Equirépartition presque sûre des orbites du doublement de l'angle

Références : P. Billingsley, *Probability and measure* – `http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/equirep.pdf` [1]

Leçons : 202, 223, 226, 261, 262, 264.

On se place sur $E = [0,1[$ qu'on munit de la mesure de Lebesgue. On définit l'application f par $f(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor := \{2x\}$, pour tout x dans E. Cette application correspond au doublement de l'angle sur le cercle.

Définition 1

Soit $(u_n)_n$ une suite de E. On dit que $(u_n)_n$ est équirépartie si pour tout $a < b$ dans E on a :

$$\frac{1}{n} Card\{0 \leq k < n, u_k \in [a,b[\} \to b - a.$$

Théorème 2

Pour presque-tout x dans E, la suite des itérées $(f^k(x))_k$ est équirépartie.

On pose, pour tout $x \in E$, $X_0(x) = \lfloor 2x \rfloor = \mathbf{1}_{x \in [1/2,1[}$ ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(x) = X_0(f^n(x))$. On commence par démontrer un lemme.

Lemme 3

On a pour tout $x \in E$ et pour tout $n \geq 1$:

$$x \in I_n(x) = \left[x_n, x_n + \frac{1}{2^n}\right[, \quad \text{où} \quad x_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k(x)}{2^{k+1}}.$$

Démonstration : On raisonne par récurrence.

- Pour $n = 1$, on a par définition : $X_0(x) \leq 2x < X_0(x) + 1$ ce qui est exactement le résultat voulu.
- Supposons le résultat établi au rang n et montrons le au rang suivant. On peut montrer par récurrence que :

  $$\forall x \in E,\ f^n(x) = \{2^n x\}.$$

  Ainsi, puisque par hypothèse de récurrence, $2^n(x - x_n) \in [0,1[$ et puisque $2^n x_n \in \mathbb{N}$, on a :

1. Merci à Alain pour les discussions sur ce développement qui ont permis de l'améliorer.

$$
\begin{aligned}
X_n(x) &= \lfloor 2f^n(x) \rfloor \\
&= \lfloor 2\{2^n x\} \rfloor \\
&= \lfloor 2\{2^n(x - x_n)\} \rfloor \\
&= \lfloor 2^{n+1}(x - x_n) \rfloor
\end{aligned}
$$

On a donc :

$$X_n(x) \leq 2^{n+1}(x - x_n) < X_n(x) + 1,$$

ce qui est exactement le résultat voulu.

□

Le raisonnement précédent permet de montrer qu'en fait les X_k sont uniques au sens où si on se donne $\epsilon_0, \ldots, \epsilon_{n-1} \in \{0, 1\}$ et si on pose $x_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\epsilon_k}{2^{k+1}}$, alors :

$$x \in \left[x_n, x_n + \frac{1}{2^n} \right[\Leftrightarrow X_0(x) = \epsilon_0, \ldots, X_{n-1}(x) = \epsilon_{n-1}.$$

On déduit immédiatement de cette remarque la proposition suivante.

Proposition 4

La suite $(X_k)_k$ est une suite de variables aléatoires sur E muni de la mesure de Lebesgue indépendantes, identiquement distribuées de loi Bernoulli de paramètre $1/2$.

Démonstration : La mesurabilité est claire. Ce sont donc bien des variables aléatoires. On se donne $n \geq 1$ et $\epsilon_0, \ldots, \epsilon_{n-1} \in \{0, 1\}$ et on a par définition :

$$\mathbb{P}(X_0 = \epsilon_0, \ldots, X_{n-1} = \epsilon_{n-1}) = \lambda \left(\left[x_n, x_n + \frac{1}{2^n} \right[\right) = \frac{1}{2^n},$$

en gardant les mêmes notations que précédemment. On reconnait la loi produit voulue ce qui achève la preuve. □

On peut maintenant passer à la preuve du théorème.

Démonstration : Soit $a < b \in E$ et soit $x \in E$, on note :

$$S_n^x(a, b) = \frac{1}{n} \text{Card}\{0 \leq k < n, f^k(x) \in [a, b[\},$$

et on note $S_n(a, b)$ la variable aléatoire associée.

On commence par démontrer le résultat dans le cas dyadique et on procédera par densité. On fixe $l \geq 1$ et on se donne toujours $\epsilon_0, \ldots, \epsilon_{l-1} \in \{0, 1\}$. On note $a = \sum_{k=0}^{l-1} \epsilon_k 2^{l-k-1} = 2^l \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\epsilon_k}{2^{k+1}}$. On a successivement :

$$
\begin{aligned}
S_n^x\left(\frac{a}{2^l},\frac{a+1}{2^l}\right) &= \frac{1}{n}\mathrm{Card}\left\{0\le k<n,\ f^k(x)\in\left[\frac{a}{2^l},\frac{a+1}{2^l}\right[\right\}.\\
&= \frac{1}{n}\mathrm{Card}\left\{0\le k<n,\ X_0(f^k(x))=\epsilon_0,\dots,X_{l-1}(f^k(x))=\epsilon_{l-1}\right\}\\
&= \frac{1}{n}\mathrm{Card}\left\{0\le k<n,\ X_k(x)=\epsilon_0,\dots,X_{k+l-1}(x)=\epsilon_{l-1}\right\}
\end{aligned}
$$

On écrit la division euclidienne de n et k par l : $n=q_nl+r_n$ et $k=ql+r$ si bien que :

$$
\begin{aligned}
S_n^x\left(\frac{a}{2^l},\frac{a+1}{2^l}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{l-1}\sum_{q=0}^{q_n-1}\mathbf{1}_{X_{ql+r}(x)=\epsilon_0}\dots\mathbf{1}_{X_{ql+r+l-1}(x)=\epsilon_{l-1}}+o(1/n)\\
&= \frac{q_n}{n}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{1}{q_n}\sum_{q=0}^{q_n-1}\mathbf{1}_{X_{ql+r}(x)=\epsilon_0}\dots\mathbf{1}_{X_{ql+r+l-1}(x)=\epsilon_{l-1}}+o(1/n)
\end{aligned}
$$

De la proposition précédente on déduit qu'à r fixé, la famille de variables aléatoires $(Y_q^r := \mathbf{1}_{X_{ql+r}(.)=\epsilon_0}\dots\mathbf{1}_{X_{ql+r+l-1}(.)=\epsilon_{l-1}})_q$ est iid de loi Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2^l}$. On peut appliquer la loi forte des grands nombres ce qui permet de déduire que presque sûrement :

$$
\frac{1}{q_n}\sum_{q=0}^{q_n-1}Y_q^r \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2^l},
$$

on a donc toujours presque sûrement :

$$
S_n\left(\frac{a}{2^l},\frac{a+1}{2^l}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2^l}.
$$

Cela permet de déduire qu'on a presque sûrement :

$$
\forall l\ge 1,\ \forall a\in\{0,\dots,2^l-1\},\ \forall b\in\{a+1,\dots,2^l\},\ S_n\left(\frac{a}{2^l},\frac{b}{2^l}\right)\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{b-a}{2^l}.
$$

On se place sur cet événement presque sûr et on se donne $a<b\in E$ on dispose (d'après le premier lemme) de deux suites d'entiers $(a_l)_l$ et $(b_l)_l$ telles que :

$$
\frac{a_l}{2^l}\le a<\frac{a_l+1}{2^l}\quad\text{et}\quad\frac{b_l}{2^l}\le b<\frac{b_l+1}{2^l}.
$$

Les suites $\left(\frac{a_l}{2^l}\right)_l$ et $\left(\frac{b_l}{2^l}\right)_l$ convergent respectivement vers a et b. On a :

$$
S_n\left(\frac{a_l+1}{2^l},\frac{b_l}{2^l}\right)\le S_n\left(a,b\right)\le S_n\left(\frac{a_l}{2^l},\frac{b_l+1}{2^l}\right),
$$

d'où l'on déduit que :

$$
\frac{b_l-a_l-1}{2^l}=\liminf_n S_n\left(\frac{a_l+1}{2^l}\frac{b_l}{2^l}\right)\le\liminf_n S_n\left(a,b\right)
$$

et

$$
\limsup_n S_n\left(a,b\right)\le\limsup_n S_n\left(\frac{a_l}{2^l},\frac{b_l+1}{2^l}\right)=\frac{b_l+1-a_l}{2^l}.
$$

En laissant tendre l vers $+\infty$, on obtient que presque sûrement :

$$\forall a < b \in E, S_n(a,b) \to b - a,$$

ce qui achève la preuve. $\square$

Remarque 5. - *Le développement est un peu long tel qu'il est écrit ici. On peut juste énoncer la proposition puisqu'elle découle immédiatement du lemme et aller vite sur l'utilisation de la loi forte des grands nombres ou sur la fin au choix.*

- *Il est bon d'avoir le critère d'équirépartition de Weyl en tête.*
- *Une question facile : quels sont les points périodiques de f ? Et une question à laquelle je ne sais pas répondre : peut-on exhiber un $x \in [0,1[$ dont l'orbite est équirépartie ?*
- *On a montré que presque sûrement, un nombre $x \in [0,1[$ admet dans son développement dyadique la même proportion de 0 et de 1. On peut montrer en copiant la preuve que ce résultat se généralise au développement en base r quelconque.*
- *Une suite iid de variables aléatoires de loi uniforme sur $[0,1[$ est équirépartie presque sûrement (LGN).*

Annexe

Démontrons la loi forte des grands nombres qu'on a utilisée. Il s'agit de la version L^4 dont la preuve est bien plus simple que la version L^1. Cela ne fait pas partie du développement bien entendu !

Théorème 6

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même moyenne m et bornée dans L^4, c'est-à-dire il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_n^4) \leq C.$$

Alors si on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, on a :

$$\frac{S_n}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} m \quad ps.$$

Démonstration : Quitte à soustraire la moyenne, on peut supposer $m = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{E}(S_n^4) = \sum_{i,j,k,l \in \{1,\dots,n\}} \mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l).$$

Les termes du type $\mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l)$ où l'une des variables apparaît seule sont nuls puisqu'on peut scinder l'espérance en 2 parties par indépendance dont l'une est l'espérance de la variable aléatoire seule, qui est nulle par hypothèse. Au total on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n^4) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^4) + \binom{4}{2} \sum_{i<j} \mathbb{E}(X_i^2 X_j^2) \\
&\leq nC + 6 \sum_{i<j} \sqrt{\mathbb{E}(X_i^4)\mathbb{E}(X_j)^4} \quad (\text{ Cauchy-Schwarz}) \\
&\leq nC + 3n(n-1)C.
\end{aligned}$$

Cela assure que :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{S_n}{n} \right)^4 \right) \underset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n} \right)^4 < +\infty.$$

Ainsi la série converge presque sûrement puisque d'espérance finie, d'où :

$$\frac{S_n}{n} \underset{ps}{\to} 0.$$

$\square$