Processus stochastiques réfléchis

Séminaire de M2 — 2019-2020

Thomas Cavallazzi

encadré par

Mihai Gradinaru

Table des matières

Introduction

Ce document est consacré à l'étude des processus stochastiques réfléchis, notamment les solutions d'équations différentielles stochastiques réfléchies, dont l'exemple fondamental est le mouvement brownien. Évidemment il faut d'abord définir ce qu'on entend précisément par réflexion d'un processus, en ayant en tête de s'éloigner le moins possible du processus initial. La première étude remonte aux travaux de Skorokhod en 1961 et 1962, principalement sur $\mathbf{R}^+$ (c'est-à-dire en imposant au processus de rester positif). C'est ensuite Tanaka qui a étendu la théorie aux convexes de $\mathbf{R}^n$, puis Lions et Sznitman à des domaines de $\mathbf{R}^n$ plus généraux. On se restreint ici au cadre étudié par Skorokhod, c'est-à-dire en imposant au processus de rester positif.

On commence par s'intéresser à la réflexion d'une marche aléatoire simple qu'on peut aisément se représenter et on identifie sa loi. On s'intéresse ensuite aux équations différentielles stochastiques réfléchies. On les étudie d'abord à partir du lemme de Skorokhod (qui permet de définir la réflexion) : la solution de l'EDS réfléchie est alors construite comme point fixe. L'idée est que la réflexion apparaît à travers un processus croissant (ou la mesure de Stieltjes aléatoire associée) "minimal" en un certain sens. La méthode de pénalisation permet d'approcher la solution réfléchie par des solutions d'EDS dont le terme de dérive est modifié de manière à pénaliser le fait d'être négatif pour la solution. On relie ensuite le processus croissant de réflexion au temps local en 0 de la solution de l'EDS réfléchie. C'est également grâce aux temps locaux qu'on parvient à expliciter la loi du mouvement brownien réfléchi, on obtient comme corollaire la convergence en loi de la marche aléatoire réfléchie vers le mouvement brownien réfléchi. Dans une dernière partie on s'intéresse aux δ-processus de Bessel, qui peuvent s'obtenir comme solution d'une EDS réfléchie. Les preuves qui ne sont pas rédigées dans ce document et sans références citées se trouvent dans [ZAM].

Enfin je tiens à remercier Mihai Gradinaru d'avoir encadré ce séminaire.

1 Marche aléatoire réfléchie : cas discret

On s'intéresse tout d'abord à une marche aléatoire simple et symétrique sur $\mathbf{Z}$, à laquelle on souhaite imposer de rester positive. On se donne $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires iid de loi Rademacher de paramètre $1/2$ i.e $\mathbf{P}(Y=1)=\mathbf{P}(Y=-1)=1/2$.

Définition 1.1 (*Marche aléatoire simple symétrique*)

On appelle marche aléatoire simple symétrique partant de $a \in \mathbf{Z}$ le processus discret $(S_n)_n$ donné par :

$$S_0 = a \quad \text{et} \quad S_{n+1} = S_n + Y_{n+1}.$$

Il s'agit d'une chaîne de Markov sur $\mathbf{Z}$. On souhaite maintenant ajouter une réflexion au processus dès qu'il touche 0.

Définition 1.2 (*Marche aléatoire réfléchie*)

On fixe une donnée initiale $a \in \mathbf{N}$ et on définit la marche aléatoire réfléchie en 0 par :

$$X_0 = a \quad \text{et} \quad X_{n+1} = \begin{cases} X_n + Y_{n+1} & \text{si } X_n > 0 \\ 1 & \text{si } X_n = 0. \end{cases}$$

On en trouve une illustration en annexe figure 1. Le caractère markovien de la marche aléatoire est préservé par la réflexion, comme on le voit d'après la définition de X_{n+1} comme fonction de X_n et de la suite $(Y_n)_n$ iid. On a également l'expression suivante pour la marche réfléchie, qui se prouve par récurrence.

Proposition 1.3

On a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad X_n = S_n + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{X_{k-1}=0}(1-Y_k).$$

Une définition alternative de la marche aléatoire réfléchie pourrait être simplement de considérer $(Z_n)_n = (|S_n|)_n$. En fait, on définit (en loi) le même processus, dans le cas du problème de réflexion pour la marche aléatoire.

Proposition 1.4

On a :

$$(|S_n|)_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_n)_n.$$

Démonstration : On montre que $(Z_n)_n$ est une chaîne de Markov. Plus précisément, on remarque que l'on peut décrire Z_n par une relation de récurrence du même type que celle de $(X_n)_n$:

$$Z_0 = a \quad \text{et} \quad Z_{n+1} = \begin{cases} Z_n + W_{n+1} & \text{si } Z_n > 0 \\ 1 & \text{si } Z_n = 0, \end{cases}$$

où $W_{n+1} = Y_{n+1}(\mathbf{1}_{S_n \geq 0} - \mathbf{1}_{S_n < 0})$. Pour conclure quant à l'égalité en loi, il s'agit de voir que la suite $(W_n)_n$ est iid de loi de Rademacher de paramètre $1/2$. Or par indépendance de S_n et Y_{n+1}, il est clair que la suite est identiquement distribuée de loi de Rademacher de paramètre $1/2$. Pour l'indépendance, il suffit de montrer par récurrence sur n que :

$$\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n+1} \mathbf{1}_{W_k=1}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Cela résulte de la formule de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n+1}\mathbf{1}_{W_k=1}\right) &= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n+1}\mathbf{1}_{W_k=1}|Y_1,\ldots,Y_n\right)\right)\\
&= \mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{W_k=1}\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{W_{n+1}=1}|Y_1,\ldots,Y_n\right)\right)\\
&= \mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{W_k=1}\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{S_n\geq 0}\mathbf{1}_{Y_{n+1}=1}+\mathbf{1}_{S_n<0}\mathbf{1}_{Y_{n+1}=-1}|Y_1,\ldots,Y_n\right)\right)\\
&= \mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{W_k=1}\frac{1}{2}(\mathbf{1}_{S_n\geq 0}+\mathbf{1}_{S_n<0})\right) = \frac{1}{2}\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{W_k=1}\right)
\end{aligned}$$

Puisque $(Z_n)_n$ et $(X_n)_n$ vérifient la même relation de récurrence en remplaçant $(Y_n)_n$ par $(Z_n)_n$, qui ont la même loi, on déduit l'égalité en loi voulue. □

2 Processus stochastiques réfléchis : cas continu

2.1 Le problème de Skorokhod

On souhaite définir de manière générale une bonne notion de réflexion pour un processus stochastique. Pour cela, on utilise une approche trajectorielle qui repose sur le lemme déterministe suivant.

Lemme 2.1 (*Lemme de Skorokhod*)

Soit $y \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$, avec $y_0 \geq 0$. Alors il existe un unique couple $(z, l) \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+)^2$ tel que :

1. $\forall t \in \mathbf{R}^+, \quad z_t = y_t + l_t$
2. $\forall t \in \mathbf{R}^+, \quad z_t \geq 0$
3. *l est une fonction croissante, nulle en 0, et si on note dl la mesure de Stieltjes associée à l, on a :*

$$\textit{supp}(dl) \subset \left\{t \in \mathbf{R}^+, \quad z_t = 0\right\}.$$

De plus on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, \quad l_t = \sup_{s\leq t}(\max(-y_s, 0)) = \sup_{s\leq t} y_s^-.$$

Remarque 2.2. *Puisque z est continue, on a l'équivalence suivante :*

$$\textit{supp}(dl) \subset \left\{t \in \mathbf{R}^+, \quad z_t = 0\right\} \Leftrightarrow \int_0^\infty z_t\, dl_t = 0.$$

En fait cette condition sur le support de la mesure dl assure une certaine forme de minimalité de la propriété de réflexion. En effet c'est par l'action de l qu'on impose à la fonction y de rester positive, la condition sur le support signifie que l agit uniquement lorsque le processus réfléchi touche 0. La fonction z " ressemble " donc à y autant que possible, tout en restant positive. Sans cette condition sur le support, on perd évidemment l'unicité.

Démonstration :

- **Existence :** On vérifie que la formule de l'énoncé pour l fonctionne. Il est clair que l est croissante, nulle en 0 et continue car $s \mapsto \max(-y_s, 0)$ est continue. De plus :

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, \quad l_t = \sup_{s\leq t} y_s^-,$$

ainsi on a pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$z_t = y_t^+ - y_t^- + \sup_{s\leq t} y_s^- \geq y_t^+ \geq 0,$$

ce qui montre que z est positive. Montrons la condition sur le support de dl. Soit $]u,v[$ un intervalle sur lequel $z>0$. Supposons que $l_v > l_u$. Par continuité de l il existe $\tilde{v} \in]u,v[$ tel que : $l_{\tilde{v}} > l_u$. Alors il existe $t \in]u,\tilde{v}]$ tel que : $l_{\tilde{v}} = y_t^-$. Or puisque $l_{\tilde{v}} > l_u \geq 0$, on déduit que :

$$l_{\tilde{v}} = l_t = -y_t,$$

ce qui assure que $z_t = y_t + l_t = 0$, ce qui est une contradiction puisque $t \in]u,v[$.

- **Unicité :** Soit $(\tilde{z},\tilde{l})$ une autre solution. Alors on a : $z-\tilde{z} = l-\tilde{l}$ est continue et à variation bornée. On a alors pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$\begin{aligned}(z_t-\tilde{z}_t)^2 &= 2\int_0^t (z_s-\tilde{z}_s)\,d(z-\tilde{z})_s = 2\int_0^t (z_s-\tilde{z}_s)\,d(l-\tilde{l})_s \\ &= 2\left(\int_0^t z_s\,dl_s + \int_0^t \tilde{z}_s\,d\tilde{l}_s - \int_0^t z_s\,d\tilde{l}_s - \int_0^t \tilde{z}_s\,dl_s\right) = -2\left(\int_0^t z_s\,d\tilde{l}_s + \int_0^t \tilde{z}_s\,dl_s\right) \leq 0.\end{aligned}$$

□

Remarque 2.3. *L'application de Skorokhod :*

$$\Gamma : \begin{cases} \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+) & \to \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+)^2 \\ y & \mapsto (z,l) \end{cases}$$

est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, comme le montre la formule donnant l en fonction de y.

Définition 2.4

Soit $(B_t)_{t\in\mathbf{R}^+}$ un mouvement brownien standard sur $\mathbf{R}$, le mouvement brownien réfléchi partant de $x \geq 0$ est le processus continu $(\rho_t)_t$ où (ρ,l) est l'unique couple de processus continus solution du problème de Skorokhod :

$$\begin{cases} \rho_t = x + B_t + l_t, \quad l_0 = 0 \\ \rho \geq 0, \quad dl \geq 0, \quad \displaystyle\int_0^\infty \rho_t\,dl_t = 0. \end{cases}$$

On trouve la représentation d'une trajectoire en annexe figure 2.

2.2 Équation différentielle stochastique avec réflexion

On souhaite maintenant imposer une réflexion à des solutions d'EDS, en utilisant la construction précédente. On se donne une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ globalement lipschitzienne et $w \in \mathcal{C}^0([0,T])$ avec $w_0 \geq 0$ et on s'intéresse au problème (déterministe dans un premier temps) :

$$dx_t = f(x_t)dt + dw_t \quad \text{sur } [0,T].$$

Théorème 2.5

Soient $T>0$ et $w \in \mathcal{C}^0([0,T])$ telle que $w_0 \geq 0$. Alors il existe un unique couple $(\rho,l) \in \mathcal{C}^0([0,T])^2$ tel que :

- $\forall t \in [0,T], \quad \rho_t = w_t + \displaystyle\int_0^t f(\rho_s)\,ds + l_t$
- $\rho \geq 0$
- $l_0 = 0, \quad dl \geq 0, \quad \displaystyle\int_0^T \rho_s\,dl_s = 0.$

Démonstration : (Idée) On considère l'espace $E_T = \mathcal{C}^0([0,T])$ muni de la norme :

$$\|f\| = \sup_{t\in[0,T]} e^{-3Lt}|f_t|,$$

où L est la constante de Lipschitz de f. Il s'agit ensuite de montrer que l'application $g \in E_T \mapsto \rho(g)$ est contractante, où $(\rho(g), l(g))$ est la solution du problème de Skorokhod pour

$$t \mapsto y_t := w_t + \int_0^t f(g_s)\,ds,$$

et donc admet un unique point fixe par le théorème du point fixe de Banach. Or puisque pour tout $t \in [0,T]$:

$$\rho(g)_t = w_t + \int_0^t f(g_s) + l(g)_t,$$

ce point fixe est bien (l'unique) solution recherchée.

□

En utilisant le théorème précédent pour le mouvement brownien et en recollant les solutions par unicité, on a le résultat suivant.

Corollaire 2.6 (*EDS réfléchie*)

Soit B un mouvement brownien standard et $x \geq 0$. Alors il existe un unique couple (ρ, l) de processus stochastiques continus sur $\mathbf{R}^+$ tel que :

- $\forall t \in \mathbf{R}^+, \quad \rho_t = x + B_t + \int_0^t f(\rho_s)\,ds + l_t \quad ps$
- $\rho \geq 0$
- $l_0 = 0, \quad dl \geq 0, \quad \int_0^\infty \rho_s\,dl_s = 0 \quad ps.$

2.3 Méthode de pénalisation

2.3.1 Le résultat déterministe

On fixe ici $T > 0$, $w \in \mathcal{C}^0([0,T])$ et f globalement lipschitzienne.

Définition 2.7

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit $\rho^n \in \mathcal{C}^0([0,T])$ comme l'unique solution continue de :

$$\forall t \in [0,T], \quad \rho_t^n = w_t + n\int_0^t (\rho_s^n)^-\,ds + \int_0^t f(\rho_s^n)\,ds.$$

La définition précédente est légitime par le théorème du point fixe de Banach. La stratégie adoptée ici pour approcher la solution de l'EDS réfléchie est de modifier le terme de dérive pour pénaliser le fait d'être négatif pour la solution. A la limite, la solution sera contrainte à rester positive.

Théorème 2.8 (*Méthode de pénalisation*)

Avec les notations précédentes, on a :

1. *Si $n \leq m$, alors pour tout $t \in [0,T]$: $\rho_t^n \leq \rho_t^m$.*
2. *Si de plus $w_0 \geq 0$, alors $(\rho^n)_n$ converge uniformément vers ρ, la solution du problème réfléchi du théorème 2.5.*
3. *De plus, on a :*

$$\forall t \in [0,T], \quad l_t^n := n\int_0^t (\rho_s^n)^-\,ds \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} l_t.$$

Démonstration : Donnons les grandes lignes de la démonstration.

- On commence par prouver le premier point en calculant $\frac{d}{dt}((\rho^n - \rho^m)_t^+)^2$. Cela permet de définir une fonction limite quand n tend vers $+\infty$.
- On prouve ensuite le résultat sous l'hypothèse $w \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$ en montrant que la suite (ρ^n) est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0([0,T])$ pour la norme uniforme (par le théorème d'Ascoli) et en montrant qu'une valeur d'adhérence est unique comme solution du problème de réflexion.
- On montre ensuite le caractère lipschitzien uniformément en n de $w \in \mathcal{C}^0([0,T]) \mapsto \rho^n \in \mathcal{C}^0([0,T])$
- On conclut ensuite par approximation.

□

2.3.2 Application aux EDS réfléchies

On s'intéresse maintenant à la notion de mesure invariante pour l'EDS pénalisée :

$$\begin{cases} d\rho_t^n(x) & = dB_t + (n(\rho_t^n(x))^- + f(\rho_t^n(x)))dt \quad \text{sur } \mathbf{R}^+ \\ \rho_0^n(x) & = x. \end{cases}$$

On peut appliquer le théorème précédent qui justifie que la solution de l'EDS pénalisée approche la solution du problème de réflexion du corollaire 2.6. La preuve du théorème précédent justifie que $x \mapsto \rho_t^n(x)$ est continue ps et $(\omega, x) \in \Omega \times \mathbf{R} \mapsto \rho_t^n(x)(\omega)$ est mesurable et de même pour la solution ρ du problème de réflexion 2.6.

Proposition 2.9

Avec les mêmes notations que précédemment, pour tout n, ρ^n est un processus de Markov, dont le générateur L vérifie :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbf{R}), \quad L(\phi) = \frac{1}{2}\phi'' + (nx^- + f(x))\phi'.$$

De plus, si on note F une primitive de f, le terme de dérive peut s'écrire comme une dérivée et par conséquent la mesure :

$$d\mu_n(x) = e^{-n(x^-)^2 + 2F(x)}\, dx,$$

est invariante pour ρ^n.

Démonstration : On pourra trouver la preuve de l'invariance de la mesure dans [ROY]. □

Donnons une formule qui sera utile pour l'étude des processus de Bessel.

Proposition 2.10

Avec les notations du corollaire 2.6, si on suppose f bornée et décroissante, on a pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$\int_{\mathbf{R}^+} e^{2F(x)} \mathbf{E}(l_t(x))\, dx = \frac{t}{2} e^{2F(0)}.$$

Démonstration : **Étape 1 :** Fixons $t \in \mathbf{R}^+$ et montrons que : $\int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}(l_t^n(x))\, d\mu_n(x) \to \frac{t}{2}e^{2F(0)}$. Par invariance de μ_n pour ρ^n et par le théorème de Fubini, on a :

$$\int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}(l_t^n(x))\, d\mu_n(x) = \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}\left(\int_0^t n(\rho_s^n(x))^-\, ds\right)\, d\mu_n(x) = t \int_{\mathbf{R}} nx^-\, d\mu_n(x).$$

Le changement de variable $y = \sqrt{n}x$ et le théorème de convergence dominée montrent que :

$$\int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}(l_t^n(x))\, d\mu_n(x) \to te^{2F(0)} \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} x^-\, dx = \frac{t}{2} e^{2F(0)}.$$

La domination étant justifiée car F a une croissance au plus quadratique puisque f est globalement lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout x, $|F(x)| \leq C(1 + x^2)$.

Étape 2 : On montre que : $\int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}(l_t^n(x))\, d\mu_n(x) \to \int_{\mathbf{R}^+} e^{2F(x)}\mathbf{E}(l_t(x))\, dx$. La croissance en n de ρ^n (d'après le théorème 2.8) et la décroissance de f montrent que :

$$l_t^n(x) = \rho_t^n(x) - x - B_t - \int_0^t f(\rho_s^n(x))\, ds,$$

est croissante en n et converge vers l_t (par le 3. du théorème 2.8). Le théorème de convergence monotone assure que :

$$\int_{\mathbf{R}^+} \mathbf{E}(l_t^n(x))\, d\mu_n(x) = \int_{\mathbf{R}^+} \mathbf{E}(l_t^n(x)) e^{2F(x)}\, dx \uparrow \int_{\mathbf{R}^+} \mathbf{E}(l_t(x)) e^{2F(x)}\, dx.$$

Montrons que l'intégrale sur $\mathbf{R}^-$ tend vers 0. On remarque que pour tout $x \leq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(l_t^n(x)) &= \mathbf{E}\left(\rho_t^n(x) - x - B_t - \int_0^t f(\rho_s^n(x))\, ds\right) \\
&\leq \mathbf{E}(\rho_t(0)) - \int_0^t \mathbf{E}(f(\rho_s(0)))\, ds - x \\
&:= C_t - x
\end{aligned}$$

La dernière inégalité provient de la décroissance de f, de la croissance de $n \mapsto \rho_t^n(0)$ et de la croissance de $x \in \mathbf{R} \mapsto \rho_t^n(x)$ qui s'obtient en remarquant que si $x \leq y$, on a pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$\frac{d}{dt}((\rho_t^n(x) - \rho_t^n(y))^+)^2 = 2(\rho_t^n(x) - \rho_t^n(y))^+(n(\rho_t^n(x))^- + f(\rho_t^n(x)) - n(\rho_t^n(y))^- - f(\rho_t^n(y))) \leq 0,$$

par décroissance de $x \mapsto nx^- + f(x)$ et en remarquant que $\rho_0^n(x) - \rho_0^n(y) = x - y \leq 0$. Remarquons que la constante C_t est finie, en effet l'expression de l_t du théorème de Skorokhod assure que :

$$\rho_t(0) \leq |B_t| + t\|f\|_\infty + \sup_{s \leq t}\{|B_s| + Ks\} \Rightarrow \mathbf{E}(\rho_t(0)) < +\infty.$$

On a donc :

$$0 \leq \int_{\mathbf{R}^-} \mathbf{E}(l_t^n(x))\, d\mu_n(x) \leq \int_{\mathbf{R}^-} (C_t - x) e^{-n(x^-)^2 + 2F(x)}\, dx \leq \int_{\mathbf{R}^-} (C_t - x) e^{-nx^2 + 2C(1+x^2)}\, dx \downarrow 0.$$

$\square$

2.4 Lien avec les temps locaux

Rappelons la définition du temps local d'une semimartingale continue (on pourra trouver plus de détails dans [RY]).

Proposition-Définition 2.11 (*Formule de Tanaka*)

Soit $(X_t)_{t \in \mathbf{R}^+}$ une semimartingale continue. Alors pour tout $a \in \mathbf{R}$, il existe un processus $(L_t^a)_{t \in \mathbf{R}^+}$ continu et croissant, appelé temps local de X en a, tel que :

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, \quad (X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbf{1}_{X_s > a}\, dX_s + \frac{1}{2} L_t^a.$$

Le lien entre le processus de réflexion l et le temps local de la solution est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.12

Soit (ρ, l) l'unique solution de l'EDS réfléchie du corollaire 2.6. Alors ρ est une semimartingale dont la famille *de temps locaux $(L_t^a)_{a\in\mathbf{R}^+,\, t\in\mathbf{R}^+}$ vérifie :*

$$\forall t \in \mathbf{R}^+ \quad l_t = \frac{1}{2} L_t^0 \quad \textit{ps.}$$

Démonstration : On applique la formule d'Itô-Tanaka à $\rho = \rho^+$: pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned}
\rho_t &= \rho_0 + \int_0^t \mathbf{1}_{\rho_s > 0} \left(dB_s + f(\rho_s)\, ds + dl_s\right) + \frac{1}{2} L_t^0 \\
&= \rho_0 + \int_0^t \mathbf{1}_{\rho_s > 0} \left(dB_s + f(\rho_s)\, ds\right) + \frac{1}{2} L_t^0 \quad (\text{ par inclusion du support de } dl \text{ }) \\
&= \rho_0 + B_t + \int_0^t f(\rho_s)\, ds + l_t \quad (\text{ par définition de la solution })
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\rho_s \le 0}\, dB_s = -\int_0^t \mathbf{1}_{\rho_s \le 0} f(\rho_s)\, ds + \frac{1}{2} L_t^0 - l_t.$$

Or le membre de gauche est une martingale de carré intégrable (car son crochet est déterministiquement borné en tout temps) et le membre de droite est un processus à variation bornée, ainsi les deux termes sont indistinguables de 0. En prenant l'espérance dans la partie martingale, on obtient :

$$0 = \mathbf{E}\left(\left(\int_0^t \mathbf{1}_{\rho_s \le 0}\, dB_s\right)^2\right) \underset{\text{Itô}}{=} \mathbf{E}\left(\int_0^t \mathbf{1}_{\rho_s \le 0}\, ds\right),$$

ce qui implique que presque sûrement, l'ensemble $\{t \ge 0,\, \rho_t \le 0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle. On conclut alors que presque sûrement, pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$l_t - \frac{1}{2} L_t^0 = -\int_0^t \mathbf{1}_{\rho_s \le 0} f(\rho_s)\, ds = 0.$$

□

On a donc vu le lien entre le temps local de la solution et le processus l par lequel agit la contrainte. Mentionnons maintenant une autre application des temps locaux qui permet d'expliciter la loi du mouvement brownien réfléchi.

Théorème 2.13 (*Loi du mouvement brownien réfléchi.*)

Soit $(\rho_t)_{t\in\mathbf{R}^+}$ un mouvement brownien réfléchi partant de $x \ge 0$. Soit $(B_t)_{t\in\mathbf{R}^+}$ un mouvement brownien standard sur $\mathbf{R}$. Alors on a l'égalité suivante en loi :

$$(\rho_t)_{t\in\mathbf{R}^+} \overset{\mathcal{L}}{=} (|x + B_t|)_{t\in\mathbf{R}^+}.$$

Démonstration : Le point essentiel est que le support de $dL^a_\cdot$ (la mesure associée au temps local de X) est inclus presque sûrement dans $\{t \in \mathbf{R}^+,\, X_t = a\}$. Il s'agit ensuite de voir que les deux processus sont images par l'application de Skorokhod Γ d'un mouvement brownien. □

Remarque 2.14. *Cette propriété est la version continue de la proposition 1.4. Ceci n'est pas étonnant puisque d'après le théorème de Donsker, le mouvement brownien n'est rien d'autre qu'une limite en loi d'une marche aléatoire vue " à la bonne échelle ". Le passage du cas discret au cas continue apparaît dans le résultat suivant.*

Corollaire 2.15

On note $(X_n)_n$ la marche aléatoire simple réfléchie définie dans la première partie. On définit alors pour $n \in \mathbf{N}$

et pour tout $t \in [0,1]$:

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} X_{\lfloor nt \rfloor}.$$

Alors on a la convergence en loi :

$$(S_n(t))_{t\in[0,1]} \xrightarrow{\mathcal{L}} (\rho_t)_{t\in[0,1]}.$$

Une trajectoire de la marche aléatoire réfléchie renormalisée est tracée en annexe figure 3.

3 Processus de Bessel

Dans cette partie, on utilise les résultats précédents pour étudier les processus de Bessel.

Définition 3.1 (*δ-processus de Bessel*)

On se donne $\delta > 1$ et $x \geq 0$. On appelle δ-processus de Bessel une solution continue et positive à l'EDS :

$$\begin{cases} d\rho_t &= \frac{\delta-1}{2}\frac{1}{\rho_t}\, dt + dB_t \quad \forall t \in \mathbf{R}^+ \\ \rho_0 &= x. \end{cases}$$

On souhaite étudier ces processus grâce à un problème de réflexion. La difficulté ici est la singularité en 0 présente dans le terme de dérive. Pour cela on a besoin d'un théorème d'existence analogue au théorème 2.5 dans le cas où il y a une singularité.

Théorème 3.2

Soient $T > 0$, $w \in \mathcal{C}^0([0,T])$ avec $w_0 \geq 0$ et $g \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}_*^+, \mathbf{R})$ une fonction décroissante, lipschitzienne sur tout intervalle de la forme $[\epsilon, +\infty[$, avec $\epsilon > 0$. Alors il existe un unique couple $(\rho, l) \in \mathcal{C}^0([0,T])^2$ tel que :

- $\rho \geq 0$
- $g \circ \rho \in L^1([0,T])$
- $\forall t \in [0,T], \quad \rho_t = w_t + \int_0^t g(\rho_s)\, ds + l_t$
- $l_0 = 0, \quad dl \geq 0, \quad \int_0^T \rho_s\, dl_s = 0.$

Démonstration : (Idée) Pour l'unicité, on montre que la différence entre deux solutions (qui est à variation bornée) a une mesure associée négative. Pour l'existence, on considère le problème associé en remplaçant g par $g^\epsilon(x) := g(\epsilon + x^+)$, qui vérifie les hypothèses du théorème 2.5. On a donc une unique solution ρ^ϵ. On montre ensuite que $\epsilon \mapsto \rho^\epsilon$ est décroissante et que $\epsilon \mapsto \epsilon + \rho^\epsilon$ est croissante, ce qui permet de montrer que ρ^ϵ est de Cauchy et donc converge uniformément vers une fonction continue. Cela permet de conclure la preuve.

□

Remarquons que si w est définie sur tout $\mathbf{R}^+$, on peut résoudre le même problème sur tout $\mathbf{R}^+$ en remplaçant $g \circ \rho \in L^1([0,T])$ par $g \circ \rho \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+)$.

On est maintenant en mesure de prouver l'existence et l'unicité des processus de Bessel.

Théorème 3.3

Soit $\delta > 1$. Le δ-processus de Bessel existe et l'EDS qu'il vérifie satisfait l'existence de solutions fortes et unicité trajectorielle.

Démonstration : L'unicité trajectorielle est une conséquence du théorème précédent (avec $l = 0$). Pour l'existence d'une solution forte, on applique là encore le théorème précédent avec $w = B$, $g : x \in \mathbf{R}_*^+ \mapsto \frac{\delta-1}{2}\frac{1}{x}$. Il s'agit de voir que la solution de ce problème de réflexion vérifie $l = 0$ presque sûrement. Pour $\epsilon > 0$, on définit pour tout $x \in \mathbf{R}^+$:

$$f_\epsilon(x) = \frac{\delta - 1}{2} \frac{1}{\epsilon + x} \quad \text{et} \quad F_\epsilon(x) = \frac{\delta - 1}{2} \log(\epsilon + x).$$

La proposition 2.10 assure que pour tout $t \in \mathbf{R}^+$:

$$\int_{\mathbf{R}^+} e^{2F_\epsilon(x)} \mathbf{E}(l_t^\epsilon(x))\, dx = \frac{t}{2} e^{2F_\epsilon(0)} \quad \text{ie} \quad \int_{\mathbf{R}^+} (x+\epsilon)^{\delta-1} \mathbf{E}(l_t^\epsilon(x))\, dx = \frac{t}{2} \epsilon^{\delta-1}.$$

En utilisant le lemme de Fatou et la convergence suivante qu'on obtient par des arguments de monotonie dans la preuve du théorème précédent (admis ici) :

$$l_t^\epsilon \underset{\epsilon \to 0}{\to} l_t,$$

on obtient que :

$$\int_{\mathbf{R}^+} x^{\delta-1} \mathbf{E}(l_t(x))\, dx = 0,$$

ce qui assure, par continuité de $x \mapsto l_t(x)$ et $t \mapsto l_t(x)$ que $l = 0$ presque sûrement. □

4 Annexe : Simulations

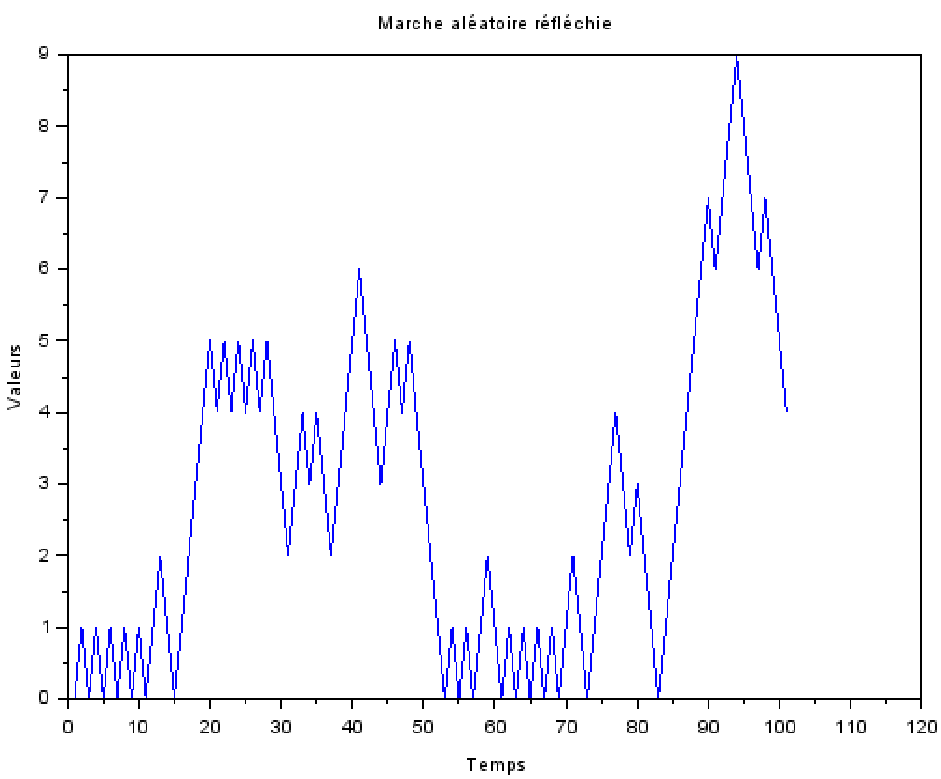

FIGURE 1 – Marche aléatoire simple réfléchie

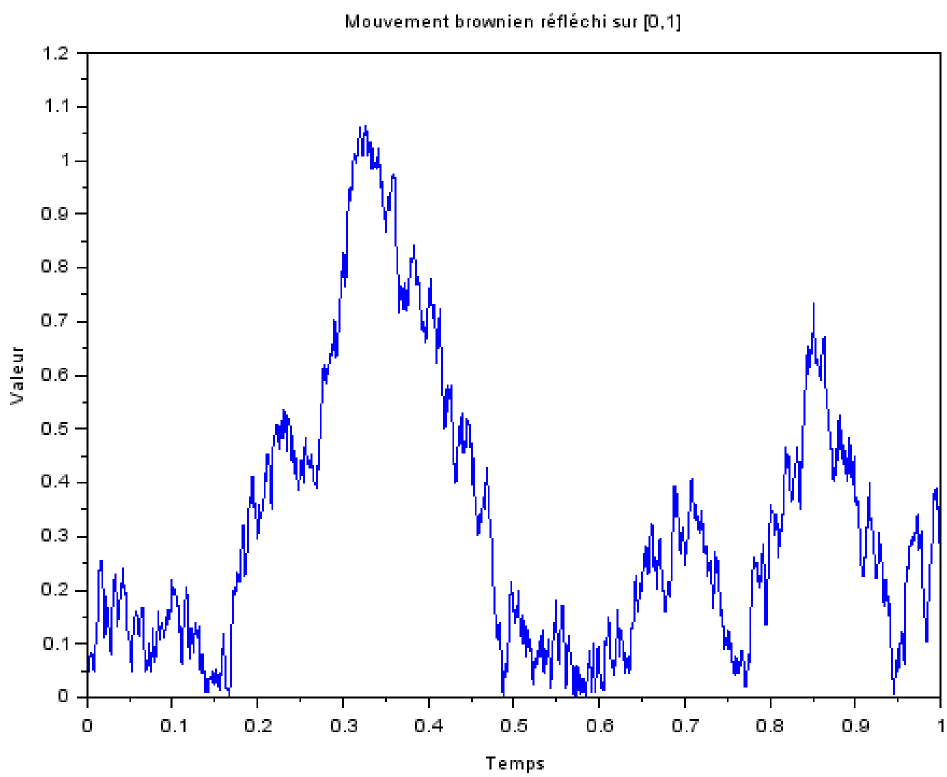

Figure 2 – Mouvement brownien réfléchi

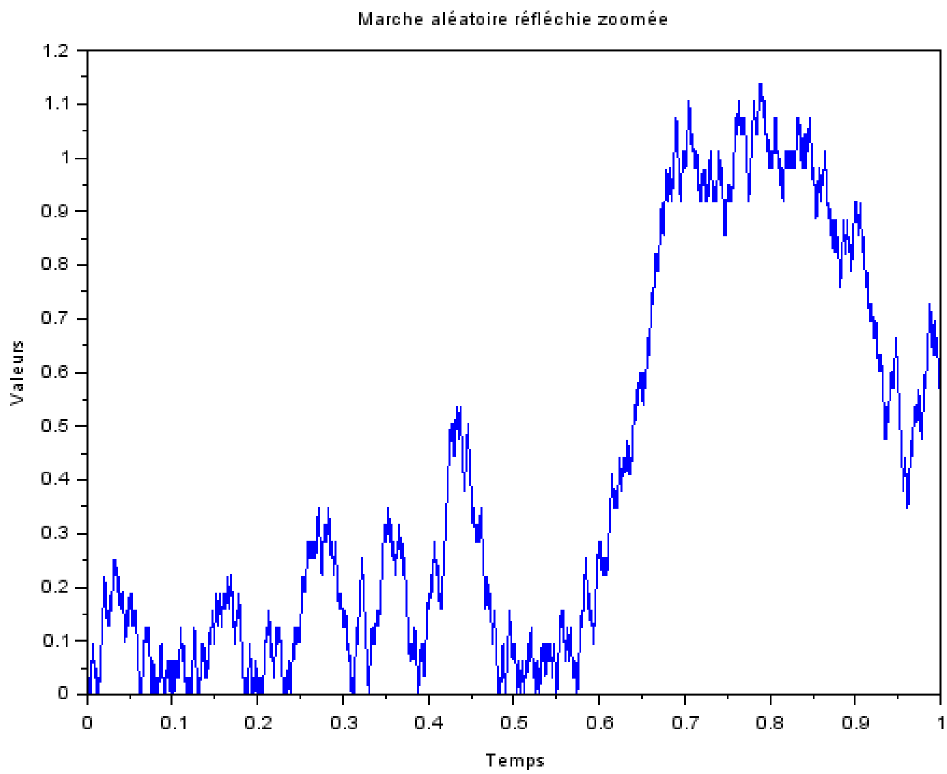

FIGURE 3 – Marche aléatoire simple réfléchie renormalisée

Références

[ZAM] L. Zambotti, *Random obstacle problems* , lectures at Saint Flour Summer School, 2015

[KS] I. Karatzas, S. Schreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, 1991

[RY] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, 1999

[ROY] G. Royer, *An introduction to logarithmic Sobolev inequalities*, 1999