Problème du voyageur de commerce euclidien

Pierron Théo

12 avril 2014

On s'intéresse à l'algorithme d'approximation glouton suivant.

Algorithme 1: Approx(G, c)

Entrées : (G, c) une graphe complet valué vérifiant l'inégalité triangulaire
Sorties : Un cycle hamiltonien de G

Sélectionner $r \in V$.
$T \leftarrow$ Prim (G, c, r) // on construit un ACM à partir de r
$L \leftarrow$ la liste des sommets visités dans un parcours en profondeur de T.
retourner *Le cycle parcourant L dans l'ordre*

<u>Théorème 1</u> *Approx a une garantie de performance* 2*, i.e. pour tout* (G, c)*,* $c(\mathit{Approx}(G, c)) \leqslant 2c(\mathit{PVCE}(G, c))$.

Démonstration. Soit H^* une tournée optimale et T un arbre couvrant minimal. Si on enlève une arête v au cycle H^*, on obtient un arbre couvrant donc

$$c(T) \leqslant c(H^* \setminus \{v\}) \leqslant c(H^*)$$

Soit L' le chemin associé à T. Par inégalité triangulaire,

$$c(\text{Approx}(G, c)) \leqslant c(L') = 2c(T) \leqslant 2c(H^*)$$

D'où le résultat. ■

On a donc un algorithme polynomial qui fournit une solution approchée de PVCE (on peut améliorer le 2 en 1.5). Tout repose sur l'inégalité triangulaire. En effet, on a le résultat suivant :

<u>Théorème 2</u> *Si* $P \neq NP$*, pour tout* $\rho \geqslant 1$*, il n'existe aucun algorithme d'approximation de* PVC *de rapport* ρ *en temps polynomial.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe un tel algorithme B_ρ. On va montrer qu'on peut résoudre le problème du chemin hamiltonien en temps polynomial en le réduisant à B_ρ.

Soit $G = (S, A)$ un graphe, instance du problème du chemin hamiltonien. Soit $G' = (S, A')$ le graphe complet sur S. On définit la fonction de coût :

$$c(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u, v) \in A \\ \rho|S| + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si G a un chemin hamiltonien, (G', c) a une tournée de coût $|S|$. Sinon, toute tournée de G' passe par une arête qui n'était pas dans A donc son coût est au moins

$$|S| - 1 + \rho|S| + 1 > \rho|S|$$

Donc si G a un chemin hamiltonien, $B_\rho(G', c)$ renvoie forcément ce chemin. Sinon B_ρ renvoie un chemin de coût strictement supérieur à $\rho|S|$.

G a donc un chemin hamiltonien ssi $B(G', c) \leqslant \rho|S|$. On a donc un algorithme polynomial pour le problème du chemin hamiltonien, ce qui contredit $P \neq NP$ (vu que chemin hamiltonien est NP-complet). ■