QUELQUES MÉTHODES CLASSIQUES POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES ET NON LINÉAIRES

DONNART Titouan et MARISSAËL Alexis

Lectures dirigées encadrées par Hugo EULRY

Janvier-avril 2022

Jusqu'aux cours de troisième année de licence de Mathématiques inclus, nous avons appris à résoudre certaines équations différentielles ordinaires par des méthodes assez élémentaires dans un cadre restreint, en particulier avec des dérivées d'ordre au plus 2 et des équations linéaires le plus souvent. Cependant, pour des équations plus générales, faisant intervenir des dérivées partielles notamment, nous n'avons pu en étudier que quelques-unes qui sont facilement résolubles dans le cadre d'exercices, mais n'avons pas vu de méthode générale de résolution, ni même si une éventuelle solution existe puisque cela sort du cadre d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz notamment.

L'objectif de ces lectures dirigées est alors de donner un sens à la notion de solution pour une équation aux dérivées partielles, puis de présenter plusieurs méthodes permettant de résoudre de telles équations.

Pour cela, nous commençons par définir un cadre de résolution en construisant les espaces de Sobolev dans des cas simples, en dimension 1 puis d, en donnant notamment un sens à la dérivée dans L^2 sans utiliser la théorie des distributions et en introduisant des outils utiles pour la suite tels que l'inégalité de Poincaré et le théorème de Rellich. Ensuite, nous présentons quelques méthodes de résolution avec simplement le théorème de Riesz au départ puis avec le théorème de Lax-Milgram et enfin avec un théorème de point fixe de Schauder. Nous ne nous intéresserons qu'à des équations elliptiques, c'est-à-dire indépendantes de la variable de temps. Pour ce travail, on considère comme acquis les résultats du cours d'Espaces Vectoriels Normés et Calcul Différentiel ainsi que de celui d'Intégration de Lebesgue.

Table des matières

Notations :

- $d \in \mathbb{N}^*$ est la dimension (finie) de l'espace $\mathbb{R}^d$ dans lequel on se place.
- Ω désigne un ouvert borné *à bord lisse* de $\mathbb{R}^d$.
- $|x|$ désigne la norme euclidienne canonique de x comme vecteur de $\mathbb{R}^d$.
- $x \cdot y$ désigne le produit scalaire canonique de deux vecteurs x, y de $\mathbb{R}^d$.
- $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ désigne la norme usuelle sur l'espace $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1; +\infty]$.
- $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur Ω.
- $\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E à valeurs dans F.
- d_E désigne la distance associée à la norme de l'espace vectoriel normé E.
- $\mathrm{supp}(f)$ désigne le support d'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
- $\mathcal{B}_E(x, r)$ désigne la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$ dans l'espace vectoriel E.
- $\overline{\mathcal{B}}_E(x, r)$ désigne la boule fermée de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$ dans l'espace vectoriel E.
- Pour $p \in [1, +\infty]$, on notera p' son exposant conjugué.
- Pour $f : E \to F$, on notera $f_{|A} : A \to F$ sa restriction à une partie A de l'ensemble E.

Les autres notations apparaissant dans ce rapport seront précisées au fur et à mesure du document.

I Espaces de Sobolev et propriétés préliminaires

I.1 Définition et caractéristiques des espaces de Sobolev en dimension 1

Avant de donner un cadre général de résolution en dimension d, commençons par le cas $d = 1$. En cette dimension, Ω désigne simplement un intervalle de $\mathbb{R}$, de la forme $\Omega =]a, b[$ avec $a < b$.

Définition I.1

Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère le produit scalaire usuel sur $]a, b[$ défini par $\langle f \mid g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. On dit que f admet une dérivée dans $L^2(\Omega)$ s'il existe une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telle que : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \langle f \mid \varphi' \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle g \mid \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}$. On note $H^1(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions de $L^2(\Omega)$ qui admettent une dérivée dans $L^2(\Omega)$ et on dit que cet espace est un espace de Sobolev.

On remarque que cela consiste en fait à définir $H^1(\Omega)$ par une intégration par partie implicite dans le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$. Nous observons qu'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est dérivable au sens de $L^2(I)$ mais que la réciproque est fausse, par exemple la fonction "valeur absolue" est dérivable au sens de $L^2(]-1, 1[)$ mais n'est pas dérivable sur $]-1, 1[$.

On peut également remarquer que pour $f \in L^2(\Omega)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telle que $x \mapsto f(x) - \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ soit constante sur Ω.

(ii) il existe une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telle que : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \langle f \mid \varphi' \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle g \mid \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}$.

Cela permet ainsi de définir $H^1(\Omega)$ comme étant aussi l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\Omega)$ qui admettent une dérivée dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire telles que, pour chacune d'entre elles, il existe une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telle que l'application $x \mapsto f(x) - \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ soit constante sur Ω.
L'équivalence précédente est admise dans ce rapport : la démonstration se trouve dans [2]. Elle permet cependant de voir un lien intéressant avec les coefficients de Fourier : on peut caractériser les fonctions de $H^1(\Omega)$ par une propriété vérifiée par leurs coefficients de Fourier. On rappelle que ceux-ci sont définis par $c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t,\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Proposition I.2

Soit $f \in L^2(\Omega)$. Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

(i) f admet une dérivée dans $L^2(\Omega)$.

(ii) la série de terme général $n^2|c_n(f)|^2, n \in \mathbb{Z}$ converge.

Démonstration : [3] Supposons que f admet une dérivée dans $L^2(\Omega)$: il existe une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telle que $x \mapsto f(x) - \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ soit constante sur Ω. Par propriété usuelle sur les coefficients de Fourier, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(g)$ donc, comme $g \in L^2(\Omega)$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(f)|^2$ converge. Réciproquement, on suppose que la série précédente est convergente (donc que f est égale à sa série de Fourier). Soit $x \in \Omega$, on définit alors la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ par : $\forall n \in \mathbb{Z} : u_n(x) := c_n(f)(e^{inx} - 1)$, de sorte que $f(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(x)$. On en déduit alors, en posant $g(x) = -\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2i\pi c_n(f)e^{inx}$, que $f(x) - \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)$, qui est une expression indépendante de x, donc f admet une dérivée dans $L^2(\Omega)$ qui est g.

Malheureusement, pour étudier des équations aux dérivées partielles d'ordre au moins deux (dans le cas où la dimension de l'espace est supérieure ou égale à 2), nous devons nous intéresser aux dérivées dans $L^2(\Omega)$ ce qui est difficile à étudier à notre niveau avec la caractérisation avec les coefficients de Fourier. De plus, ce résultat n'est alors vrai que lorsque Ω est le disque (admis ici), ce qui est assez contraignant.

Définition I.3

On définit sur $H^1(\Omega)$, la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ par $\|f\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\langle f \mid f\rangle_{H^1(\Omega)}} := \sqrt{\langle f \mid f\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g \mid g\rangle_{L^2(\Omega)}}$ où g désigne la dérivée dans $L^2(\Omega)$ de f.

En effet, comme $\langle f \mid g\rangle_{L^2(\Omega)}$ est un produit scalaire usuel, on en déduit facilement que l'application $\langle \cdot \mid \cdot\rangle_{H^1(\Omega)}$ définie par $\langle f \mid g\rangle_{H^1(\Omega)} := \langle f \mid g\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle f' \mid g'\rangle_{L^2(\Omega)}$ (où f' et g' désignent respectivement les dérivées de f et de g dans $L^2(\Omega)$) définit un produit scalaire, donc que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est bien une norme.

Théorème I.4

$(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ est un espace complet.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. On considère une suite de Cauchy de fonctions (f_n) dans $H^1(\Omega)$: $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant p \geqslant N,\ \|f_n - f_p\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon$. On observe facilement que (f_n) est aussi de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ donc convergente dans $L^2(\Omega)$ vers une fonction f puisque l'espace $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ est complet. Comme

(f_n) est une suite de fonctions de $H^1(\Omega)$, il existe une suite de fonctions (g_n) dans $L^2(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle f_n \mid \varphi' \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle g_n \mid \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}$. Par définition de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, on a : $\forall n \geqslant p \geqslant N$, $\sqrt{\|f_n - f_p\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_n - g_p\|^2_{L^2(\Omega)}} \leqslant \varepsilon$, ce qui donne que la suite (g_n) est aussi de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ donc converge vers une fonction $g \in L^2(\Omega)$. On vérifie enfin que $f \in H^1(\Omega)$: pour tout φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, $\langle f \mid \varphi' \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle g \mid \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}$ d'après les convergences établies précédemment donc g est la dérivée de f au sens de $L^2(\Omega)$. Ainsi, par définition de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, (f_n) converge dans $H^1(\Omega)$ vers $f \in H^1(\Omega)$ donc $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ est un espace complet.

I.2 Définition et propriétés des espaces de Sobolev en dimension d

Après avoir vu de premiers résultats sur les espaces de Sobolev en dimension 1, nous allons les étendre en dimension $d \geqslant 2$ afin de pouvoir résoudre en deuxième partie des équations aux dérivées partielles d'ordre 2 notamment. Ω désigne alors un ouvert borné *à bord lisse* (on ne définira pas cette notion, elle permet d'établir la prochaine définition notamment). On définit l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ comme en dimension 1, en remplaçant la dérivée L^2 par chacune des dérivées partielles.

Définition I.5

En dimension $d \in \mathbb{N}^*$, l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ désigne l'espace vectoriel de l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\Omega)$ telles que pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, il existe une fonction $V_i \in L^2(\Omega)$, telle que : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle f \mid \partial_i \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle V_i \mid \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}$ où $\partial_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Par la suite, on notera $\partial_i f := V_i$.

On munit alors $H^1(\Omega)$ de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ définie par $\|u\|_{H^1(\Omega)} := \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ pour $u \in H^1(\Omega)$, et du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ associé.

Proposition I.6

$(H^1(\Omega), \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.

Démonstration : [1] Comme pour la dimension 1, on vérifie sans problème que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est bien une norme sur $H^1(\Omega)$. Il s'agit alors de montrer que $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ est complet. On s'inspire du raisonnement utilisé en dimension 1. On considère alors une suite de fonctions (f_n) de Cauchy dans $H^1(\Omega)$, donc dans $L^2(\Omega)$ qui est complet : cette suite converge dans $L^2(\Omega)$. Par définition de $H^1(\Omega)$ en dimension d, on construit alors d suites de fonctions (les dérivées partielles de f au sens donné ci-dessus) $(g_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (g_{d,n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont chacune de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ donc convergentes dans $L^2(\Omega)$. En écrivant les produits scalaires de la définition (I.5) et en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on conclut, comme dans le cas où $d = 1$, que (f_n) converge dans $H^1(\Omega)$ qui est donc complet.

Définition I.7

On définit $H_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Proposition I.8

$(H_0^1(\Omega), \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.

Démonstration : $H_0^1(\Omega)$ est par définition fermé dans $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ qui est complet donc $(H_0^1(\Omega), \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ est un espace de Banach : $(H_0^1(\Omega), \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ est bien un espace de Hilbert.

Une fois ces espaces construits, montrons l'*inégalité de Poincaré* qui sera utile par la suite.

Proposition I.9

Il existe $C > 0$, tel que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. [7]

Démonstration : Soit $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. Ω est borné donc il existe des réels A_i et B_i pour tout $i \in [\![1, d]\!]$ tels que $\Omega \subset \prod_{i=1}^{n} [A_i, B_i]$. Comme f est en particulier de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, on a :
$\forall x \in \Omega,\ f(x) = \displaystyle\int_{A_1}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_d)\,\mathrm{d}t$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors que :
$\forall x \in \Omega,\ |f(x)|^2 \leqslant (B_1 - A_1) \displaystyle\int_{A_1}^{B_1} |\frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_1, ..., x_d)|^2\,\mathrm{d}t$. On intègre ensuite cette inégalité sur $\prod_{i=1}^{n} [A_i, B_i]$ et on obtient : $\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant (B_1 - A_1)^2 \|\partial_1 f\|_{L^2(\Omega)}^2$. Enfin, $|\partial_1 f| \leqslant |\nabla f|$ permet de conclure :
$\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant (B_1 - A_1)^2 \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}^2$ et la constante $C := (B_1 - A_1)^2$ convient.

On remarque que la constante C n'est dépendante que de l'ouvert Ω et que l'hypothèse : "Ω est borné dans une seule direction" suffit pour prouver la proposition précédente. Un corollaire immédiat est le suivant :

Proposition I.10

L'application $u \in H_0^1(\Omega) \mapsto \|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. [5]

Démonstration : On conserve la notation C pour la constante apparaissant dans l'inégalité de Poincaré. Pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a alors :

$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} := \|\nabla u\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant (1+C^2)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$, d'où l'équivalence des normes.

On termine cette introduction aux espaces de Sobolev en précisant qu'on peut également définir ces espaces à des ordres supérieurs.

Définition I.11

On définit l'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$ par : $H^2(\Omega) := \left\{ f \in H^1(\Omega),\ \forall i \in [\![1, d]\!],\ \partial_i f \in H^1(\Omega) \right\}$.

Ainsi, on peut par récurrence définir les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ pour $m \in \mathbb{N}^*$ à partir de cette définition mais on n'utilisera par la suite que les espaces que l'on vient d'introduire.

I.3 Théorème de Rellich

Avant d'énoncer et de montrer ce théorème, nous rappelons tout d'abord quelques définitions d'ordre topologique :

Définition I.12

Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X. On dit alors que :

- *A est relativement compacte dans X si $\overline{A}$ est compacte dans X,*
- *A est précompacte dans X si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.*

Nous rappelons cette propriété qui nous sera très utile dans les démonstrations qui suivent :

Proposition I.13

Soient (X, d) un espace métrique complet et A une partie de X.

A est relativement compacte dans X si, et seulement si, A est précompacte dans X.

Définissons ensuite les *opérateurs compacts* :

Définition I.14

Soient E et F des espaces de Banach.

On dit que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est un opérateur compact de E dans F si l'image de toute partie bornée de E est une partie relativement compacte de F.

Proposition I.15

Soient E et F des espaces de Banach, et E_1 et F_1 des espaces vectoriels normés. Si T est un opérateur compact de E dans F, $f \in \mathcal{L}(E_1, E)$ et $g \in \mathcal{L}(F, F_1)$ alors $gTf := g \circ T \circ f$ est un opérateur compact de E_1 dans F_1. [5]

Démonstration : On note $\overline{\mathcal{B}}_E(0,1)$ la boule unité fermée de E et on observe que $gTf\big(\overline{\mathcal{B}}_E(0,1)\big) \subset \|g\|_{L(F,F_1)} f\big(\overline{T(\overline{\mathcal{B}}_E(0,1)}\big)$. Comme l'image d'un compact (ici $\overline{T(\overline{\mathcal{B}}_E(0,1)}$ qui est fermé et borné en dimension finie) par une fonction continue est compacte, on en déduit que gTf est un opérateur compact également.

Une fois rappelées ces définitions, nous pouvons énoncer le *théorème de Rellich* :

Théorème I.16

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$.

L'injection $\iota : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte. [6]

Ce résultat est fondamental pour appliquer le théorème de Schauder qui sera présenté en partie II.3. C'est un résultat difficile à obtenir. Pour y parvenir, nous aurons besoin de plusieurs résultats. Commençons tout d'abord une propriété caractérisant les compacts de $L^p(\Omega)$ où $p \in [1, +\infty]$.

Théorème I.17

Soit $A \subset L^p(\mathbb{R}^d)$, A est relativement compacte dans $(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^d)})$ si, et seulement si, :

- *A est bornée dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, (i)*
- *$\displaystyle\int_{|x|>R} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformément en $f \in A$, (ii)*
- *$\tau_a f := f(\cdot - a) \underset{|a|\to 0}{\longrightarrow} f$ uniformément en $f \in A$. (iii)*

Démonstration : D'après le théorème de Riesz-Fischer, $(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^d)})$ est complet donc, d'après la proposition (I.13), la précompacité est équivalente à la relative compacité. Commençons par le sens direct.

Supposons que A soit une partie précompacte de $(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^d)})$ et introduisons $\varepsilon > 0$ et $f_1, \ldots, f_k \in A$ donnés par le recouvrement $A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{L^p(\mathbb{R}^d)}(f_i, \varepsilon)$. On en déduit immédiatement que A est bornée, ce qui donne le point (i).

De plus, on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$:

$$|f_j(x)\mathbf{1}_{|x|>R}| \leqslant \sup_{1\leqslant j\leqslant k} \|f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\mathbf{1}_{|x|>R} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et, pour tout $j \in \{1,\dots,k\}$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$: $|f_j(x)\mathbf{1}_{|x|>R}| \leqslant \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k} \|f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \in L^p(\mathbb{R}^d)$. D'après le théorème de convergence dominée, on dispose donc d'un réel $R_0 > 0$ tel que pour tout $R > R_0$ et pour tout $j \in \{1,\dots,k\}$, $\displaystyle\int_{|x|>R} |f_j(x)|^p \,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon^p$. Soit alors $f \in A$ quelconque. Par le recouvrement de A on dispose d'un entier $j_0 \in \{1,\dots,k\}$ tel que $d_{L^p(\mathbb{R}^d)}(f_{j_0}, f) < \varepsilon$. On a donc, pour tout $R > R_0$, $\displaystyle\int_{|x|>R} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \leqslant \Big(\int_{|x|>R} |f_{j_0}(x)|^p \,\mathrm{d}x\Big) + \Big(\int_{|x|>R} |(f-f_{j_0})(x)|^p \,\mathrm{d}x\Big) \leqslant 2\varepsilon^p$ donc $\displaystyle\int_{|x|>R} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformément en $f \in A$, ce qui donne le point (ii).

Enfin, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on sait que l'application $a \in \mathbb{R}^d \mapsto \tau_a f$ est uniformément continue. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $|a| < \eta$ et pour tout $j \in \{1,\dots,k\}$, $\|\tau_a f_j - f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon$. Donc pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $|a| < \eta$:

$$\forall f \in A, \|\tau_a f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\tau_a f - \tau_a f_{j_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\tau_a f_{j_0} - f_{j_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|f_{j_0} - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant 3\varepsilon.$$

Ainsi, $\tau_a f \underset{|a|\to 0}{\longrightarrow} f$ uniformément en $f \in A$, d'où le point (iii) et la démonstration du sens direct de ce théorème.

Réciproquement, supposons ces 3 propriétés satisfaites pour une certaine partie $A \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et montrons qu'il s'agit d'une partie précompacte de $(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^d)})$. Soit $\varepsilon > 0$. Le point (ii) nous donne l'existence d'un réel $R > 0$ tel que pour tout $f \in A$, $\|f\mathbf{1}_{|x|>R}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon$. Considérons une approximation de l'identité $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\mathrm{supp}(\phi_n) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}(0, \frac{1}{n})$ et $\|\phi_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f \in A$, on a :

$\|f - f{*}\phi_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sup\limits_{|y|\leqslant \frac{1}{n}} \|f - \tau_y f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. Cette dernière quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $f \in A$, $\|f - f{*}\phi_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon$.

Considérons désormais $x,\ x'$ dans $\mathbb{R}^d$ et $f \in A$ quelconques pour lesquels on a :

$$\begin{aligned}
|f*\phi_{n_0}(x) - f*\phi_{n_0}(x')| &= |\int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x'-y))\phi_{n_0}(y)\,\mathrm{d}y|, \\
&\leqslant \|\tau_x f - \tau_{x'} f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|\phi_{n_0}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}, \text{ par l'inégalité de Hölder} \\
&\leqslant \|\tau_{x-x'} f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|\phi_{n_0}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Remarquons aussi que l'inégalité de Hölder donne aussi que $|f*\phi_{n_0}(x)| \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|\phi_{n_0}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}$.

Maintenant, notons $\mathcal{P} := \{f*\phi_{n_0|\overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^d}(0,R)}, f \in A\} \subset \mathcal{C}\big(\overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^d}(0,R)\big)$.

D'une part, le point (i) nous donne que $\mathcal{P}_x := \{f(x),\ f \in \mathcal{P}\}$ est borné donc relativement compact dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^d$.

D'autre part, montrons que $\mathcal{P}$ est équicontinue. Soient $x \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité de τ_x sur $L^p(\mathbb{R}^d)$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(f,g) \in L^p(\mathbb{R}^d)^2$ tels que $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \eta$, on a $\|\tau_x(f) - \tau_x(g)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\varepsilon}{\|\phi_{n_0}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}}$.

Pour $y \in \mathbb{R}^d$ et $f \in A$, on a :

$$\begin{aligned}
|f*\phi_{n_0}(x) - f*\phi_{n_0}(y)| &= |\int_{\mathbb{R}^d} (f(x-t) - f(y-t))\phi_{n_0}(t)\,\mathrm{d}t|, \\
&\leqslant \|\tau_x f - \tau_y f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|\phi_{n_0}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}, \text{ d'après l'inégalité de Hölder.}
\end{aligned}$$

On pose $g : t \in \mathbb{R}^d \mapsto f(y - x + t)$. On a alors $|f*\phi_{n_0}(x) - f*\phi_{n_0}(y)| = \|\tau_x f - \tau_x g\|_p \|\phi_{n_0}\|_{p'} \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve bien que $\mathcal{P}$ est équicontinue.

Comme $\mathbb{R}^d$ est compact et complet, on en déduit par le théorème d'Ascoli que $\mathcal{P}$ est relativement compacte donc précompacte dans $\mathcal{C}^0(\overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^d}(0,R))$. Ainsi, on obtient l'existence d'une famille finie $g_1, \ldots, g_k$ d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P}$ soit recouvert par les boules $\mathcal{B}\Big(f_i, \varepsilon\lambda\big(\overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^d}(0,R)\big)^{-\frac{1}{p}}\Big)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On a donc :

$$\forall f \in A,\ \exists j \in \{1, \ldots, k\},\ \forall x \in \overline{\mathcal{B}}(0,R),\ |f*\phi_{n_0}(x) - f_j*\phi_{n_0}(x)| \leqslant \varepsilon\lambda\big(\overline{\mathcal{B}}(0,R)\big)^{-\frac{1}{p}}.$$

On fixe désormais une fonction $f \in A$ et l'entier $j \in \{1, \ldots, k\}$ associé comme ci-dessus. Pour presque tout

$x \in \mathbb{R}^d$, on a, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}|f(x)-f_j(x)| &\leqslant |f(x)-f*\phi_{n_0}(x)|+|f_j(x)-f_j*\phi_{n_0}(x)|+|f*\phi_{n_0}(x)-f_j*\phi_{n_0}(x)|,\\ &\leqslant |f(x)-f*\phi_{n_0}(x)|+|f_j(x)-f_j*\phi_{n_0}(x)|\\ &\qquad\qquad + (\mathbf{1}_{|x|\leqslant R}(x)+\mathbf{1}_{|x|>R}(x))|f*\phi_{n_0}(x)-f_j*\phi_{n_0}(x)|,\\ &\leqslant |f(x)-f*\phi_{n_0}(x)|+|f_j(x)-f_j*\phi_{n_0}(x)|+\mathbf{1}_{|x|\leqslant R}(x)|f*\phi_{n_0}(x)-f_j*\phi_{n_0}(x)|\\ &\qquad\qquad + \mathbf{1}_{|x|>R}(x)(|f(x)|+|f_j(x)|).\end{aligned}$$

En intégrant sur $\mathbb{R}^d$, la linéarité de l'intégrale donne :

$$\begin{aligned}\|f-f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \|f-f*\phi_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}+\|f_j-f_j*\phi_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}+\Big(\int_{|x|>R}|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\quad+\Big(\int_{|x|>R}|f_j(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\int_{|x|\leqslant R}|f*\phi_{n_0}(x)-f_j*\phi_{n_0}(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Comme $f \in A$, on obtient :

$$\begin{aligned}\|f-f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \|f-f*\phi_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}+\|f_j-f_j*\phi_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}+\Big(\int_{|x|>R}|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\quad+\Big(\int_{|x|>R}|f_j(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}+\varepsilon\lambda\Big(\overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^d}(0,R)\Big)^{-\frac{1}{p}}\sup_{x\in\overline{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^d}(0,R)}|f*\phi_{n_0}(x)-f_j*\phi_{n_0}(x)|\end{aligned}$$

Finalement : $\|f-f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant 5\varepsilon$ donc A est précompacte dans $(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^d)})$, ce qui achève la preuve du théorème (I.17).

Puis nous avons besoin de deux lemmes supplémentaires avant de commencer la démonstration du *théorème de Rellich*. On rappelle que Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$.

Lemme I.18

Si $f \in H_0^1(\Omega)$ admet $\tilde{f}$ pour prolongement par 0 sur Ω^c alors l'application Ψ définie par :

$\psi : f \in H_0^1(\Omega) \mapsto \tilde{f} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ est une isométrie de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : On raisonne par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ en montrant que Ψ est une isométrie de $(\mathcal{D}(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ dans $(H^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^d)})$.

Soit $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. Les fonctions f, $\tilde{f}$, ∇f et $\nabla \tilde{f}$ sont nulles à l'extérieur de Ω donc :

$\|\Psi(f)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = \|\tilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla \tilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \tilde{f}\|_{L^2(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} = \|f\|_{H^1(\Omega)}$.

Cela signifie que Ψ est bien une isométrie de $(\mathcal{D}(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ dans $(H^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^d)})$. Elle est aussi uniformément continue entre ces deux espaces. Par conséquent, comme $(\mathcal{D}(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ est dense dans $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ et comme $(H^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^d)})$ est complet, le théorème de prolongement d'une application uniformément continue justifie que Ψ se prolonge en une unique application uniformément continue de $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ sur $(H^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^d)})$. On conclut en vérifiant que cette application est bien une isométrie entre ces deux espaces.

Lemme I.19

Pour tous $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *et* $h \in \mathbb{R}^d$, $\|\tau_h u - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |h|^2 \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

Démonstration : Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^1(\mathbb{R}^d)$, il suffit de montrer le résultat pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.
Soient $h \in \mathbb{R}^d$ et $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a : $u(x-h) - u(x) = -\displaystyle\int_0^1 \nabla u(x - th) \cdot h \,\mathrm{d}t$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^d, |u(x-h) - u(x)|^2 \leqslant |h|^2 \displaystyle\int_0^1 |\nabla u(x-th)|^2 \,\mathrm{d}t$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Donc, en intégrant sur $\mathbb{R}^d$, $\|\tau_h u - u\|_2^2 \leqslant \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |u(x-h) - u(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant |h|^2 \|\nabla u\|_2^2$.

Passons désormais à la preuve du dit *théorème de Rellich*.

Démonstration : Pour montrer la compacité de l'application : $\iota : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, il suffit de montrer que l'injection $u \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est compacte : on pourra ensuite conclure par composition avec l'application linéaire continue $u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mapsto u_{|\Omega} \in L^2(\Omega)$.

Notons $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ et notons $\tilde{\mathcal{B}}$ l'ensemble des prolongements $\tilde{f}$ des éléments f de $\mathcal{B}$. D'après le lemme (I.18), $\tilde{\mathcal{B}}$ est inclus dans la boule unité fermée de $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$.

Montrons que $\tilde{\mathcal{B}}$ est relativement compacte dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pour ce faire, on utilise la caractérisation des ensembles relativement compacts dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p = 2$.

$\tilde{\mathcal{B}}$ est effectivement une partie bornée de $(L^2(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)})$ car elle est bornée pour $(H^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^d)})$ et puisque $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}$.

Pour tout $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{B}}$ et pour tout $R > 0$ tel que $\Omega \subset \mathcal{B}(0, R)$, on a $\displaystyle\int_{|x|>R} |\tilde{f}(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0$.

De plus, $\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1$ donc : $\forall f \in \tilde{B}, \forall a \in \mathbb{R}^d : \ \|\tau_a f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |a|$ d'après le lemme (I.19).

Cela permet d'obtenir la convergence $\tau_a f \underset{|a| \to 0}{\longrightarrow} f$ uniformément en $f \in \tilde{\mathcal{B}}$.

Ainsi, $\tilde{\mathcal{B}}$ est une partie relativement compacte d'après le théorème (I.17). C'est donc une partie précompacte de $(L^2(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)})$, donc $u \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est un opérateur compact. Donc l'injection $\iota : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte.

II Résolution d'équations aux dérivées partielles elliptiques

II.1 Avec le théorème de Riesz

Considérons le problème le plus simple pour commencer, le problème de *Dirichlet homogène* :

$$\begin{cases} -\Delta u & = f \text{ sur } \Omega \\ \\ u & = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction donnée quelconque sur Ω. Comme pour résoudre toute équation, il nous faut déterminer un ensemble de résolution : comme $f \in L^2(\Omega)$, il faut que $\Delta u \in L^2(\Omega)$ c'est-à-dire $u \in H^2(\Omega)$. Pour étudier ces équations en général, on cherche d'abord des solutions dites *faibles*. Plus précisément, pour u une solution de (1) et v suffisamment régulière sur Ω et nulle sur $\partial\Omega$: $\int_\Omega (-\Delta u)v = \int_\Omega fv$. La définition (I.5) donne alors : $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv$.

On appelle cette équation munie de l'espace de résolution, la *formulation faible du problème* (1) et on appelle *solution faible* une solution de cette formulation faible. Il nous faut aussi un espace de résolution de ce problème faible, contenant $H^2(\Omega)$ dans lequel ce qu'on a écrit à un sens : l'espace $H_0^1(\Omega)$ convient. On remarque ici la proximité de cette écriture avec le *théorème de représentation de Riesz* que l'on rappelle :

Théorème II.1

Soit $(H, \|\cdot\|, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert.

Si ℓ une forme linéaire continue sur H alors il existe un unique $h \in H$ tel que pour tout $u \in H$:

$\ell(u) = \langle h \mid u \rangle$.

On peut alors démontrer le résultat suivant :

Théorème II.2

L'équation (1) admet une unique solution faible dans $H_0^1(\Omega)$.

Démonstration : $(H_0^1(\Omega), \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{H_0^1(\Omega)}, \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert et l'application : $L : v \in H_0^1(\Omega) \mapsto \int_\Omega fv$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. En effet, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a : $|L(v)| \leq \int_\Omega |f||v| \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$, d'après les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré (C étant la constante apparaissant dans l'inégalité de Poincaré établie dans la première partie).

Ainsi, d'après le théorème de Riesz, il existe un unique élément de $H_0^1(\Omega)$, que l'on notera désormais u, qui vérifie la formulation faible du problème (1).

Cependant, montrer qu'une solution faible de (1) est une solution de (1) est bien moins évident. En effet, on vient de trouver une solution du problème faible $u \in H_0^1(\Omega)$, mais elle n'est a priori pas tout de suite élément de $H^2(\Omega)$ donc solution du problème (1). Nous pouvons toutefois établir le résultat suivant :

Proposition II.3

Si l'unique solution faible u de (1) *est un élément de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, alors elle vérifie* (1) *presque partout sur Ω.*

On peut montrer (voir [2]) que l'hypothèse de cette proposition est nécessairement vérifiée mais que le résultat est difficile à montrer. Plus généralement, remonter de la formulation faible du problème au problème lui-même est difficile sans faire de telles hypothèses. C'est pour cela que dans la suite de ce rapport, nous nous contenterons de fournir des résultats sur l'existence et l'unicité de solutions faibles.

Démonstration : Soit $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ l'unique solution faible de (1). D'après la définition (I.5), on a :

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \int_\Omega (\Delta u + f)v = 0. \ (*)$$

Étendons cette égalité pour $v \in L^2(\Omega)$. Soit $\varphi \in L^2(\Omega)$. Par densité de $(\mathcal{D}(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ dans $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Il vient alors : $\int_\Omega (\Delta u + f)\varphi = \int_\Omega (\Delta u + f)(\varphi - \varphi_n + \varphi_n) = \int_\Omega (\Delta u + f)(\varphi - \varphi_n)$, comme (φ_n) vérifie $(*)$. On a donc : $0 \leqslant |\int_\Omega (\Delta u + f)\varphi| \leqslant \|\Delta u + f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(\Omega)}$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient donc que $(*)$ est aussi valable pour $v \in L^2(\Omega)$.

Ainsi, en appliquant $(*)$ à $v = \Delta u + f$, on obtient que $\Delta u + f$ est nulle presque partout sur Ω donc que u vérifie (1) presque partout sur Ω (u étant bien entendu nulle sur $\partial\Omega$).

De la même façon, on peut essayer de résoudre avec le théorème de représentation de Riesz l'équation aux dérivées partielles elliptique suivante plus générale :

$$\begin{cases} -\Delta u + au & = f \text{ sur } \Omega \\ \\ u & = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

où $a \in L^\infty(\Omega)$ est une fonction à valeurs positives et f une fonction de $L^2(\Omega)$. De nouveau, l'ensemble de recherche de solution est $H^2(\Omega)$.

On effectue alors le même travail. Si $u \in H^2(\Omega)$ est une solution de (2) alors pour v suffisamment régulière, on a :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega auv = \int_\Omega fv.$$

Cependant, l'application $(u, v) \in H_0^1(\Omega)^2 \mapsto \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega auv$ n'est en général pas un produit scalaire pour $a \in L^\infty(\Omega)$ (si a n'est pas à valeurs positives). Dans ce cas, le théorème de Riesz n'est pas suffisant pour résoudre ce type plus général d'équations aux dérivées partielles.

II.2 Avec le théorème de Lax-Milgram

On a vu précédemment que la résolution générale des équations aux dérivées partielles elliptiques ne peut pas se faire en n'utilisant que le théorème de représentation de Riesz, il faut donc trouver une nouvelle méthode. Pour cela, le théorème suivant de Lax-Milgram sera d'une très grande aide.

Théorème II.4

Soit $(H, \|\cdot\|, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert.

Si a une forme bilinéaire continue et coercive sur H (telle que : $\exists J > 0,\ \forall u \in H,\ a(u, u) \geqslant J\|u\|^2$) alors, pour toute forme linéaire continue ℓ sur H, il existe un unique élément $u \in H$ tel que pour tout $v \in H,\ a(u, v) = \ell(v)$.

Démonstration : Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur H et soit ℓ une forme linéaire continue sur H. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $w \in H$ tel que pour tout $v \in H,\ \ell(v) = \langle w \mid v \rangle$. Comme a est une application bilinéaire, a est linéaire par rapport à la seconde variable donc le théorème de représentation de Riesz donne aussi que :

$$\forall u \in H,\ \exists A_u \in H,\ \forall v \in H,\ a(u,v) = \langle A_u \mid v \rangle\,.$$

Montrons alors qu'il existe un unique élément u de H tel que $A_u = w$.

Pour cela, on commence par remarquer que l'application $A : u \in H \mapsto A_u \in H$ est linéaire et continue. En effet : $\forall (u,u') \in H^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall v \in H,\ \langle A_{u+\lambda u'} - A_u - \lambda A_{u'} \mid v \rangle = 0$. De plus, pour tout $u \in H$, on a : $\|A(u)\|^2 = \langle A_u \mid A_u \rangle = a(u, A_u) \leqslant M\|u\|\|A_u\| = M\|u\|\|A(u)\|$ où M désigne le réel (strictement positif) de continuité de a, ce qui montre que l'application linéaire A est continue sur H.

On note ensuite J le réel de coercivité de a et $T : u \in H \mapsto u - \eta(A(u) - w) \in H$ où $\eta := \frac{J}{M^2}$, de sorte que $A_u = w$ si et seulement si, u est point fixe de T.

Or, l'application T est contractante : comme $(1 - \dfrac{J^2}{M^2}) \in \,]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall (u,v) \in H^2 : \|T(u) - T(v)\|^2 &= \|u - v - \eta(A(u) - A(v))\|^2 \\
&= \|u-v\|^2 - 2\eta a(u-v, u-v) + \eta^2\|A(u-v)\|^2 \\
&\leqslant \|u-v\|^2(1 - 2\eta J + \eta^2 M^2) \\
&\leqslant \|u-v\|^2(1 - \frac{J^2}{M^2}).
\end{aligned}$$

Ainsi, comme H est complet, le théorème de point fixe contractant donne qu'il existe un unique $u \in H$ tel que $A_u = w$. Cela permet de conclure puisque cet unique u est tel que pour tout $v \in H,\ a(u,v) = \ell(v)$.

Nous allons maintenant voir que ce théorème, bien plus fort que celui de représentation de Riesz, permet de résoudre l'équation (2).

Théorème II.5

Le problème (2) *admet une unique solution faible dans* $H_0^1(\Omega)$.

Démonstration : Pour toute application v suffisamment régulière et nulle sur le bord de Ω, une solution u vérifie : $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega auv = \int_\Omega fv$. De la même manière que pour le problème de Dirichlet, on remarque que cette formulation faible a un sens pour $(u,v) \in H_0^1(\Omega)^2$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Lax-Milgram avec les applications suivantes :

$$\begin{cases} L\colon H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\quad v \longmapsto \displaystyle\int_\Omega fv \end{cases} \qquad \begin{cases} b\colon H_0^1(\Omega)^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad (u,v) \longmapsto \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega auv \end{cases}$$

L est, comme précédemment, une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ et b est clairement une forme bilinéaire sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. De plus, comme $a \in L^\infty(\Omega)$, on montre que :

$$\forall (u,v) \in H_0^1(\Omega)^2,\ |b(u,v)| \leqslant (1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} C^2)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Comme a est à valeurs positives, on a en particulier :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega),\ |b(u,u)| = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega au^2 \geqslant \int_\Omega |\nabla u|^2 = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Cela montre que b est une application bilinéaire continue coercive donc on peut bien appliquer le théorème de Lax-Milgram. Ainsi, il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation faible de (2).

On peut même traiter un cas d'équations encore plus général pour lequel seul le théorème de Lax-Milgram nous permettra de le résoudre (le problème (2) était résoluble en n'utilisant que le théorème de Riesz puisque la fonction a était à valeurs positives). Considérons l'opérateur elliptique $\mathcal{L}$ défini par :

$$\mathcal{L} : u \in H_0^1(\Omega) \mapsto \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big).$$

avec pour $1 \leqslant i,j \leqslant d,\ a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour laquelle il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall \xi := (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^d,\ \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant d} a_{i,j}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2.$$

On considère alors le problème suivant :

$$\begin{cases} -\mathcal{L}(u) + bu &= f \text{ sur } \Omega \\ \\ \qquad u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

où $b \in L^\infty(\Omega)$ est à valeurs positives et $f \in L^2(\Omega)$. L'ensemble de résolution étant toujours $H^2(\Omega)$.

Théorème II.6

Le problème (3) *admet une unique solution faible dans* $H_0^1(\Omega)$.

Démonstration : Déterminons d'abord la formulation faible de ce problème. Soit u une solution de (3). Pour toute application v suffisamment régulière, on a :

$$\int_\Omega \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)v + \int_\Omega buv = \int_\Omega fv.$$

Puis :

$$-\int_\Omega \Bigg(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)v\Bigg) = -\sum_{1\leqslant i,j\leqslant d}\int_\Omega \Bigg(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)v\Bigg) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d}\int_\Omega \Bigg(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\Bigg).$$

La formulation faible de ce problème est donc :

$$\int_\Omega \Bigg(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\Bigg) + \int_\Omega buv = \int_\Omega fv.$$

L'ensemble de résolution étant ici $H_0^1(\Omega)$ comme pour les précédentes équations. Introduisons alors les applications suivantes :

$$\begin{cases} L\colon H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad v \longmapsto \displaystyle\int_\Omega fv \end{cases} \qquad \begin{cases} B\colon H_0^1(\Omega)^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad (u,v) \longmapsto \displaystyle\int_\Omega \Bigg(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\Bigg) + \int_\Omega buv \end{cases}$$

Comme dans l'exemple précédent, L est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$.

De plus, B est bilinéaire et pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a : $|B(v,v)| \geqslant \displaystyle\int_\Omega \alpha|\nabla v|^2 = \alpha\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$ par hypothèse sur les $(a_{i,j})$. Cela justifie que B est bien coercive. Il reste à établir la continuité de B.

On considère pour cela $(v,w) \in H_0^1(\Omega)^2$.

On a : $|B(v,w)| \leqslant K \displaystyle\int_\Omega \left(\sum_{1\leqslant i,j \leqslant d} |\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_j}| \right) + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}$, où $K := \max_{1\leqslant i,j\leqslant d} \|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)}$,

donc $|B(v,w)| \leqslant K \displaystyle\int_\Omega |\nabla v||\nabla w| + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|v\|_{H_0^1(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)}(K + C^2\|b\|_{L^\infty(\Omega)})$, d'après les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré.

Ainsi, B est bien continue sur $H_0^1(\Omega)^2$ et on en déduit le résultat d'après le théorème de Lax-Milgram.

II.3 Avec un théorème de Schauder

Après avoir vu que le théorème de Lax-Milgram est bien utile pour résoudre des équations aux dérivées partielles linéaires, on observe qu'il n'est cependant d'aucune utilité pour résoudre des équations aux dérivées partielles non linéaires. On doit donc utiliser une nouvelle méthode pour résoudre ce type d'équations. Commençons d'abord avec un exemple simple : essayons de résoudre le problème suivant dans $H^2(\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) \text{ sur } \Omega \\ \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

où f est une application quelconque dans $\mathcal{C}^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Le théorème fondamental pour résoudre cette équation aux dérivées partielles sera le *théorème de Schauder* :

Théorème II.7

Soient E un espace de Banach et $\mathcal{C} \subset E$ une partie non vide convexe fermée de E.

Si $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un opérateur continu tel que $T(\mathcal{C})$ est relativement compact alors T admet un point fixe.

Démonstration : La démonstration est admise, on peut la retrouver dans [4].

Pour pouvoir utiliser ce théorème pour résoudre le problème (4) nous devons donc démontrer quelques propriétés relatives au Laplacien.

Proposition II.8

L'opérateur $\Delta^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ qui à $f \in L^2(\Omega)$ associe l'unique solution faible de (1) est continue.

Démonstration : Soit $f \in L^2(\Omega)$. D'après les inégalités de Cauchy-Schwarz de Poincaré, on a : $\forall v \in H_0^1(\Omega) : |\langle f \mid v\rangle_{L^2(\Omega)}| \leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$, où C est la constante qui apparaît dans l'inégalité de

Poincaré.

L'application $L : v \mapsto \langle v \mid f \rangle_{L^2(\Omega)}$ est donc une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ de norme inférieure ou égale à $C\|f\|_{L^2(\Omega)}$. Enfin, la résolution de la formulation faible du problème (1) avec le théorème de Riesz nous donne l'existence et l'unicité de la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ et l'inégalité $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$, d'où la continuité de Δ^{-1}.

Nous pouvons maintenant résoudre le problème (4). Rappelons que la formulation faible de ce problème consiste à trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant : $\forall v \in H_0^1(\Omega) : \displaystyle\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + f(u)v) = 0$.

Proposition II.9

L'opérateur $T : v \in H_0^1(\Omega) \mapsto -(\Delta^{-1})(f(v)) \in H_0^1(\Omega)$ est une application continue et compacte.

Démonstration : $T : v \in H_0^1(\Omega) \mapsto -(\Delta^{-1})(f(v))$. $T = -\Delta^{-1} \circ f \circ \iota$ est continue car c'est la composition des applications continues d'après la proposition (II.8). De plus, cette application est compacte : d'après le théorème de Rellich, ι est une application compacte et f est continue donc $f \circ \iota$ est une application compacte. Ainsi, comme $-(\Delta^{-1})$ est linéaire, T est bien une application compacte.

Théorème II.10

Le problème (4) admet au moins une solution faible dans $H_0^1(\Omega)$.

Démonstration : Nous allons appliquer le théorème de Schauder à $E = H_0^1(\Omega)$ et à l'opérateur T. On considère pour cela l'ensemble convexe $\mathcal{C} := \{v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant M\}$ où $M := C\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\sqrt{\lambda(\Omega)}$, toujours avec C la constante apparaissant dans l'inégalité de Poincaré et $\lambda(\Omega)$ la mesure de Lebesgue de la partie bornée Ω.

$\mathcal{C}$ est fermé par caractérisation séquentielle : si (v_n) est une suite de $\mathcal{C}$ qui converge vers v dans $(H_0^1(\Omega), \|.\|_{H_0^1(\Omega)})$ alors (v_n) est bornée dans $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)})$ donc admet une suite extraite qui converge faiblement vers un élément de $H_0^1(\Omega)$, qui ne peut alors qu'être v. De plus, cette limite vérifie nécessairement $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant M$ puisque (v_n) est une suite de $\mathcal{C}$.

Vérifions enfin que $T(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ grâce au choix de la constante M. Soit $v \in \mathcal{C}$, par définition de T, on a :
$\forall w \in H_0^1(\Omega), \displaystyle\int_\Omega \nabla T(v) \cdot \nabla w = \int_\Omega f(v)w.$

En particulier, pour $w = T(v) \in H_0^1(\Omega)$, on obtient : $\displaystyle\int_\Omega \nabla T(v) \cdot \nabla T(v) = \int_\Omega f(v)T(v)$, donc :

$\|\nabla T(v)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \|f\|_\infty \sqrt{\lambda(\Omega)} \|T(v)\|_{L^2(\Omega)}$. L'inégalité de Poincaré donne donc :

$\|\nabla T(v)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|f\|_\infty \|\nabla T(v)\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\lambda(\Omega)}$. Par définition de M, on obtient bien que $T(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

Finalement, $\mathcal{C}$ est un convexe fermé borné de $H_0^1(\Omega)$ donc $T(\mathcal{C})$ est relativement compact donc, d'après le théorème de Schauder, la formulation faible de (4) admet au moins une solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

Cependant, il n'y a pas unicité en général de la solution de ce problème (4). On peut toutefois donner le résultat d'unicité suivant :

Proposition II.11

Si f vérifie la propriété suivante, de décroissance : $\forall (u_1, u_2) \in H_0^1(\Omega)^2, \displaystyle\int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))(u_1 - u_2) \leqslant 0$, alors le problème (4) admet une unique solution faible dans $H_0^1(\Omega)$.

Démonstration : Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (4). Elles vérifient donc :

$\forall v_1 \in H_0^1(\Omega), \displaystyle\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 = \int_\Omega f(u_1) v_1$ et $\forall v_2 \in H_0^1(\Omega), \displaystyle\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 = \int_\Omega f(u_2) v_2$. On choisit alors v_1 et v_2 telles que $v_1 := u_1 - u_2$ et $v_2 := u_2 - u_1$, qui sont bien, par somme, des éléments de $H_0^1(\Omega)$, ce qui donne :

$\displaystyle\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla (u_1 - u_2) = \int_\Omega f(u_1)(u_1 - u_2)$ et $\displaystyle\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla (u_2 - u_1) = \int_\Omega f(u_2)(u_2 - u_1)$.

On effectue alors la somme de ces deux équations et on obtient :

$\displaystyle\int_\Omega |\nabla (u_1 - u_2)|^2 = \int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))(u_1 - u_2) \leqslant 0$ par hypothèse de décroissance de f. Or, d'après l'inégalité de Poincaré, $0 \leqslant \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|\nabla(u_1 - u_2)\|_{H^1(\Omega)} = 0$ ici, d'où l'unicité dans ce cas de la solution du problème (4) : $u_1 = u_2$.

Enfin résolu le problème précédent, terminons ce travail par l'étude d'une équation aux dérivées partielles encore plus générale.

$$\begin{cases} -\Delta u + au &= f(u) \text{ sur } \Omega \\ \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

où $a \in L^\infty(\Omega)$ est à valeurs positives et telle que $\|a\|_\infty C^2 < 1$ et où f est une fonction de $C^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Nous allons procéder de la même manière que précédemment en introduisant les applications auxquelles nous allons appliquer le théorème de Schauder.

Proposition II.12

L'opérateur $\Delta_a^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ *qui à* $f \in L^2(\Omega)$ *associe l'unique solution faible de (2) est continue.*

Démonstration : Soit $f \in L^2(\Omega)$, le théorème de Lax-Milgram affirme que $B(u,u) = L(u)$ où B et L sont définies dans la partie II.2 (avec ici $a = b$ dans la définition précédente de B). La coercivité de B et la continuité de L nous donnent ainsi : $\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. Donc $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}$, d'où la continuité de Δ_a^{-1}.

Nous pouvons maintenant résoudre le problème (5). Rappelons que la formulation faible de ce problème consiste à trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant : $\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - auv + f(u)v) = 0$.

Proposition II.13

L'opérateur $T_a : v \in H_0^1(\Omega) \mapsto -(\Delta_a^{-1})(f(v)) \in H_0^1(\Omega)$ *est une application continue et compacte.*

Démonstration : L'opérateur $T : v \in H_0^1(\Omega) \mapsto -(\Delta_a^{-1})(f(v))$. $T = -\Delta_a^{-1} \circ f \circ \iota$ est continue car c'est la composition des applications continues d'après la proposition (II.8). De plus, cette application est compacte. En effet, d'après le théorème de Rellich, ι est une application compacte, et f est continue donc $f \circ \iota$ est une application compacte donc, comme $-(\Delta_a^{-1})$ est linéaire, T est une application compacte.

Théorème II.14

Le problème (5) *admet au moins une solution faible dans* $H_0^1(\Omega)$.

Démonstration : On considère ensuite l'ensemble convexe borné $\mathcal{C} := \{v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant M\}$ où $M := \frac{C\|f\|_\infty \sqrt{\lambda(\Omega)}}{1-\|a\|_\infty C^2}$. On remarque que M est bien défini car on a supposé $\|a\|_\infty C^2 \neq 1$ et $\mathcal{C}$ est non vide car $\|a\|_\infty C^2 < 1$.

On observe que $\mathcal{C}$ est fermé par caractérisation séquentielle de la même manière qu'à l'exemple précédent. Montrons maintenant que $T(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ en considérant $v \in \mathcal{C}$. Par définition de T, on a :

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla T(v) \cdot \nabla w + \int_\Omega aT(v)w = \int_\Omega f(v)w.$$

En appliquant cette égalité pour $w = T(v)$, on obtient :

$$\int_\Omega \nabla T(v) \cdot \nabla T(v) = \int_\Omega f(v)T(v) - \int_\Omega aT(v)^2.$$

Donc $\|\nabla T(v)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \|a\|_\infty \|T(v)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|_\infty \sqrt{\lambda(\Omega)} \|T(v)\|_{L^2(\Omega)}$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Puis, d'après l'inégalité de Poincaré, $(1 - \|a\|_\infty C^2)\|\nabla T(v)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|f\|_\infty \sqrt{\lambda(\Omega)} \|\nabla T(v)\|_{L^2(\Omega)}$.

Donc $T(v) \in \mathcal{C}$. Finalement, $\mathcal{C}$ est un convexe fermé borné de $H^1_0(\Omega)$ donc $T(\mathcal{C})$ est relativement compact et on peut conclure en appliquant le théorème de Schauder : la formulation faible du problème (5) admet au moins une solution $u \in H^1_0(\Omega)$.

Cette résolution achève nos lectures dirigées : nous avons ainsi pu élargir le cadre de résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques, bien que les nouvelles méthodes introduites ne permettent pas de résoudre explicitement ces équations et qu'elles ne s'appliquent qu'à certaines conditions souvent restrictives.

Références

[1] Pierre Le Barbenchon. *Introduction aux Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires.*

[2] Haim Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications.* Masson, 1983.

[3] Thomas Delzant. *Séries de Fourier.*

[4] Hervé Le Dret. *Équations aux dérivées partielles elliptiques non-linéaires.* Springer, 2013.

[5] Francis Hirsch et Gilles Lacombe. *Éléments d'analyse fonctionnelle.* Masson, 1997.

[6] Hugo Eulry. *Opérateurs compacts.*

[7] Otared Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques.* Springer, 1994.