Équations différentielles

Pierron Théo

ENS Ker Lann

Table des matières

Chapitre 1

Introduction et exemples : maths à la physicienne

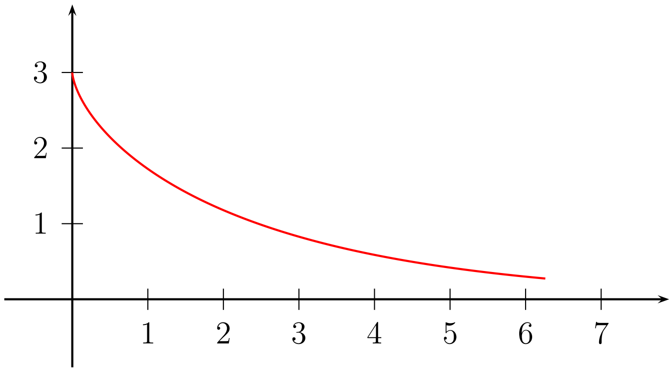
Soit $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1 Un équation différentielle d'ordre 1 s'écrit $x'(t) = f(t, x(t))$. On dit que φ est solution ssi φ est C^1 et vérifie $\forall t \in I, \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ et $\varphi(t) \in U \forall t \in I$.

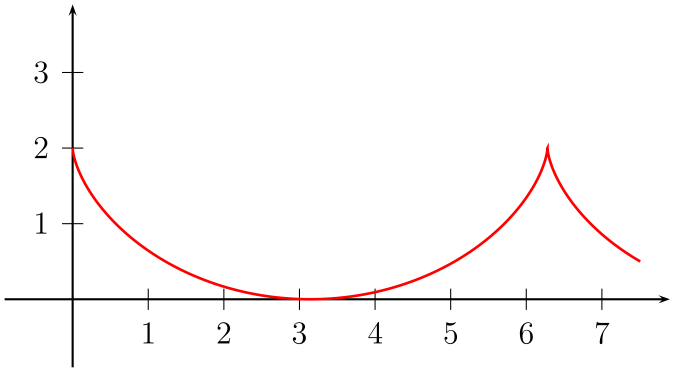
Remarque 1.1 On aurait pu prendre φ seulement différentiable, mais ça ne change rien, car si φ est différentiable et solution, alors elle est C^1 puisque f et φ sont continues.

Exemples :

- La tractrice (Leibnitz, 1693).
  On cherche la courbe telle que la distance entre tout point P de la courbre et l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente en P est constante égale à a.
  Soit P de coordonnées (x, y) sur la courbe. La pente de la tangente au point P est $\frac{-y}{\sqrt{a^2-y^2}}$ et aussi y' donc on a :
  $$y' = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$
  C'est une équation à variables séparables donc on fait nos physiciens : et puis on change de variable ($v = \sqrt{a^2 - y^2}$, $v \, \mathrm{d}v = -y \, \mathrm{d}y$) :
  $$\mathrm{d}x = \sqrt{a^2 - y^2} - y \, \mathrm{d}y$$
  Et puis on change de variable ($v = \sqrt{a^2 - y^2}$, $v \, \mathrm{d}v = -y \, \mathrm{d}y$) pour calculer l'intégrale et on tombe sur :
  $$x = -\sqrt{a^2 - y^2} - a \ln \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right)$$



- Brachistochrone : on cherche le moyen le plus rapide d'aller d'un point à un autre dans un champ de pesanteur uniforme.
  La méthode de Galilée (1683) est de prendre un quart de cercle de A à B et d'y placer C, D, E et F (dans l'ordre). Il considère après les trajets en ligne droite ACB, $ACDB$,... Il remarque que ACB est moins bon que $ACDB$ qui est moins bon que $ACDEB$,... Il conclut alors faussement que l'arc de cercle est le chemin cherché.
  Méthode de physicien de Bernoulli : On considère une portion élémentaire de la courbe $\mathrm{d}s$. Sur cet élément, on peut considéré que la courbe est droite. On a alors un triangle rectangle de côtés $\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$. On a donc $\sin(\alpha) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$.
  Le chemin le plus court entre deux points est celui que suivrait un rayon de lumière. La courbe brachistochrone est donc simplement le trajet suivi par la lumière dans un milieu où la vitesse augmente selon une accélération constante (l'attraction terrestre g). La loi de la conservation de l'énergie permet d'exprimer la vitesse d'un corps soumis à l'attraction terrestre par $v = \sqrt{2gy}$. On peut alors utiliser le principe de Fermat : $v = K\sin(\alpha)$.
  Donc $K = \sqrt{2gy}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$. Or $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ donc $\frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}x^2} = 1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}$.
  On obtient alors : $\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}\sqrt{2gy} = K$ donc $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{c-y}{y}}$.
  On pose alors $y = c\sin^2(u)$ et on a, en réinjectant dans $\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{y}{c-y}}\,\mathrm{d}y$, on a $\mathrm{d}x = 2c\sin^2(u)\,\mathrm{d}u$ et on a $x = cu - \frac{c\sin(2u)}{2}$.
  On a donc affaire à une branche de cycloïde retournée :



1.1 Quelques types d'équations intégrables

1.1.1 Variables séparables

Forme

Ce sont les équations de la forme $y'(x) = f(x)g(y(x))$.

Résolution

On cherche une primitive de $y \mapsto \frac{1}{g(y)}$ notée G et F une primitive de f et on a $G(y) = F(x) + c$ et avec de la chance, on peut obtenir y en fonction de x.

Dans le cas où $g = \mathrm{Id}$, on parle d'équation linéaire homogène et on a $y = C\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}$.

1.1.2 Équations linéaires inhomogènes

Forme

$y' = f(x)y + g(x)$.

Résolution

On cherche y sous la forme $u(x)v(x)$. On a $u'v + uv' = fuv + g$ et on essaie d'identifier u' avec fu et uv' avec g.

On doit donc résoudre un équation linéaire homogène pour u : $u = C\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}$.

Si $C \neq 0$, u ne s'annule pas donc on a $v' = \frac{g}{u}$ et on peut trouver v.

Donc $y = x \mapsto Cu(x) + u(x)\int_0^x \frac{g(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t$.

1.1.3 Équation de Bernoulli-Ricatti

Forme

Ce sont celles de la forme $y' = fy + gy^n$.

Première méthode

On cherche y sous la forme uv et on essaie comme précédemment d'identifier : on doit alors résoudre $u' = fu$ et $v' = gu^{n-1}v^n$.

On peut résoudre la première équation comme précédemment : $u(x) = C\mathrm{e}^{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$.

Et on peut résoudre la deuxième équation qui est à variable séparables. On a alors :

$$y(x) = u(x)\left(c + (1-n)\int_0^x g(t)u^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1-n}$$

Deuxième méthode

On pose $y = v^\beta$.

On a $y' = \beta v' v^{\beta-1} = fv^\beta + gv^{n\beta}$.

Donc $\beta v' = fv + gv^{(n-1)\beta+1}$ donc, avec $\beta = \frac{1}{1-n}$, on a $v' = (1-n)fv + (1-n)g$ qui est une équation linéaire inhomogène.

1.2 Exemples en dynamique des populations

1.2.1 Cas d'une seule espèce

Modèle classique

Si $N(t)$ désigne le nombre d'individus d'une population, on peut modéliser l'évolution de N par l'équation $N'(t) = rN(t)$ (loi de Maltus) avec r une constante représentant le taux d'accroissement de la population.

On a donc $N(t) = N_0\mathrm{e}^{rt}$.

Un meilleur modèle : celui de Verkult

On note $n(N)$ le taux de natalité et $m(N)$ le taux de mortalité.

On a $N'(t) = n(N(t))N(t) - m(N(t))N(t)$. On suppose que n et m sont des fonctions affines de N avec n décroissante et m croissante.

On obtient que $n - m$ est une fonction affine décroissante et on a $N'(t) = (a - bN(t))N(t)$ avec $b \geqslant 0$.

Si on suppose $N'(t)$ positif au voisinage de 0, on a $a \geqslant 0$ et si $b \neq 0$, on obtient $N'(t) = aN(t)(1 - \frac{N(t)}{c})$.

$N = c$ est solution. On dit que c est un point critique. Dans ce modèle, on l'appelle capacité d'accueil.

Si $N(t) > c$, alors N décroît, sinon elle croît.

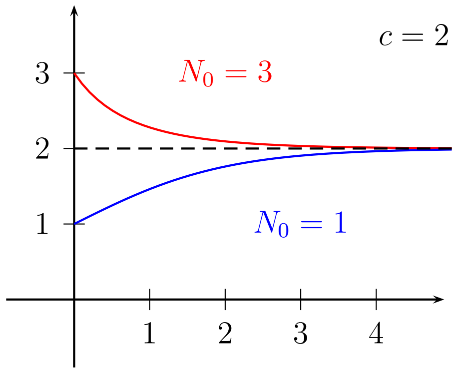
Solution

À part énoncer des propriétés dont l'intérêt reste à prouver vu ce qu'on va faire, on va résoudre cette équation avec la condition initiale $N(0) = N_0 > 0$.

C'est une équation de Bernoulli, donc gentille donc on la fait résoudre au prof et on a :

$$N(t) = \frac{c}{1 + \left(\frac{c}{N_0} - 1\right) \mathrm{e}^{-at}}$$

On obtient : $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = c$.



1.2.2 Cas de deux espèces

Mise en équation

On s'intéresse à un système biologique avec des proies $x(t)$ et des prédateurs $y(t)$.

En l'absence de prédateurs, $x'(t) = ax(t)$ avec $a > 0$ un taux de croissance.

En l'absence de proies, $y'(t) = -cy(t)$ avec $c > 0$ un taux de mortalité.

En combinant la présence des deux espèces, on obtient le modèle de Lotka-Volterra :

$$\begin{cases} x'(t) & = (a - by(t))x(t) \\ y'(t) & = (dx(t) - c)y(t) \end{cases}$$

avec a, b, c, d positifs.

Équilibres du système

On cherche les états du système tels que $x' = y' = 0$. On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} 0 &= (a - by_0)x_0 \\ 0 &= (dx_0 - c)y_0 \end{cases}$$

On trouve $(0,0)$ et $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

Ce sont les points stationnaires ou d'équilibre du système. Les fonctions constantes associées sont des solutions stationnaires.

Existence d'un invariant/intégrale première

Définition 1.2 C'est une fonction I telle que $I(x(t), y(t))$ est constante pour tout t et pour toutes solutions x et y du système.

Formellement, on a :

$$\begin{aligned} &\frac{x'}{y'} = \frac{x(a-by)}{y(dx-c)} \\ &\text{donc } \frac{x'(dx-c)}{x} = \frac{y'(a-by)}{y} \\ &\text{donc } dx' - c\frac{x'}{x} = a\frac{y'}{y} - by' \\ &\text{donc } dx - c\ln(x) = a\ln(y) - by + k \end{aligned}$$

Posons alors $I : (x,y) \mapsto a\ln(y) - by + c\ln(x) - dx$. On peut vérifier que I est constante.

Chapitre 2

L'arrivée des maths correctes : théorèmes généraux, existence et unicité des solutions

2.1 Préliminaires

2.1.1 Cadre général

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert. Soit E un Banach et $D \subset E$ un ouvert connexe. On considère une application $f : I \times D \to E$ continue et $y_0 \in E$.

Définition 2.1 On appelle problème de Cauchy la recherche d'un intervalle J tel que $t_0 \in J \subset I$ et d'une solution $y : J \to D$ telle que y soit dérivable sur J et :

$$\begin{cases} y'(t) & = f(t, y(t)) \forall t \in J \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

Remarque 2.1 Le plus souvent, on considèrera souvent le cas où $E = \mathbb{R}^d$.

Proposition 2.1 Une formulation équivalente du problème de Cauchy est :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \quad \forall t \in J$$

Démonstration.

$\Rightarrow$ f est continue et y est dérivable par hypothèse donc y' est continue et y est C^1.
Ainsi, $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} y'(s)\,\mathrm{d}s$.
On obtient la deuxième formulation en remplaçant $y'(s)$ par $f(s, y(s))$.

$\Leftarrow$ Il suffit de dériver pour obtenir $y'(t) = f(t, y(t))$. Et on évalue en t_0 pour avoir $y(t_0) = y_0$. ∎

Définition 2.2 Un couple (J, y) est appelé solution locale du problème de Cauchy ssi $t_0 \in J \subset I$, $y \in C^1(J)$, J voisinage de t_0 dans I et $\forall t \in Jny'(t) = f(t, y(t))$.

Définition 2.3 Soit (J_1, y_1) et (J_2, y_2) deux solutions. On dit que (J_1, y_1) prolonge (J_2, y_2) ssi $J_2 \subset J_1$ et $y_1|_{J_2} = y_2$.

Définition 2.4 Une solution locale est dite maximale si tous ses prolongements lui sont égaux.

Définition 2.5 Une solution est dite globale si $J = I$.

Remarque 2.2

- *Une solution globale est maximale.*
- *Soient (J_1, y_1), (J_2, y_2) deux solutions locales et t_1, t_2, t_3, t_4 tels que $t_1 < t_0 < t_2$ et $t_3 < t_2 < t_4$ et $[t_1, t_2] \subset J \supset [t_3, t_4]$ vérifiant :*

$$\begin{cases} y_1'(t) & = f(t, y_1(t)) \forall t \in J_1 \\ y_1(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2'(t) & = f(t, y_2(t)) \forall t \in J_2 \\ y_2(t_2) & = y_1(t_2) \end{cases}$$

Alors le couple (J, y) défini par $J = [t_1, t_4]$ et $y(t) = y_1(t)$ sur $[t_1, t_2]$ et $y(t) = y_2(t)$ sur $[t_2, t_4]$ est une solution locale qui prolonge $([t_1, t_2], y_1)$.

Lemme 2.0.1
Si f est C^k sur $I \times D$, toute solution locale (J, y) est de classe C^{k+1} sur J.

Démonstration. Par récurrence sur k en utilisant l'équation différentielle. ■

2.1.2 Exemples

1. $$\begin{cases} y'(t) & = -2ty^2(t) \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

   a pour solution globale $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.

2. $$\begin{cases} y'(t) & = 2ty^2(t) \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

   et là, on n'a qu'une solution maximale non globale sur $]-1, 1[$: $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$.

3. $$\begin{cases} y'(t) & = -y^2(t) \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

   Ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur $]-1, +\infty[$.

4. $$\begin{cases} y'(t) & = -y^2(t) \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

   Ce problème a une unique solution globale $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur $\mathbb{R}^+$.

5. $$\begin{cases} y'(t) & = y^2(t) \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

   a une unique solution maximale $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ sur $]-\infty, 1[$.

Remarque 2.3 *Le temps d'existence de la solution ne dépend pas de manière continue de f :*

$$\begin{cases} y'(t) & = y^2(t) - \varepsilon y^3(t) \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

admet une unique solution sur un intervalle $]-T_\varepsilon, +\infty[$ avec $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon = +\infty$ alors que pour $\varepsilon = 0$, la solution est définie sur $]-\infty, 1[$.

Remarque 2.4 *Si f est peu régulière, on peut perdre l'unicité de la solution.*

$$\begin{cases} y'(t) & = 2\sqrt{|y(t)|}(1 + y(t)) \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ y(0) & = 0 \end{cases}$$

Les solutions maximales sont en fait pour tout $a \geqslant 0$, $y_a = 0$ sur $[0, a]$ et $\tan^2(\cdot - a)$ sur $[a, a + \frac{\pi}{2}]$. On en a une infinité.

2.1.3 Le lemme de Gronwall

Lemme 2.0.2
Soit $t_0 \in I$, $u, f, g \in C^0(I, \mathbb{R}^+)$ telles que pour tout $t \in I$,

$$u(t) \leqslant f(t) + \left| \int_{t_0}^{t} u(s) g(s) \,\mathrm{d}s \right|$$

Alors, pour tout $t \in I$,

$$u(t) \leqslant f(t) + \left| \int_{t_0}^{t} f(s) g(s) \exp\left(\left| \int_{s}^{t} g(r) \,\mathrm{d}r \right| \right) \right|$$

Démonstration. On pose $Y(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} g(s)u(s)\,\mathrm{d}s$.

- Cas $t \geqslant t_0$.
  $Y(t_0) = 0$ et $Y'(t) = g(t)u(t) \leqslant f(t)g(t) + g(t)Y(t)$.
  On calcule

$$\begin{aligned}(y(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s})' &= (Y'(t) - Y(t)g(t))\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s} \\ &\leqslant f(t)g(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s}\end{aligned}$$

  On a donc, en intégrant entre t_0 et t,

$$Y(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s} \leqslant \int_{t_0}^{t} f(s)g(s)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{s} g(r)\,\mathrm{d}r}$$

  D'où le résultat, en remarquant que $u(t) \leqslant f(t) - Y(t)$.
- Cas $t \leqslant t_0$.
  C'est pareil. ■

Corollaire 2.1 *Dans le cas $f = c \geqslant 0$ et sous les hypothèses précédentes, on a pour tout $t \in I$,*

$$u(t) \leqslant c\mathrm{e}^{\left|\int_{t_0}^{t} g(r)\,\mathrm{d}r\right|}$$

Démonstration. On s'occupe du cas $t \geqslant t_0$, l'autre étant similaire.

On remarque que :

$$g(s)\mathrm{e}^{\left|\int_{s}^{t} g(r)\,\mathrm{d}r\right|} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\exp\left(\int_{s}^{t} g(r)\,\mathrm{d}r\right)\right)$$

Donc on a le résultat.en réinjectant et intégrant la dérivée qu'on vient de faire apparaître. ■

Remarque 2.5 Dans le cas $f = 0$, on a $u(t) \leqslant 0$ donc $u = 0$.

Corollaire 2.2 *Sous les mêmes hypothèses mais avec $f = c_1$ et $g = c_2$, on a*

$$u(t) \leqslant c_1\mathrm{e}^{c_2|t-t_0|}$$

2.2 Le cas lipschitzien

On se place dans un Banach E. Soit D un ouvert connexe non vide de E, I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Soit $f : I \times D \to E$.

Définition 2.6

- On dit que f est lipschitzienne par rapport à x ssi il existe $L \geqslant 0$ telle que pour tout $x_1, x_2 \in D$, et pour tout $t \in I$,

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\|_E \leqslant L \|x_1 - x_2\|_E$$

- On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à x ssi pour tout $(t_0, x_0) \in I \times D$, il existe un voisinage V de $(t_0, x_0$ et une constante $L(t_0, x_0)$ tels que f soit lipschitzienne sur V de constante $L(t_0, x_0)$.

Remarque 2.6

- exp *est localement lipschitzienne mais pas globalement.*
- *Une application lipschitzienne est continue.*
- *Une fonction globalement lipschitzienne l'est localement.*
- *Une fonction C^1 est localement lipschitzienne.*

2.2.1 Solution globale

<u>Théorème 2.1</u> de Cauchy-Lipschitz *On suppose $D = E$ et $f \in C^0(I \times E)$ globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.*

Pour toute condition initiale y_0, le problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ possède une unique solution globale sur E.

De plus, toute solution locale est une restriction d'icelle.

Démonstration. On va utiliser le théorème du point fixe.

- Dans le cas où I est fermé borné $[a,b]$, $(C^0(I,E), \|\cdot\|_\infty)$ est de Banach. On utilise la norme équivalente $\|y\| = \max\limits_{t \in I} \mathrm{e}^{-2L|t-t_0|} \|y(t)\|_E$.

  On pose :

$$T : \begin{cases} C^0(I,E) & \to \quad C^0(I,E) \\ y & \mapsto \quad y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \end{cases}$$

  T est bien définie, continue.

  Soit $t \geqslant t_0$. Pour $y_1, y_2 \in C^0(I,E)$,

$$\begin{aligned} \|Ty_1(t) - Ty_2(t)\|_E &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\,\mathrm{d}s \right\|_E \\ &\leqslant \int_{t_0}^t L \|y_1(s) - y_2(s)\|_E \,\mathrm{d}s \\ &\leqslant L \|y_1 - y_2\| \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{2L|s-t_0|}\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{\mathrm{e}^{2L|t-t_0|}}{2} \|y_1 - y_2\| \end{aligned}$$

On a la même chose pour $t \leqslant t_0$. On obtient $\|Ty_1 - Ty_2\| \leqslant \frac{\|y_1-y_2\|}{2}$. Donc T est contractante. Elle a donc un point fixe.

- Cas où I n'est pas fermé borné.
  On écrit $]a,b[= \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[a + \dfrac{1}{n+1}, b - \dfrac{1}{n+1}\right]$.
  Si $a = -\infty$, $]-\infty, b[= \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[-n, b - \dfrac{1}{n+1}\right]$. Si $b = +\infty$, c'est pareil.
  Soit y_n la solution sur I_n. Par unicité, $y_{n+1}|_{I_n} = y_n$.
  On définit y comme l'application qui) $t \in I_n$ associe $y_n(t)$. D'où le résultat.
  Soit de plus $(\widetilde{y}, \widetilde{I})$ une autre solution. On a $\widetilde{I} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\widetilde{I} \cap I_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \widetilde{I}_n$.
  Pour tout n, $\widetilde{y}$ et y coïncident sur $\widetilde{I}_n$ donc sur $\widetilde{I}$.

■

Proposition 2.2 Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, soient y_1 et y_2 deux solutions de $y'(t) = f(t, y(t))$ sur I.

Alors, pour tout $t \in I$, $\|y_1(t) - y_2(t)\|_E \leqslant \mathrm{e}^{L|t_0 - t|} \|y_1(t_0) - y_2(t_0)\|_E$.

Proposition 2.3 Soient y_1, y_2 deux solutions de $y'(t) = f(t, y(t))$ avec f lipschitzienne. Pour tout $t \in I$,

$$\|y_1(t) - y_2(t)\|_E \leqslant \mathrm{e}^{L|t-t_0|} \|y_1(t_0) - y_2(t_0)\|_E$$

Démonstration. $y_1(t) = y_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s))\,\mathrm{d}s$ et

$$y_2(t) = y_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y_2(s))\,\mathrm{d}s$$

En soustrayant,

$$y_1(t) - y_2(t) = y_1(t_0) - y_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)))\,\mathrm{d}s$$

Donc :

$$\|y_1(t) - y_2(t)\|_E \leqslant \|y_1(t_0) - y_2(t_0)\|_E + \left| \int_{t_0}^{t} L \|y_1(s) - y_2(s)\|_E \,\mathrm{d}s \right|$$

Et on applique le lemme de Gronwall. ■

Remarque 2.7 On retrouve donc l'unicité de Cauchy-Lipschitz : si (y, I) est une solution globale et $(\widetilde{y}, \widetilde{I})$ une solution locale, la proposition précédent implique que $\|y(t) - \widetilde{y}(t)\|_E \leqslant 0$ sur $\widetilde{I}$.

2.2.2 Existence locale

On prend toujours I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et D un ouvert connexe de E.

<u>Théorème 2.2</u> (Théorème d'existence locale) *Soit $f \in C^0(I\times D, E)$ et η, r,M et L tels que :*

- $V_0 = [t_0-\eta, t_0+\eta] \times B(y_0, r) \subset I \times D$
- $\forall (t,y) \in V,\ \|f(t,y)\|_E \leqslant M$
- $\forall (t,y_1) \in V, (t,y_2) \in V,\ \|f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))\|_E \leqslant L\,\|y_1-y_2\|$.

Alors, il existe (y,J) une solution locale avec $J = [t_0-\eta', t_0+\eta']$ avec $\eta' = \min(\eta, \frac{r}{2M})$.

Démonstration. Soit $h \in C^1(\mathbb{R}^+)$ une fonction telle que $h|_{[0,\frac{1}{2}]} = 1$, $h|_{[1,+\infty[} = 0$ et $|h_{[\frac{1}{2},1]}| \leqslant 1$.

On définit $F(t,y)$ par 0 si $(t,y) \in [t_0-\eta, t_0+\eta] \times (E \setminus B(y_0,r))$ et $h(\frac{\|y-y_0\|}{r}) f(t,y)$ si $(t,y) \in [t_0-\eta, t_0+\eta] \times B(y_0,r)$.

On peut vérifier que F est globalement lipschitzienne sur $[t_0-\eta, t_0+\eta]\times E$.

Par Cauchy-Lipschitz, le problème $y'(t) = F(t,y(t))$ avec $y(t_0) = y_0$ admet une unique solution globale.

Par construction de h, $\|F(t,y)\|_E \leqslant M$.

Comme $y(t) = y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^t F(s,y(s))\,\mathrm{d}s$, on a, pour $t \in [t_0-\widetilde{\eta}, t_0+\widetilde{\eta}]$,

$$\|y(t)-y(t_0)\|_E \leqslant M|t-t_0| \leqslant \frac{r}{2}$$

Comme $F(t,y) = f(t,y)$ sur $[t_0-\widetilde{\eta}, t_0+\widetilde{\eta}]$, on obtient que $(y, [t_0-\widetilde{\eta}, t_0+\widetilde{\eta}])$ est une solution locale. ■

Remarque 2.8 Si f est localement lipschitzienne sur $I \times D$, alors les hypothèses du théorème sont vérifiées.

2.2.3 Unicité locale

On prend $f \in C^0(I \times D, E)$.

Lemme 2.2.1
Soit f localement lipschitzienne par rapport à x, $J \subset I$ compact non vide, $K \subset D$ compact non vide.

Alors f est globalement lipschitzienne par rapport à x sur $J \times K$.

Démonstration. Soit $M = \max\limits_{(t,x)\in J\times K} \|f(t,x)\|_E$

Pour tout $(t, s) \in J \times K$, il existe $L(t, x)$ et un voisinage $U_t \times V_x$ de (t, x) dans $J \times D$ tel que pour tout $(s, y_1) \in U_t \times V_x$ et $(s, y_2) \in U_t \times V_x$,

$$\|f(s, y_1) - f(s, y_2)\|_E \leqslant L(t, x) \|y_1 - y_2\|_E$$

On peut suppose que U_t est un intervalle ouvert et $V_x = B(x, \frac{r(x)}{2})$.

On a $J \times K \subset \bigcup_{(t,x) \in J \times K} (U_t \times V_x)$ donc par compacité,

$$J \times K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(U_{t_i} \times B\left(x_i, \frac{r(x_i)}{2}\right)\right)$$

On pose alors $L = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} L(t_i, x_i)$ et $r = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} r(x_i)$.

Soient (t, x_1) et $(t, x_2) \in J \times K$.

Il existe i_0 tel que $(t, x_1) \in U_{t_{i_0}} \times B(x_{i_0}, \frac{r(x_{i_0})}{2})$.

- Si $\|x_1 - x_2\|_E \leqslant \frac{r}{2}$ alors $x_2 \in B(x_{i_0}, r(x_{i_0}))$.
  On a alors $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_E \leqslant L \|x_1 - x_2\|_E$.
- Sinon,
$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_E \leqslant 2M \leqslant \frac{4M}{r} \|x_1 - x_2\|_E$$

f est donc globalement lipschitzienne par rapport à x sur $J \times K$ avec la constante $L_0 = \max(L, \frac{4M}{r})$. ■

Théorème 2.3 (Unicité locale) *Soit $f \in C^0(I \times D, E)$ localement lipschitzienne pas rapport à x.*

Soit (y_1, J_1) et (y_2, J_2) deux solutions locales. Alors $y_1 = y_2$ sur $J_1 \cap J_2$.

Démonstration. Soit $J \subset J_1 \cap J_2$ compact non vide.

$K = y_1(J) \cup y_2(J)$ est compact donc par le lemme, f est lipschitzienne sur $J \times K$.

On en déduit $y_1 = y_2$ sur J en utilisant

$$\|y_1(t) - y_2(t)\|_E \leqslant \mathrm{e}^{L|t-t_0|} \|y_1(t_0) - y_2(t_0)\|_E$$

Comme $J_1 \cap J_2$ est l'union des compacts qu'il contient, on a l'unicité sur $J_1 \cap J_2$. ■

Corollaire 2.3 *Sous les hypothèses du théorème d'unicité, si on a deux solutions qui coïncident en un point, alors elles coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer les théorèmes précédents. ■

2.2.4 Solutions maximales

COROLLAIRE 2.4 (EXISTENCE D'UNE UNIQUE SOLUTION MAXIMALE) *Soit $f \in C^0(I \times D, E)$ localement lipschitzienne par rapport à x. Il existe une unique solution maximale (y, J) au problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$ avec $y(t_0) = y_0$.*

De plus, J est ouvert dans I et toute solution locale de P est une restriction de (y, J).

Démonstration. Posons $t^+ = \sup\{t', \text{il existe une solution sur } [t_0, t']\}$ et $t^- = \inf\{t', \text{il existe une solution sur } [t', t_0]\}$.

On définit une solution y sur $]t^-, t^+[$ en recollant les morceaux, ce qui est possible par le théorème d'unicité locale.

Il reste à montrer que y est maximale.

Supposons que t^+ soit dans l'intérieur de I et que y se prolonge en t^+ alors on peut résoudre le problème de Cauchy $z'(t) = f(t, z(t))$ avec $z(t^+) = y(t^+)$.

Il existe alors une solution sur $[t_0, t^+ + \varepsilon]$ en recollant y et z. D'où une contradiction.

De même en t^-. Donc c'est fini. ∎

2.2.5 Retour sur Lotka-Volterra

$f\left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x(a - by) \\ y(dx - c) \end{pmatrix}$ est C^1 donc il y a une unique solution maximale sur un intervalle $J_{(x_0, y_0)}$.

Quand $y_0 = 0$, on a la solution $(x(t), y(t)) = (x_0 e^{at}, 0)$ et quand $x_0 = 0$, on a $(x(t), y(t)) = (0, y_0 e^{-ct})$.

Par Cauchy-Lipschitz, si deux solutions sont égales en un point, alors elles coïncident partout sur leur ensemble de définition.

Donc, si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, la courbe solution ne rencontre pas $\{0\} \times]0, +\infty[$ ni $]0, +\infty[\times \{0\}$. Donc par le TVI, $x > 0$ et $y > 0$.

2.3 Explosion de la solution maximale

Sous les hypothèses de Cauchy-Lispchitz, soit (J, y) la solution maximale du problème de Cauchy (P).

On sait que J est ouvert : $J =]T^-, T^+[$. Si $T^+ < \sup I$ ou $T^- > \sup I$ la solution maximale explose au voisinage de T^+ et T^-.

THÉORÈME 2.4 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, D un ouvert connexe de E et $f : I \times D \to E$. continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.*

Soit $(]T^-, T^+[, y)$ *la solution maximale du problème* P.

Si $T^+ < \sup I$ *alors pour tout compact* $K \subset D$, *il existe* $T_K \in]T^-, T^+[$ *tel que* $y(T_K) \notin K$.

Démonstration. Par l'absurde : s'il existe un compact K et une suite croissante $(t_n)_n$ qui converge vers T^+ et telle que $y(t_n) \in K$ pour tout n.

$(y(t_n))_n$ est à valeurs dans K donc elle possède une sous-suite qui converge vers $y_+ \in K$.

Il existe $\eta, r, M, L > 0$ tel que $V =]T^+ - \eta, T^+ + \eta[\times B(y_+, r) \subset I \times D$, $\|f(t,x)\| \leqslant M$ sur V et $\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leqslant L\,\|x_1 - x_2\|$ sur V.

On pose $\eta' = \min(\eta, \frac{r}{2M})$.

Soit $n \geqslant 0$ tel que $|T^+ - t_n| < \frac{\eta'}{3}$ et $\|y(t_n) - y_+\| < \frac{r}{2}$.

On a alors $V' = [t_n - \frac{\eta}{2}, t_n + \frac{\eta}{2}] \times B(y(t_n), \frac{r}{2}) \subset I \times D$, $\|f(t,x)\| \leqslant M$ sur V' et $\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leqslant L\,\|x_1 - x_2\|$ sur V'.

On applique Cauchy-Lipschitz local au problème $\widetilde{y}'(t) = f(t, \widetilde{y}(t))$ avec $\widetilde{y}(t_n) = y(t_n)$.

Il existe une unique solution locale $([t_n - \alpha, t_n + \alpha], \widetilde{y})$ avec

$$\alpha = \min(\frac{\eta}{2}, \frac{r}{4M}) = \frac{\eta'}{2}$$

En particulier, $t_n + \alpha \geqslant T^+ - \frac{\eta'}{3} + \frac{\eta'}{2} > T^+$.

On obtient un prolongement z de y à $]T^-, t_n + \alpha[\supsetneq]T^-, T^+[$ donc le couple $(]T^-, T^+[, y)$ n'est pas solution maximale. ■

Corollaire 2.5 *Si* $D = E = \mathbb{R}^n$, *avec les hypothèses de Cauchy-Lipschitz.*

Soit $(]T^-, T^+[, y)$ *la solution maximale du problème* P.

Si $T^+ < \sup I$ *alors* $\lim\limits_{t \to T^+} \|y(t)\|_E = +\infty$.

Démonstration. On prend $K = B(0, R)$. Par le théorème, il existe $T_R \in]T^-, T^+[$ tel que $\|y(t)\| \geqslant R$ pour tout $t \in]T_R, T^+[$.

D'où le résultat. ■

Remarque 2.9 C'est faux en général en dimension infinie.

Définition 2.7 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne. On dit que l'équation dfférentielle $x' = f(x)$ possède une fonction de Lyapunov ssi il existe $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V(x), f(x) \rangle \leqslant 0$.

Théorème 2.5 *Si* $x' = f(x)$ *possède une fonction de Lyapunov et si pour tout* R, $\{x \in \mathbb{R}^n, V(x) \leqslant R\}$ *est borné alors la solution maximale du problème de Cauchy est globale ie* $T^+ = +\infty$.

Démonstration. Soit $(]T^-,T^+[,y)$ la solution maximale.

$$\frac{\mathrm{d}V(y(t))}{\mathrm{d}t}=\langle\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(y(t)),y'(t)\rangle=\langle\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(y(t)),f(y(t))\rangle\leqslant 0$$

Ainsi, pour tout $t\in]t_0,T^+[$, $V(y(t))\leqslant V(y(t_0))$.

On a donc pour tout $t\in]t_0,T^+[$, $y(t)\in\{x\in\mathbb{R}^n,V(x)\leqslant V(y(t_0))\}$.

Donc $\|y(t)\|$ est bornée au voisinage de T^+. Donc y n'explose pas en T^+ et $T^+=+\infty$. ■

Exemples :

- $x'(t)=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(x(t))$, $x(t_0)=x_0$ avec $V\in C^1$ et tel que $\{x,V(x)\leqslant R\}$ borné.
  V est une fonction de Lyapunov pour ce système donc $T^+=+\infty$.
- Système hamiltonien : $p'=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,H(p,q)$ et $q'=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,H(p,q)$.
  L'énergie d'un système hamiltonien est conservée.
  Donc si $\{(p,q),H(p,q)<R\}$ est borné pour tout R, alors H est une fonction de Lyapunov et la solution maximale est globale.
- Il existe une fonction de Lyapunov pour le système de Lotka-Volterra.

<u>Théorème 2.6</u> (Explosion en dimension finie avec $D\neq E$) *Soit (J,y) la solution maximale du problème de Cauchy P.*

On a l'alternative suivante pour $J=]T^-,T^+[$:

- $T^+=\sup I$
- $\lim\limits_{t\to T^+}\|y(t)\|=+\infty$
- $\lim\limits_{t\to T^+}d(y(t),\partial D)=0$

Remarque 2.10 On a la même chose en T^-.

Démonstration. On suppose $t^+<\sup I$.

Pour $\varepsilon>0$, on pose $K_\varepsilon=\{x\in D,d(x,\partial D)\geqslant\varepsilon\}\cap\overline{B}(0,\frac{1}{\varepsilon})$.

On a montré que y sort du compact K à partir d'un certain temps.

Si y est bornée, il existe $T\in]t^-,t^+[$ tel que pour tout $t\in[T,t^+[$, $y(t)\notin K_\varepsilon$ et $y\in\overline{B}(0,\frac{1}{\varepsilon})$ pour ε assez petit.

Donc pour tout $\varepsilon>0$, il existe T tel que pour tout $t\in[T,t^+[$,

$$d(y(t),\partial D)\leqslant\varepsilon$$

Sinon, si elle ne tend pas vers $+\infty$ en t^+, alors il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout n, il existe t_n tel que :

$$t^+-\frac{1}{n}<t_n<t^+\text{ et }\|y(t_n)\|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$$

On pose $\eta=\frac{1}{2}\min(\sup I-t^+,t^+-\inf I)$.

Pour n assez grand, $[t_n - \eta, t_n + \eta] \subset I$ et $t_n \in [t^+ - \eta, t^+ + \eta]$.

Il existe donc une solution locale au problème de Cauchy $z'(t) = f(t, z(t))$ avec $z(t_n) = y(t_n)$ définie sur l'intervalle $[t_n - \eta', t_n + \eta']$ avec $\eta' = \min(\eta, \frac{1}{2M})$ et $M = \sup\{\|f(t,x)\|, x \in [t^+ - \eta, t^+ + \eta] * K_{\frac{1}{\varepsilon+1}}$.

Pour n assez grand, $t_n + \eta' > t^+$ donc contradiction. ■

Exemple : Si f vérifie $\|f(t, y(t))\| \leqslant \alpha(t) \|y(t)\| + \beta(t)$ avec α et β positives intégrables sur tout compact.

Toute solution maximale du problème de Cauchy associé à f est globale (On majore y brutalement avec Gronwall et on la trouve bornée).

Corollaire 2.6 *Si f vérifie $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L(t) \|x - y\|$ avec L intgrable sur tout compact, alors la solution maximale du problème de Cauchy associé est globale.*

2.4 Continuité par rapport aux paramètres

Cas globalement lipschitzien

Soit f continue et globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

On note $y(t, y_0)$ une solution du problème de Cauchy associé à f avec $y(t_0) = y_0$. Par Cauchy-Lispchitz, il existe une uique solution maximale qui est de plus globale.

Proposition 2.4 Pour tout segment $J \subset i$, l'application $y_0 \mapsto y(\cdot, y_0)$ est continue et pour tout $y_0, y_0' \in E$, on a :

$$\forall t \in J, \|y(t, y_0) - y(t, y_0')\| \leqslant \mathrm{e}^{L|t-t_0|} \|y_0 - y_0'\|$$

Démonstration. Soit $J \subset I$ un segment.

Pour $t \in J$, $y(t, y_0) = y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s$.

Donc :

$$\|y(t, y_0) - y(t, y_0')\| \leqslant \|y_0 - y_0'\| + L \int_{t_0}^{t} \|y(s, y_0) - y(s, y_0')\|\,\mathrm{d}s$$

Et on conclut par Gronwall. ■

Proposition 2.5 L'application $(t, y_0) \mapsto y(t, y_0)$ est continue.

Démonstration. Soient $t_1, t_2 \in J$ segment.

$$\begin{aligned}
&\|y(t_1, y_0) - y(t_2, y_0')\| \leqslant \|y(t_1, y_0) - y(t_2, y_0)\| + \|y(t_2, y_0') - y(t_2, y_0')\| \\
&\leqslant \|y_0 - y_0'\| + L\int_{t_0}^{t_2} \|y(s, y_0) - y(s, y_0')\| \,\mathrm{d}s + \sup y'|t_2 - t_1| \\
&\leqslant \|y_0 - y_0'\| + \sup y'|t_2 - t_1| + \mathrm{e}^{L(b-a)}\|y_0 - y_0'\|(t_2 - t_0)
\end{aligned}$$

■

Cas localement lipschitzien

Proposition 2.6 Soit $f : I \times D \to E$ continue localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.

Pour tout $y_0 \in D$, il existe un voisinage V de y_0 dans D et $\eta > 0$ tel que pour tout $y_0' \in V$, il existe une unique solution sur $I_\eta = [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$, et de plus, $y_0' \mapsto y(\cdot, y_0')$ est continue sur V.

Démonstration. On applique le théorème de Cauchy-Lipschitz local.

Pour $y_0' \in B(y_0, \frac{r}{2})$, on a vu qu'il existe une unique solution locale J', y' sur $J' = [t_0 - \eta', t_0 + \eta']$ avec $\eta' = \min(\eta, \frac{r}{4M})$.

De plus, on a pour $|t - t_0| \leqslant \eta'$, $\|y'(t) - y_0'\| \leqslant \frac{r}{4}$ et de plus y' coïncide avec la restriction de la solution du problème.

On pose $V = B(y_0, \frac{r}{4})$. pour $y_0' \in V$, $V \subset B(y_0', \frac{r}{2}) \subset B(y_0, r)$.

Puisque $B(y_0', \frac{r}{4}) \subset B(y_0, \frac{r}{2})$, pour tout $t \in I_{\eta'}$, $y_0' \in V$ et $y(t, y_0')$ est la restriction de solutions globales de l'équation $y'(t) = F(t, y(t))$.

Pour conclure, on applique le résultat de continuité par rapport à y_0 dans le cas lipschitzien. ■

Continuité par rapport à un paramètre

<u>Définition 2.8</u> On considère le problème de Cauchy à paramètre :

$$\begin{cases} y_\lambda'(t) & = f(t, y(t), \lambda) \\ y_\lambda(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

On se ramène à un problème de continuité par rapport aux données initiales : on pose $x = \begin{pmatrix} y \\ \rho \end{pmatrix}$, $F(t, x) = \begin{pmatrix} f(t, y, \rho) \\ 0 \end{pmatrix}$ et $x_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$.

On considère le problème de Cauchy augmenté $x'(t) = F(t, x(t))$ et $x(t_0) = x_0$.

La dernière équation différentielle du système est $\rho'(t) = 0$ sa solution est $\rho =$Cste$= \lambda$.

Proposition 2.7 Si $f : I \times E \times F \to E$ est continue et globalement lipschitzienne par rapport à y et λ alors $\lambda \mapsto y_\lambda$ est continue pour tout segment $J \subset I$.

Chapitre 3

Équations différentielles linéaires

3.1 Systèmes différentiels linéaires

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Définition 3.1 Un système d'équations différentielles est une équation différentielle du type :

$$\forall t \in I, X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

avec I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $A \in C^0(I, \mathscr{L}_c(E))$ et $B \in C^0(I, E)$.

Remarque 3.1 C'est le cas particulier $f(t, y)$ affine en y. on a la continuité de f sur $I \times E$, la lipschitzianité locale par rapport à la seconde variable avec $\|A(t)\|$ comme constante de Lipschitz.

On obtient par Cauchy-Lipchitz l'existence et l'unicité d'une solution maximale et globale sur I.

Remarque 3.2 Si $E = \mathbb{R}^d$, on peut identifier $y \in E$ avec le vecteur de ses coordonnées et A avec un arc continue de matrices $d \times d$.

Exemples :

- $$\begin{cases} y_1'(t) &= ty_1(t) + y_2(t) - 1 \\ y_2'(t) &= \cos(t)y_1(t) + \mathrm{e}^t y_2(t) \end{cases}$$

  est un système linéaire avec $A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ \cos(t) & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ et $B(t) = \binom{-1}{0}$.
- $y''(t) + q(t)y(t) = 0$ se ramène à une équation différentielle d'ordre 1 via les méthodes habituelles ($Y(t) = \binom{y(t)}{y'(t)}$). Par Cauchy-Lipschitz, si

on ajoute une condition sur $Y(0)$ (ie sur $y(0)$ et $y'(0)$) alors on a une unique solution maximale globale.

3.1.1 Formule intégrale et résolvante

Systèmes homogènes

<u>Théorème 3.1</u> *L'ensemble des solutions avec $b = 0$ est un espace vectoriel de $C^1(I, E)$ de dimension finie égale à $\dim(E)$.*

Plus précisément, si $t \mapsto y(t, t_0, y_0)$ est la solution pour $y(t_0) = y_0$, alors l'application :

$$\varphi_{t_0} : \begin{cases} E & \to & V \\ y_0 & \mapsto & y(\cdot, t_0, y_0) \end{cases}$$

est un isomorphisme (continu).

Démonstration. Par Cauchy-Lipschitz, φ_{t_0} est bien définie.

La linéarité est claire (il suffit d'écrire l'équation différentielle).

La continuité en découle vu qu'on est en dimension finie.

Si $\varphi_{t_0}(y) = 0$ alors $y(\cdot, t_0, y_0) = 0$ donc $y_0 = 0$. D'où l'injectivité.

La surjectivité est débile par prise en t_0. ∎

<u>Définition 3.2</u> On appelle système fondamental de solutions une base de V.

Remarque 3.3 Le théorème est vrai pour tout t_0 donc $(y_1, \cdots, y_d)$ est un système fondamental de solutions ssi il existe $t \in I$ tel que $(y_1(t), \cdots, y_d(t))$ est une base de E.

<u>Définition 3.3</u> On considère le Wronskien défini par :

$$w(t) = \det(y_1(t), \cdots, y_d(t))$$

Proposition 3.1 Pour tout $s, t \in I$, $w(t) = w(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \mathrm{tr}(A(\sigma))\,\mathrm{d}\sigma}$.

Démonstration. Soit $Y(t)$ la matrice $(y_1(t), \cdots, y_d(t))$. On a alors $Y'(t) = A(t)Y(t)$.

Soit $l_1(t), \cdots, l_d(t)$ les lignes de $Y(t)$ et $a_{i,j}(t)$ les cœfficients de $A(t)$.

On a $w(t) = \det \begin{pmatrix} l_1(t) \\ \vdots \\ l_d(t) \end{pmatrix}$.

De plus, comme $l_i'(t) = \sum_{j=1}^{d} a_{i,j} l_j(t)$, on a :

$$\begin{aligned} w'(t) &= \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} l_1(t) \\ \vdots \\ l_j'(t) \\ \vdots \\ l_d(t) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t) \det \begin{pmatrix} l_1(t) \\ \vdots \\ l_i(t) \\ \vdots \\ l_d(t) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}(t) w(t) \\ &= \operatorname{tr}(A(t)) w(t) \end{aligned}$$

D'où le résultat. ∎

<u>**Définition 3.4**</u> On appelle matrice résolvante du système linéaire homogène l'unique solution du système différentiel $Y' = AY$ avec $Y(t_0) = I_d$.

On la note $S(t, t_0)$.

Proposition 3.2

- Pour tout t_0, t_1, t_2, $S(t, t_0) = S(t, t_1)S(t_1, t_2)$.
- Pour tout t_0, t_1, $S(t_0, t_1)$ est inversible d'inverse $S(t_1, t_0)$.
- La solution du problème de Cauchy $y' = Ay$ avec $y(t_0) = y_0$ est donnée par $S(\cdot, t_0)y_0$.

Démonstration. Soit $Y(t) = S(t, t_1)S(t_1, t_0)$.

On a $Y(t_1) = S(t_1, t_0)$ et $Y'(t) = A(t)S(t, t_1)S(t_1, t_0) = A(t)Y(t)$.

Donc $Y = S(t, t_0)$.

On prend $t = t_0$. $\mathrm{Id} = S(t_0, t_0) = S(t_0, t_1)S(t_1, t_0)$ d'où le résultat.

On vérifie $y(t_0) = y_0 = S(t_0, t_0)y_0$ donc $S(t, t_0)y_0$ est aussi solution. Par Cauchy-Lipschitz, on a le résultat. ∎

Remarque 3.4 On en déduit que $w = 0$ ou w ne s'annule jamais. De plus, si $\operatorname{tr}(A(t)) = 0$ pour tout t alors w est une intégrale première.

Systèmes non homogènes

<u>THÉORÈME 3.2</u> FORMULE DE DUHAMEL *La solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} y'(t) & = A(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

est donnée par :

$$y(t) = S(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} S(t,s)b(s)\,\mathrm{d}s$$

Démonstration. On utilise la méthode de variation de la constante : posons $y(t) = S(t,t_0)z(t)$.

On a alors :

$$z'(t) = S(t,t_0)^{-1}b(t) = S(t_0,t)b(t)$$

Donc $z(t) - z(t_0) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} S(t_0,s)b(s)\,\mathrm{d}s$.

D'où :

$$y(t) = S(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} S(t,s)b(s)\,\mathrm{d}s$$

■

3.1.2 Systèmes à cœfficients constants

<u>THÉORÈME 3.3</u> *On a $S(t,t_0) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}$.*

Les solutions du système $y' = Ay$ et $y(t_0) = y_0$ s'écrivent $y(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}y_0$.

La formule de Duhamel devient :

$$y(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t}^{t_0} \mathrm{e}^{(t-s)A}b(s)\,\mathrm{d}s$$

<u>THÉORÈME 3.4</u> *Soit $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$. $\chi_a = (-1)^d \displaystyle\prod_{j=1}^{l} (X-\lambda_j)^{m_j}$.*

Pour tout j, il existe m_j solutions indépendantes de la forme $y_{j,k} = \mathrm{e}^{t\lambda_j}p_{j,k}(t)$ avec $p_{j,k}$ un polynôme de degré inférieur à $k-1$.

Ceci donne un système fondamental de solutions.

Démonstration. Via la décomposition de Jordan, l'équation différentielle se découple en r systèmes indépendants qui possèdent une solution de la forme :

$$\mathrm{e}^{t\lambda_d} \sum_{n=0}^{d_q-k} \frac{t^n}{n!} z_{q,k+n}, \qquad q \in [\![1,r]\!], k \in [\![0,d_s]\!]$$

■

Proposition 3.3 Soit $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ de spectre $\lambda_k = a_k + ib_k$.

Alors il existe un système fondamental de solutions de la forme :

$$t \mapsto t^r \mathrm{e}^{ta_j} \cos(b_j t) \text{ et } t \mapsto t^r \mathrm{e}^{ta_j} \sin(b_j t)$$

3.1.3 Groupe à un paramètre

<u>Définition 3.5</u> On appelle groupe à un paramètre un difféomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$.

Proposition 3.4 Les groupes à un paramètres sont les $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ avec $A \in \mathfrak{M}_n$.

Démonstration. C'en sont clairement.

De plus, si B en est un, alors $B'(t) = B'(0)B(t)$ donc $B(t) = \mathrm{e}^{tA}$ avec $A = B'(0)$. ■

Exemples :

- $A = I_n$: C'est le groupe des homothéties à rapport strictement positifs
- $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ce sont les matrices de SO_2

3.1.4 Équations différentielles d'ordre supérieur

Existence et unicité de la solution

Toute équation différentielle linéaire d'ordre n :

$$z^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) z^{(i)}(t) = g(t)$$

avec $a_j \in C^0(I)$, $g \in C^0(I)$ peut se ramener à un système d'ordre 1 :

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \text{ avec } y = \begin{pmatrix} z \\ z' \\ \vdots \\ z^{(n)} \end{pmatrix}$$

et A la matrice compagnon de $X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) X^i$ et

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Par Cauchy-Lipschitz, pour toute condition initiale, il existe une unique solution.

<u>THÉORÈME 3.5</u> *Si $g = 0$, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension n de $C^n(I)$. De plus,*

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to \quad C^n(I) \\ (z_0, \cdots, z_{n-1}) & \mapsto \quad z(t, z_0, \cdots, z_{n-1}) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Si $g \neq 0$, l'espace des solution est un espace affine $y + V$ de dimension n de C^n avec y une solution particulière.

Wronskien

<u>Définition 3.6</u> Soit $z_1, \cdots, z_n$ un système fondamental de solutions avec $g = 0$. On appelle matrice wronskienne de $z_1, \cdots, z_n$ la matrice :

$$W(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) & \cdots & z_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{(n-1)} & \cdots & z_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Proposition 3.5 On a par la formule de Liouville :

$$w(t) = w(s) \exp\left(-\int_s^t a_{n-1}(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

Remarque 3.5 *Si $a_{n-1} = 0$, alors le wronskien est constant. On sit que le système conserve le volume.*

Calcul des solutions dans le cas a_i constants

Proposition 3.6 Si λ est racine de χ_A de multiplicité m, alors les fonctions $z_r(t) = t^r \mathrm{e}^{\lambda t}$ avec $r \in [\![0, m-1]\!]$ sont des solutions indépendantes avec $g = 0$.

Démonstration. On cherche les solutions sous la forme $z(t) = Q(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$ avec λ une racine de multiplicité m de χ_A et Q de degré inférieur à $m - 1$.

Par Leibniz,

$$z^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k} Q^{(j)}(t)(\mathrm{e}^{\lambda t})^{(k-j)}$$

On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^{(k)}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n-1} Q^{(j)}(t) P^{(j)}(\lambda) = 0$.

De plus, les solutions sont bien indépendantes car si $\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i z_i(t) = 0$ alors $\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i t^i = 0$.

D'où $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$ ■

Proposition 3.7 Sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ les racines de χ_A de multiplicité $m_1, \cdots, m_k$.

On décompose $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$.

On a alors le système fondamental de solutions :

$$t \mapsto t^r \mathrm{e}^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t) \text{ et } t \mapsto t^r \mathrm{e}^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t)$$

avec $0 \leqslant r < m_j$ et $1 \leqslant j \leqslant k$.

Variation de la constante

Soit $z_1, \cdots, z_n$ un système fondamental de solutions.

On cherche une solution de la forme $z(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) z_i(t)$.

On a :

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = W^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Par la formule de Duhammel :

$$y(t) = S(t, t_0) y_0 + \int_{t_0}^{t} S(t, s) b(s) \, \mathrm{d}s$$

et comme, ici, $S(t, s) = W(t) W(s)^{-1}$, on a :

$$y(t) = W(t) W^{-1}(t_0) y_0 + \int_{t_0}^{t} W(t) W(s)^{-1} b(s) \, \mathrm{d}s$$

Donc, avec $c = W^{-1} y$, on a $c'(t) = W(t)^{-1} b(t)$.

3.2 Comportement qualitatif des solutions

3.2.1 Portraits de phase

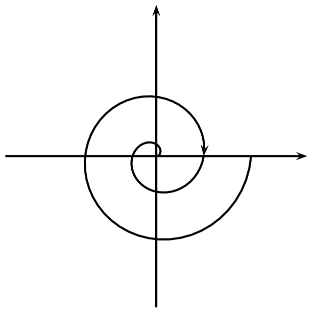
On étudie les trajectoires des solutions du système $y' = Ay$ avec $A \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. On cherche P inversible telle que $x = P^{-1} y$ soit sympathique.

$\chi_A = X^2 - (a + d)X + ad - bc$ et $\Delta = (a - d)^2 + 4bc$.

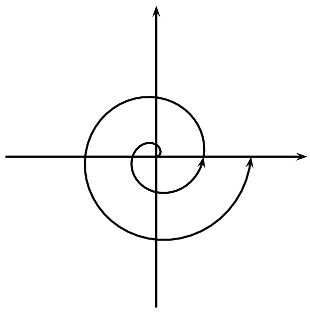
- Si $\Delta < 0$, χ_A a deux racines complexes non réelles $\alpha \pm i\beta$.
  On prend :

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{b} & 0 \\ \frac{a-d}{2b} & 1 \end{pmatrix}$$

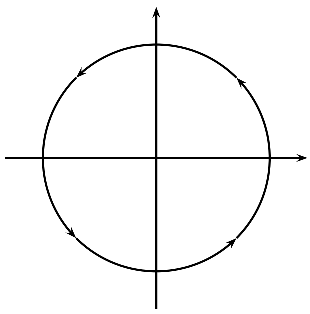
  et on obtient $x' = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} x$.
  Si $\alpha < 0$,



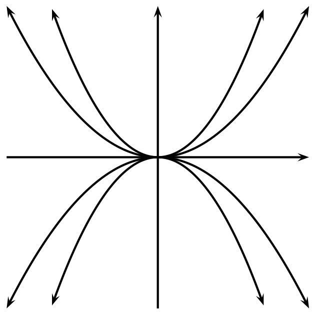
  Si $\alpha > 0$,



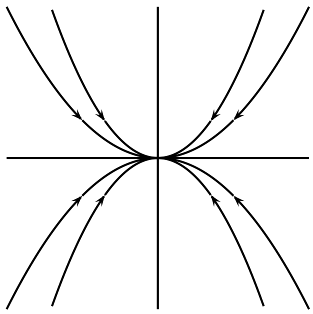
  Si $\alpha = 0$,



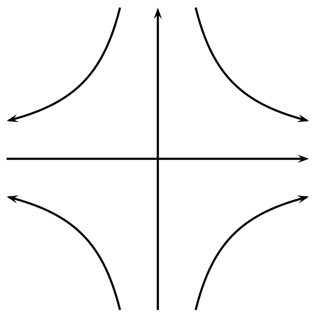
- A a deux valeurs propres réelles distinctes donc A est diagonalisable de spectre λ, μ.
  Si $\lambda > 0$ et $\mu > 0$,



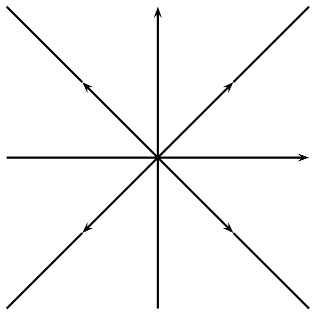
Si $\lambda < 0$ et $\mu < 0$,



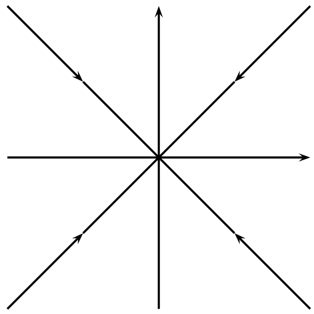
Si $\lambda > 0$, $\mu < 0$,



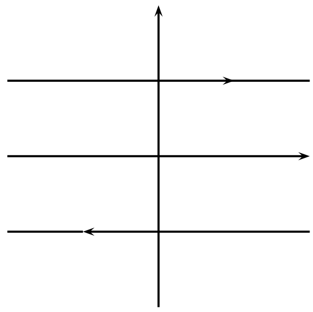
- Si $\Delta = 0$, λ est racine double donc,
  Si $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, on a, si $\lambda > 0$:



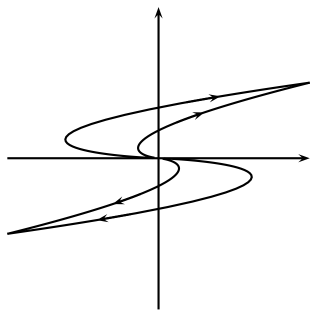
Si $\lambda < 0$,



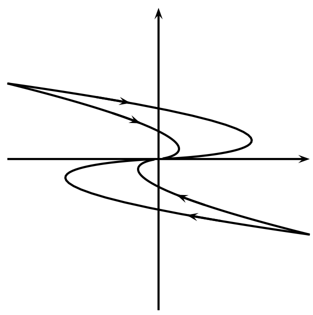
Si $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda = 0$,



Sinon, si $\lambda > 0$,



Et si $\lambda < 0$,



3.2.2 Stabilité asymptotique

<u>Théorème 3.6</u> *On considère $x' = Ax$.*

Toute solution tend vers 0 *en* $+\infty$ *ssi* $\mathrm{Sp}(A) \subset \{z, \Re(z) < 0\}$

3.2.3 Solutions bornées

<u>THÉORÈME 3.7</u> *On considère* $x' = Ax$.

Toute solution est bornée en $+\infty$ *ssi* $\mathrm{Sp}(A) \subset \{z, \Re(z) \leqslant 0\}$ *et les valeurs propres de partie réelle nulle sont de multiplicité* 1 *dans le polynôme caractéristique.*

Démonstration.

- $\Leftarrow$ On a deux méthodes : balancer l'expression des systèmes fondamentaux de solutions, ou utiliser la décomposition de Dunford.
  $A = P(D+N)P^{-1}$ avec D diagonale, N nilpotente et $DN = ND$.
  $\mathrm{e}^{tA} = P\mathrm{e}^{tD}\mathrm{e}^{tN}P^{-1}$ donc $\left\|\mathrm{e}^{tA}\right\| \leqslant \|P\| \left\|P^{-1}\right\| \left\|\mathrm{e}^{tD}\right\| \left\|\mathrm{e}^{tN}\right\|$.
  Si pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\Re(\lambda) < 0$, alors on prend $\mu = -\max \Re(\mathrm{Sp}(A))$.
  On a donc l'existence de c et c' telles que $\left\|\mathrm{e}^{tD}\right\| \leqslant c\mathrm{e}^{-\mu t}$ et $\left\|\mathrm{e}^{tN}\right\| \leqslant c' t^{d-1}$ pour t assez grand.
  Donc $\left\|\mathrm{e}^{tA}\right\| \leqslant Ct^{d-1}\mathrm{e}^{-\mu t} \to 0$.
  Donc $\|y(t)\| = \left\|\mathrm{e}^{tA}y_0\right\| \to 0$.
- $\Rightarrow$ Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ de partie réelle positive ou nulle.
  Il existe une solution de la forme $p(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$ avec p un polynôme de degré inférieur à d.
  Cette solution est non bornée ssi p est non constant ou $\lambda \neq 0$.
  Si $\lambda = 0$ et p constant, la solution converge vers une constante non nulle en général.

■

Chapitre 4

Stabilité des systèmes non linéaires

4.1 Stabilité

Définition 4.1 Soit x_0 un équilibre du système $x'(t) = f(x(t))$.

On dit que x_0 est un équilibre stable ssi pour tout voisinage de x_0, il existe un voisinage $U' \subset U$ de x_0 tel que pour tout $a \in U'$, la solution $(x(\cdot, a)$ soit définie sur $\mathbb{R}^+$ et ne sorte pas de U.

Définition 4.2 On dit que x_0 est asymptotiquement stable ssi x_0 est un équilibre stable et il existe un voisinage W de x_0 tel que pour tout $a \in W$, $x(\cdot, a)$ soit définie sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t, a) = x_0$.

Définition 4.3 On appelle système linéarisé autour de x_0 associé à $x' = f(x(t))$ le système linéaire :

$$x'(t) = f'(x_0)(x(t) - x_0)$$

4.2 Critères non linéaires de stabilité

On suppose que x_0 est un équilibre de $x' = f(x)$.

THÉORÈME 4.1 *Si x_0 est un équilibre asymptotiquement stable du linéarisé, alors x_0 est asymptotiquement stable.*

THÉORÈME 4.2 *Si $f'(x_0)$ possède une valeur propres à partie réelle strictement positive, alors x_0 n'est pas un équilibre stable de $x' = f(x(t))$.*

Remarque 4.1 Le cas difficile est $\mathrm{Sp}(f'(x_0)) \subset \{z, \Re(z) \leqslant 0\}$.

Définition 4.4 Soit x_0 un équilibre de $x' = f(x)$.

On dit que $V \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est une fonction de Lyapunov stricte ssi il existe $r > 0$ tel que :

- x_0 est un minimum strict de V sur $B(x_0, r)$
- pour tout $x \in B$, $\langle \overrightarrow{\text{grad}}\, V, f(x) \rangle \leqslant -\alpha(V(x) - V(x_0))$ avec $\alpha > 0$ fixé.

<u>Théorème 4.3</u> *Soit x_0 un équilibre de $x' = f(x)$.*

S'il existe une fonction de Lyapunov associée, alors x_0 est asymptotiquement stable pour $x' = f(x)$.

Démonstration. Quitte à remplacer f par $f(x+x_0)-f(x_0)$, on peut supposer $x_0 = 0$.

Soit $D_\eta = \{x \in B, X(x) - V(0) < \eta\}$ avec $\eta > 0$ fixé.

D_η est un ouvert non vide car 0 est un minimum strict de V sur B.

On montre que pour η assez petit, $\overline{D_\eta} \subset B$.

En effet, sinon, il existerait $(x_n)_n$ tel que $0 \leqslant V(x_n) - V(0) < \frac{1}{n}$ avec $x_n \in \partial B$.

Comme ∂B est compact, on extrait une sous-suite et on a $V(\lim\limits_{n \to +\infty} x_n) = V(0)$, ce qui contredit la strict minimalité de 0.

Soit $B' \subset \overline{D_\eta} \subset B$ avec B' une boule ouverte de centre 0.

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= a \end{cases}$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une solutions maximale x sur $[0, T^+[$.

On pose $\varphi(t) = V(x(t)) - V(0) \geqslant 0$.

En dérivant,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \overrightarrow{\text{grad}}\, V(x(t))x'(t) \\ &= \overrightarrow{\text{grad}}\, V(x(t))f(x(t)) \\ &\leqslant -\alpha(V(x(t)) - V(0)) \\ &\leqslant -\alpha\varphi(x(t)) \end{aligned}$$

avec $\alpha > 0$.

Par Gronwall, $\varphi(x(t)) \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}\varphi(x(0))$.

Donc $V(x(t)) - V(0) \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}(V(a) - V(0)) \leqslant V(a) - V(0) \leqslant \eta$.

Si $T^+ < \infty$, pour tout $t \in [0, T^+[$, $V(x(t)) - V(0) \leqslant \eta$

Donc $x(t) \in \overline{D_\eta} \subset B$ et $T^+ = +\infty$.

Quand $t \to +\infty$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} V(x(t)) = V(0)$.

Il reste à montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

Soit $(t_n)_n$ qui tend vers l'infini avec $x(t_n)$ convergente vers l.

On a alors $V(l) = V(0)$ donc $l = 0$ puisque 0 est minimum strict. On a donc $x(t) \to 0$ puisque $\overline{B}$ est compacte. ■

Remarque 4.2 Dans le cas où $V(x) = \|x\|^2$, on obtient que x_0 est asymptotiquement stable avec convergence exponentiellement rapide.

Démonstration du théorème de stabilité en première approximation. Soit x_0 un équilibre de $x'(t) = f(x(t))$.

Les valeurs propres de $f'(x_0)$ sont à partie réelle négatives strictement. On suppose $x_0 = 0$ (ce qui est licite par le même changement que tout à l'heure).

- On considère le cas où $f'(x_0)$ est diagonalisable à spectre réel.
  On se place dans une base adaptée, et on pose $V(x) = \|x\|^2$.
  0 est un minimum strict de V. Il reste à montrer que

$$\langle \overrightarrow{\text{grad}}\, V(x), f(x) \rangle \leqslant -\alpha V(x)$$

  On a supposé f C^1 donc par Taylor :

$$f(x) = f'(0)x + o(\|x\|)$$

  Donc $\langle \overrightarrow{\text{grad}}\, V(x), f(x) \rangle = \langle 2x, f'(0)x \rangle + o(\|x\|^2)$
  $f'(0)$ est représenté par $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.
  Dans ce cas, $\langle \overrightarrow{\text{grad}}\, V(x), f(x) \rangle = 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + o(\|x\|^2)$.
  Donc on a bien $\langle \overrightarrow{\text{grad}}\, V(x), f(x) \rangle \leqslant -alpha\, \|x\|^2$ pour tout $x \in B$ avec B boule ouverte de rayon suffisamment petit.
  Donc V est une fonction de Lyapunov stricte.
- On va utiliser :

  <u>THÉORÈME 4.4</u> DE LA BASE ADAPTÉE *Si une matrice A a toutes ses valeurs propres à partie réelle négative alors il existe une base telle que le produit scalaire correspondant vérifie :*

$$\langle Ax, x \rangle \leqslant -\alpha \langle x, x \rangle$$

  On refait le raisonnement précédent avec V la norme au carré associée à ce produit scalaire. ■

<u>THÉORÈME 4.5</u> CETAEV, 1934 *Soit x_0 un équilibre de $x' = f(x)$.*

On suppose qu'il existe une boule ouverte de centre x_0 et $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et Ω un ouvert tel que :

- $x_0 \in \partial\Omega$
- $V > 0$ *sur* Ω

– $V = 0$ *sur* Ω
– $\forall x \in \Omega \cap B$, $\overrightarrow{\text{grad}}\, V(x) f(x) > 0$
Alors x_0 *est instable.*

Démonstration. On va montrer que la définition de la stabilité est violée pour $a \in \Omega \cap B$ aussi proche qu'on veut de x_0.

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) & = f(x(t)) \\ x(0) & = a \in \Omega \cap B \end{cases}$$

On veut montrer que $x(t)$ ne tend pas vers x_0 en $+\infty$.

Soit x la solution de maximale sur $[0, T^+[$. On suppose par l'absurde que x_0 est stable.

On pose $\varphi(t) = V(x(t))$ en dérivant, on a $\varphi'(t) = \overrightarrow{\text{grad}}\, V(x(t)))f(x(t)) \geqslant 0$.

Ainsi $V(x(t))$ est croissante par rapport à t et on a $V(x(t)) \geqslant V(a)$ tant que $x(t) \in \Omega \cap B$.

On considère aussi $\overline{x}$ la solution maximale sur $[0, +\infty[$ qui est globale car x_0 est supposé stable.

On a donc un prolongement de x, donc comme x_0 est stable, pour $\|a - x_0\|$ assez petit, on a $\overline{x}(t) \in B$ pour $t \in [0, +\infty[$.

Montrons que $\overline{x}$ ne traverse jamais $\partial\Omega$.

On a $V(\overline{x}(t))' = \overrightarrow{\text{grad}}\, \overline{x}(t) f(\overrightarrow{\text{grad}}\, x(t)) \geqslant 0$ et $V(\overline{x(t)}) \geqslant V(a) > 0$ pour tout $t \in [0, t_0[$ avec $t_0 = \inf\{t > 0, \overline{x}(t) \in \partial\Omega\}$.

Or, sur $\partial\Omega$, $V = 0$ donc si $t_0 < \infty$, on a $0 = \lim\limits_{t \to t_0} \geqslant V(a) > 0$.

Donc $\overline{x}$ ne traverse jamais $\partial\Omega$.

Par le TVI, pour tout $t > 0$, $\overline{x}(t) \in B \cap \Omega$.

D'où $T^+ = +\infty$ et $x(t) \in B \cap \Omega$ pour tout $t > 0$.

Or $V(x(t))$ est croissante donc $V(x(t)) \geqslant V(a)$.

Soit $K = \{y \in \overline{B \cap \Omega}, V(y) \geqslant V(a)\}$ compact.

On pose $\alpha = \inf\limits_{y \in K} \overrightarrow{\text{grad}}\, V(y) f(y) > 0$ qui est atteint en $y_0 \in K$.

Si $\varphi = V \circ x$, on a $\varphi'(t) \geqslant \alpha$ et $\varphi(t) \geqslant \varphi(0) + \alpha t \to +\infty$.

Donc $V(x(t)) \to +\infty$ donc ne peut pas être borné. D'où la contradiction et l'instabilité de x_0. ■

Démonstration du théorème d'instabilité. On suppose $x_0 = 0$.

- Dans le cas $f'(0)$ diagonalisable avec spectre réel, on décompose $\mathbb{R}^d = E_+ \oplus E_-$ avec E_+ l'espace propre des valeurs propres > 0 et E_- celui des valeurs propres négatives.
  On pose $V(x) = \|x_+\|^2 - \|x_-\|^2$.
  On pose $\Omega = V^{-1}(]0, +\infty[)$. C'est un ouvert non vide.
  Il reste à trouver une boule ouverte B de centre 0 telle que, sur $\Omega \cap B$, $\langle \overrightarrow{\text{grad}}\, V(x), f(x)\rangle > 0$ avec le produit scalaire associé à une base qui diagonalise $f'(0)$.
  Donc
  $$\langle \overrightarrow{\text{grad}}\, V(x), f(x)\rangle = 2 \sum_{i \text{ tq } \lambda_i > 0} \lambda_i x_i^2 - 2 \sum_{i \text{ tq } \lambda_i \leqslant 0} \lambda_i x_i^2 + o(\|x\|^2) \geqslant 0$$
- Dans le cas général, on utilise :

  <u>Théorème 4.6</u> de base adaptée, deuxième version *Soit A une matrice. On décompose χ_A en $P_+ P_-$ associés aux valeurs propres positives ou négatives.*
  On pose $E_+ = \text{Ker}(P_+)$ et $E_- = \text{Ker}(P_-)$.
  Il existe un produit scalaire tel que $\langle Ax, x\rangle \geqslant 2\alpha\langle x, x\rangle$ pour $x \in E_+$ et $\langle Ax, x\rangle \leqslant \alpha\langle x, x\rangle$ avec $\alpha > 0$ fixé.

  On refait alors comme dans le cas précédent. ■

Remarque 4.3 Les théorèmes de base adaptée 4.4 et 4.6 se démontrent via la décomposition de Jordan.

4.3 Retour sur la stabilité des systèmes hamiltoniens

On considère le système $q' = p$ et $p' = -V'(q)$.
On a vu que l'hamiltonien $H(p, q) = \frac{p^2}{2} + V(q)$ se conserve.

Proposition 4.1 Si V est minorée, alors les solutions sont globales.

Démonstration. Soit p, q la solution maximale sur $[0, T^+[$.
On a $H(p, q) = cste$ donc
$$\frac{p^2(t)}{2} \leqslant H(p_0, q_0) - V_0$$
donc p est bornée par M donc :
$$|q(t)| = \left| q_0 + \int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s \right| \leqslant |q_0| + tM \leqslant |q_0| + T^+ M$$
Par majoration a priori, $T^+ = +\infty$. ■

4.3.1 Étude des équilibres

Proposition 4.2 (p, q) est un équilibre du système ssi $p = 0$ et $V'(q) = 0$.

Le système linéarisé s'écrit :

$$\begin{cases} q' &= p \\ p' &= -V'(q)q \end{cases}$$

Si $V''(q) < 0$, on a deux valeurs propres réelles $\pm\sqrt{-V''(q)}$ (instable).

Si $V''(q) > 0$, les valeurs propres sont imaginaires pures et on ne peut pas conclure pour l'instant.

Proposition 4.3 Soit q tel que $V'(q) = 0$.

Si $V''(q) > 0$ alors l'équilibre est stable.

Démonstration. q est un minimum local de V. Comme $H(p, q)$ est constant, $V(q) \leqslant H(p_0, q_0)$ donc on a la stabilité. ∎

Chapitre 5

Méthodes numériques

5.1 Flot exact

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) & = f(y(t)) \\ y(0) & = y_0 \end{cases}$$

avec f globalement lipschitzienne de constante L.

Définition 5.1 On appelle flot de l'équation différentielle $y'(t) = f(y(t))$ l'application $\varphi_t(y_0) = y(t, y_0)$.

Proposition 5.1 $y \mapsto \varphi_t(y)$ est bien définie.

Remarque 5.1

- $\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2}$
- $\varphi_0 = \mathrm{Id}$
- $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$

5.2 Flot numérique

Définition 5.2 On appelle flot numérique de l'équation différentielle $y' = f(y)$ une application $\Phi_h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ avec h dans un intervalle ouvert contenant 0 telle que Φ_h soit une approximation de $\varphi_h(y)$.

Exemple : La méthode d'Euler explicite $\Phi_h(y) = y + hf(y)$.

Résolution numérique du problème de Cauchy sur $[0, T]$.

On subdivise en N intervalles $[t_i, t_{i+1}]$. On définit par récurrence $y_{n+1} = \Phi_h(y_n)$ de sorte que $y(t_n) \simeq y_n$.

Exemple de méthode explicite : (Heun) $\Phi_h = y + hf(y + \frac{h}{2}f(y))$.

5.3 Ordre local et global d'approximation

Définition 5.3 On dit que le flot numérique Φ_h est d'ordre local p s'il existe $\varepsilon : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ (avec I ouvert contenant 0) telle que $\Phi_h(y) - \varphi_h(y) = h^{p+1}\varepsilon(h, y)$ et ε bornée sur les compacts.

Proposition 5.2 Si f est de classe C^2, la méthode d'Euler est d'ordre local 1.

Proposition 5.3 Si f est C^3, la méthode de Heun est d'ordre local 2.

Démonstration. On développe en série de Taylor :

$$y(h) = y(0) + hy'(0) + O(h^2)$$

Donc $\varphi_h(y) = y + hf(y) + O(h^2) = \Phi_h(y) + O(h^2)$.
Pour Heun on fait pareil. ■

Définition 5.4 On dit que $\Phi_h(y)$ est d'ordre global p ssi $|y_N - y(t_N)| \leqslant ch^p$ pour tout $h \leqslant h_0$ avec c indépendante de h.

Remarque 5.2 Pour l'ordre local p, on peut écrire :

$$|\Phi_h(y) - \varphi_h(y)| \leqslant ch^{p+1}$$

Théorème 5.1 *Si f est C^2, la méthode d'Euler est d'ordre global 1.*

Démonstration.

Lemme 5.1.1
φ_{T-t_n} est lipschitzienne de constante $\mathrm{e}^{(T-t_n)L}$.

Démonstration. Utiliser Gronwall ■

$$\begin{aligned} y_n - y(t_n) &= \Phi_h^n(y_0) - \varphi_{y_n}(y_0) \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{(n-k)h}(y_k) - \varphi_{(n-k-1)h}(y_{k+1}) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |y_n - y(t_n)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_{(n-k-1)h}(\varphi_h(y_k)) - \varphi_{(n-k-1)h}(y_{k+1})| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{(n-k-1)Lh} |\varphi_k(y_k) - y_{k+1}| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{(n-k-1)Lh} ch^2 \end{aligned}$$

On majore :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{(n-k-1)Lh} \leqslant \int_0^T \mathrm{e}^{(T-t)L}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{LT}-1}{L}$$

Donc :

$$|y_n - y(t_n)| \leqslant c\frac{\mathrm{e}^{LT}-1}{L}h$$

■

Remarque 5.3 Si f est localement lipschitzienne, on peut étendre ces résultats en travaillant sur un voisinage compact de la solution exacte.

5.4 Autres méthodes numériques

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{cases} Y_0 & = y_n \\ Y_1 & = y_n + \frac{h}{2}f(Y_0) \\ Y_2 & = y_n + \frac{h}{2}f(Y_1) \\ Y_3 & = y_n + hf(Y_2) \\ y_{n+1} & = y_n + \frac{h}{6}(f(Y_0) + 2f(Y_1) + 2f(Y_2) + f(Y_3)) \end{cases}$$

Méthode d'Euler implicite :

$$y_{n+1} == \Phi_h^{EI}(y_n) = y_n + hf(y_{n+1})$$

Proposition 5.4 Si $hL < 1$, alors cette méthode est bien définie.

Démonstration. On considère $G(Z) = y_n + hf(Z)$. $|G(Z_1) - G(Z_2)| \leqslant hL|Z_1 - Z_2|$ donc G est contractante donc possède un unique point fixe. ■

Méthode du point milieu :

$$\Phi_h^M = \Phi_{\frac{h}{2}} \circ \Phi_{\frac{h}{2}}^{EI}$$

Proposition 5.5 La méthode du point milieu conserve exactement toute intégrale première quadratique $I(y) = y^t By$ de l'équation différentielle.

Démonstration. $0 = (I(y(t)))' = 2f(y(t))^t B(y(t))$ donc pour tout y, on a $f(y)^t By = 0$.

$$\begin{aligned}
I(y_{n+1}) &= y_{n+1}^t B y_{n+1} \\
&= (y_n + hf(Y))^t B(y_n + hf(y)) \\
&= y_n^t B y_n + y_n^t B h f(Y) + hf(Y)^t B y_{n+1} \\
&= I(y) + 2hf(Y)^t B \left(\frac{y_{n+1} + y_n}{2}\right) \\
&= I(y) + 2hf(Y)^t BY \\
&= I(y)
\end{aligned}$$

∎

