n}|^2 \geq \mathbf{E}|X_0|^2 - 14(K_T + K_T^2)Te^{CT},$$

d'où le résultat en posant : $C_T' = 14(K_T + K_T^2)Te^{CT}$. On conclut en laissant tendre n vers $+\infty$ par convergence dominée puisque :

$$\mathbf{E}\sup_{s\leq t}|X_s|^2 < +\infty.$$

□

Références

[CD18] R. Carmona and F. Delarue. *Probabilistic theory of Mean Field Games with applications I.* Springer, 2018.

[KS87] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus.* Springer, 1987.

[Vil09] C. Villani. *Optimal transportation : old and new.* Springer, 2009.