Convergence presque sûre des sous-martingales bornées dans L^1

Références : P. Billingsley, *Probability and measure* – R. Durrett, *Probability : theory and examples*[1]

Leçons : 223, 262, *260, 241*

Commençons par quelques rappels qu'on peut mettre dans le plan mais qu'on ne fait pas à l'oral. On se donne $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires et une filtration $(\mathcal{F}_n)_n$.

Définition 1

On dit que $(X_n)_n$ est une sous-martingale si :

- *Pour tout n, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable*
- *Pour tout n, $X_n \in L^1$.*
- *Pour tout n, $\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n) \geq X_n$*

L'objet du développement est le théorème de convergence suivant.

Théorème 2

Soit $(X_n)_n$ une sous-martingale bornée dans L^1, c'est-à-dire :

$$\sup_n \mathbb{E}|X_n| < +\infty.$$

Alors il existe une variable aléatoire $X \in L^1$ telle que $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X.

La preuve repose sur le premier théorème d'arrêt qu'on admettra à l'oral faute de temps.

Définition 3

Une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \, (T \leq n) \in \mathcal{F}_n,$$

où F_∞ est la tribu engendrée par les $\mathcal{F}_n$.

On peut remplacer dans la définition $(T \leq n)$ par $(T = n)$ sans la changer.

Théorème 4 (*Premier théorème d'arrêt*)

Soit $(X_n)_n$ une sous-martingale. Soient S et T deux temps d'arrêt bornés par N, avec $S \leq T$ ps. Alors on a :

$$\mathbb{E}(X_S) \leq \mathbb{E}(X_T),$$

où $X_S = \sum_{k=0}^{N} X_k \mathbf{1}_{S=k}$

1. Je me suis également largement inspiré du cours suivi en M1 enseigné par M. Gradinaru.

Démonstration : Soit $k \geq 1$. On définit les accroissements de la sous-martingale par :

$$\Delta_k = X_k - X_{k-1}.$$

Remarquons tout d'abord que :

$$X_T = X_0 + \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \mathbf{1}_{k \leq T}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} X_T - X_S &= \sum_{k=1}^{N} \Delta_k (\mathbf{1}_{k \leq T} - \mathbf{1}_{k \leq S}) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \mathbf{1}_{S < k \leq T}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_T - X_S) &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(\Delta_k \mathbf{1}_{S < k \leq T}) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\Delta_k \mathbf{1}_{S < k \leq T} | \mathcal{F}_{k-1})). \end{aligned}$$

Or on a : $(S < k) \in \mathcal{F}_{k-1}$ par définition d'un temps d'arrêt et $(k \leq T) = (T \leq k-1)^C \in \mathcal{F}_{k-1}$.

On a alors par propriété de mesurabilité de l'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_T - X_S) &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\Delta_k \mathbf{1}_{S < k \leq T} | \mathcal{F}_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{S < k \leq T} \mathbb{E}(\Delta_k | \mathcal{F}_{k-1})) \\ &\geq 0 \quad \text{puisque pour tout } k,\ \mathbb{E}(\Delta_k | \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1} \geq 0 \ . \end{aligned}$$

□

Avant de passer à la preuve du théorème, démontrons un lemme qui nous sera utile (c'est là que commence le développement).

Définition 5

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On se donne $a < b \in \mathbb{R}$ et on définit alors $\tau_1 := \inf\{k \geq 1, u_k \leq a\}$, en convenant que la borne inférieure de l'ensemble vide est $+\infty$. On définit ensuite par récurrence :

$$\tau_{2n} := \inf\{k > \tau_{2n-1}, u_k \geq b\} \quad \textit{et} \quad \tau_{2n+1} := \inf\{k > \tau_{2n}, u_k \leq a\}.$$

On peut alors définir le nombre de traversées montantes de l'intervalle $[a,b]$ par :

$$U_\infty(a,b) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\tau_{2k}<+\infty},$$

ainsi que le nombre de traversées avant l'instant n par :

$$U_n(a,b) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\tau_{2k}\leq n},$$

τ_{2k} est l'instant de la k-ème traversée montante.

Lemme 6

Une suite $(u_n)_n$ converge dans $\bar{\mathbb{R}}$ si et seulement si pour tout $a<b$ rationnels, $U_\infty(a,b) < +\infty$.

Démonstration : Notons $l = \liminf u_n$ et $u = \limsup u_n$.
$(\Rightarrow)$ Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge, i.e $l = u$. Soient $a<b$ deux rationnels. Il y a deux cas :

- Si $a<l$, alors il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow u_n > a$. On a donc : $U_\infty(a,b) \leq N$.
- Si $b > a \geq u = l$, alors il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow u_n < b$. On a donc : $U_\infty(a,b) \leq N$.

$(\Leftarrow)$ Par contraposée : supposons que $l < u$. On se donne deux rationnels a et b tels que : $l<a<b<u$. On construit par récurrence une infinité de traversées montantes de $[a,b]$ puisque l et u sont respectivement les plus petite et plus grande valeur d'adhérence de la suite et donc la suite passe une infinité de fois en dessous de a et au dessus de b. □

On peut remplacer la suite $(u_n)_n$ par une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$. Les τ_k sont des temps d'arrêt pour la filtration canonique associée à cette suite $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0,\dots,X_n)$. De plus le nombre de traversées montantes tronqué ou non est une variable aléatoire. La preuve repose sur l'inégalité des traversées montantes de Doob.

Lemme 7

Soient $a<b\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. On a alors :

$$(b-a)\mathbb{E}(U_n(a,b)) \leq \mathbb{E}|X_n - a|.$$

Démonstration : On fixe $n\in\mathbb{N}$ et $k\geq 1$. On commence par appliquer le premier théorème d'arrêt aux temps d'arrêt bornés $\tau_{2k}\wedge n$ et $\tau_{2k+1}\wedge n$, où on note $\wedge$ le minimum. On a successivement :

$$
\begin{aligned}
0 &\le \mathbb{E}(X_{\tau_{2k+1}\wedge n} - X_{\tau_{2k}\wedge n}) \\
&= \mathbb{E}((X_{\tau_{2k+1}\wedge n} - X_{\tau_{2k}\wedge n})\mathbf{1}_{\tau_{2k}\le n}) \\
&= \mathbb{E}((X_{\tau_{2k+1}\wedge n} - X_{\tau_{2k}\wedge n})\mathbf{1}_{\tau_{2k}\le n<\tau_{2k+1}}) + \mathbb{E}((X_{\tau_{2k+1}\wedge n} - X_{\tau_{2k}\wedge n})\mathbf{1}_{\tau_{2k+1}\le n}) \\
&= \mathbb{E}((X_n - X_{\tau_{2k}})\mathbf{1}_{\tau_{2k}\le n<\tau_{2k+1}}) + \mathbb{E}((X_{\tau_{2k+1}} - X_{\tau_{2k}})\mathbf{1}_{\tau_{2k+1}\le n}) \\
&\le \mathbb{E}((X_n - b)\mathbf{1}_{\tau_{2k}\le n<\tau_{2k+1}}) + \mathbb{E}((X_{\tau_{2k+1}} - X_{\tau_{2k}})\mathbf{1}_{\tau_{2k+1}\le n}) \quad \text{par définition de } \tau_{2k} \\
&\le \mathbb{E}((X_n - b)\mathbf{1}_{\tau_{2k}\le n<\tau_{2k+1}}) + (a-b)\mathbb{P}(\tau_{2k+1}\le n) \quad \text{par définition des } \tau_k \\
&= \mathbb{E}((X_n - a + a - b)\mathbf{1}_{\tau_{2k}\le n<\tau_{2k+1}}) + (a-b)\mathbb{P}(\tau_{2k+1}\le n) \\
&= \mathbb{E}((X_n - a)\mathbf{1}_{\tau_{2k}\le n<\tau_{2k+1}}) + (a-b)(\mathbb{P}(\tau_{2k+1}\le n) + \mathbb{P}(\tau_{2k}\le n<\tau_{2k+1})) \\
&= \mathbb{E}((X_n - a)\mathbf{1}_{\tau_{2k}\le n<\tau_{2k+1}}) + (a-b)\mathbb{P}(\tau_{2k}\le n)
\end{aligned}
$$

Or les événements suivants sont égaux :

$$(\tau_{2k} \le n) = (U_n(a,b) \ge k).$$

On a donc :

$$0 \le \mathbb{E}(|X_n - a|\mathbf{1}_{\tau_{2k}\le n<\tau_{2k+1}}) + (a-b)\mathbb{P}(U_n(a,b)\ge k)$$

En sommant ces inégalités pour $k \ge 1$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
(b-a)\sum_{k\ge 1}\mathbb{P}(U_n(a,b)\ge k) = (b-a)\mathbb{E}(U_n(a,b)) &\le \mathbb{E}(|X_n - a|\sum_{k\ge 1}\mathbf{1}_{\tau_{2k}\le n<\tau_{2k+1}}) \\
&\le \mathbb{E}(|X_n - a|).
\end{aligned}
$$

(La première égalité étant un résultat classique qui découle de Fubini-Tonelli ou d'un argument de famille sommable si on préfère :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\ge 1}\mathbb{P}(U_n(a,b)\ge k) &= \sum_{k\ge 1}\sum_{j\ge k}\mathbb{P}(U_n(a,b)=j) \\
&= \sum_{j\ge 1}\sum_{1\le k\le j}\mathbb{P}(U_n(a,b)=j) \\
&= \sum_{j\ge 1} j\mathbb{P}(U_n(a,b)=j) \\
&= \mathbb{E}(U_n(a,b)). \quad)
\end{aligned}
$$

□

On peut enfin passer à la preuve du théorème de convergence.

Démonstration : Soient $a < b$ des rationnels. On a : $\sup_n \mathbb{E}|X_n - a| < +\infty$ par hypothèse. De plus :

$$U_n(a,b) \underset{n\to+\infty}{\to} U_\infty(a,b).$$

En utilisant le théorème de convergence monotone et le second lemme, on déduit que la variable aléatoire $U_\infty(a,b)$ est intégrable donc finie presque sûrement. Comme une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre, on a la convergence presque sûre de $(X_n)_n$ d'après le premier lemme. On note X la limite presque sûre. X est intégrable par le lemme de Fatou, ce qui achève la preuve. $\square$

Remarque 8. - *Ne pas hésiter à faire un dessin pour définir les temps* τ_k*, le jury appréciera presque sûrement !*

Annexe

- Une version L^1 du théorème ?

Commençons par démontrer un théorème qui renforce le précédent avec l'hypothèse d'uniforme intégrabilité (rappels faits dans l'annexe du développement sur le problème des moments).

Corollaire 9

Soit $(X_n)_n$ une sous-martingale. $(X_n)_n$ est uniformément intégrable si et seulement si elle converge presque sûrement et dans L^1 vers une variable aléatoire X.

Démonstration :

- Si $(X_n)_n$ est uniformément intégrable, alors elle est bornée dans L^1, d'après le théorème, elle converge presque sûrement vers une variable aléatoire X. Un résultat classique (redémontré dans le développement sur le problème des moments) assure qu'il y a en fait convergence L^1 grâce à l'uniforme intégrabilité.
- Si $(X_n)_n$ converge presque sûrement et dans L^1 vers X. On vérifie facilement grâce à Fubini-Tonelli que si $M > 0$:

$$\forall n, \quad \mathbb{E}(|X_n|\mathbf{1}_{|X_n|\geq M}) = \mathbb{E}(|X_n|) - \int_0^M \mathbb{P}(t < X < M)\,dt.$$

  On déduit donc que :

$$\mathbb{E}(|X_n|\mathbf{1}_{|X_n|\geq M}) \to \mathbb{E}(|X|\mathbf{1}_{|X|\geq M}),$$

  d'après les hypothèses et le théorème de convergence dominée. Ainsi, si $\epsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que :

$$\mathbb{E}(|X|\mathbf{1}_{|X|\geq M}) \leq \epsilon.$$

  Il existe $N > 0$ tel que :

$$\forall n \geq N,\ \mathbb{E}(|X_n|\mathbf{1}_{|X_n|\geq M}) \leq 2\epsilon.$$

  Puisque $X_0, \dots X_{N-1}$ sont intégrables, on en déduit l'uniforme intégrabilité de la suite.

$\square$

Une application.

On considère le modèle génétique de Wright-Fisher (on pourra consulter le livre de D. Chafaï et F. Malrieu intitulé *Recueil de modèles aléatoires* pour avoir des détails sur le modèle). On fixe un entier $N > 0$ et on considère une chaîne de Markov d'espace d'états $\{0, \dots N\}$, partant de k et vérifiant :

$$\mathcal{L}(X_{n+1}|X_n) = \mathcal{B}(N, X_n/N).$$

On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. La suite $(X_n)_n$ est clairement une martingale puisque :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(X_{n+1}|X_n)\\ &= X_n\frac{X_n}{N}\\ &= X_n.\end{aligned}$$

Cette martingale est bornée par N. En vertu de ce qui précède elle converge presque sûrement et dans L^1 (car une suite bornée est uniformément intégrable) vers une variable aléatoire intégrable X. Cette variable X ne peut prendre ses valeurs que dans $\{0, N\}$ qui sont les seuls états absorbants (les autres états sont transients car ils conduisent à un état absorbant). Pour déterminer la loi de X on utilise la convergence L^1. On note $p = \mathbb{P}(X = N)$. Puisqu'on a une martingale, l'espérance de X_n est constante égale à $k = X_0$. La convergence $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X) = pN$ assure que :

$$p = \frac{k}{N}.$$