

# Intégration et probabilités

Pierron Théo

ENS Ker Lann



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Théorie de la mesure</b>	<b>1</b>
1.1	Tribus	1
1.2	Tribus boréliennes	2
1.2.1	Tribu borélienne de $\mathbb{R}$	2
1.2.2	Tribu borélienne sur un espace topologique	3
1.3	Tribus complètes, complétion de mesures	3
1.3.1	Mesure positive sur $(E, \mathcal{A})$	3
1.3.2	Espaces négligeables	5
1.4	Théorème de Carathéodory	8
1.4.1	Mesures extérieures	8
1.4.2	Mesure de Lebesgue	10
1.4.3	Cas général	12
1.5	Cas $E = \mathbb{R}$	13
1.5.1	Contre-exemple au théorème si $m$ n'est pas continue à droite	13
<b>2</b>	<b>Intégration</b>	<b>15</b>
2.1	Fonctions mesurables	15
2.2	Limites de fonctions	17
2.3	Intégrale d'une fonction étagée positive	17
2.4	Extensions	19
2.4.1	Extension aux fonctions mesurables positives	19
2.4.2	Extension aux fonctions mesurables	22
2.4.3	Intégration d'une fonction à valeurs complexes	24
2.4.4	Compléments	24
2.5	Lemme de Fatou et convergence dominée	27
2.6	Intégrale de Riemann	27
2.6.1	Lien avec l'intégrale de Lebesgue	27
2.6.2	Intégrale impropre généralisée	29
2.6.3	Intégrales paramétrées	30

<b>3</b>	<b>Mesures images</b>	<b>31</b>
3.1	Tribu produit . . . . .	31
3.1.1	Définitions . . . . .	31
3.1.2	Associativité du produit de tribus . . . . .	32
3.1.3	Fonctions mesurables . . . . .	33
3.2	Produit de mesures . . . . .	34
3.2.1	Définitions . . . . .	34
3.2.2	Théorème de Fubini . . . . .	35
3.2.3	Conséquences . . . . .	36
3.3	Formule de changement de variables . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Mesures de probabilité</b>	<b>41</b>
4.1	Fonctions de répartition . . . . .	41
4.2	Mesure de Radon . . . . .	43

# Chapitre 1

## Théorie de la mesure

### 1.1 Tribus

**Définition 1.1** Un espace  $E$  est dit dénombrable ssi il est en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

**Définition 1.2** Une classe  $A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$  est dite algèbre (de Boole) ssi :

- $\emptyset \neq A$
- $a \in A \Rightarrow a^c \in A$
- $a_1, a_2 \in A \Rightarrow a_1 \cup a_2 \in A$

*Remarque 1.1*

- $A$  est stable par intersection finie
- L'intersection d'algèbres est encore une algèbre
- On peut donc parler d'algèbre engendrée par une classe de parties  $C \subset \mathcal{P}(E)$  : c'est la plus petite algèbre contenant  $C$  :  $\bigcap_{A \supset C} A$ .

**Définition 1.3** Une classe de parties  $A \subset \mathcal{P}(E)$  est dite une tribu ( $\sigma$ -algèbre de Boole) ssi :

- $\emptyset \in A$
- $a \in A \Rightarrow a^c \in A$
- $(a_i)_i \in A^{\mathbb{N}} \Rightarrow \bigcup_{i \geq 0} a_i \in A$

*Remarque 1.2*  $A$  est stable par intersection dénombrable.

Exemples :

- $\{\emptyset, E\}$  est une tribu grossière
- $\mathcal{P}(E)$  est la plus grande tribu sur  $E$
- L'intersection de tribus en est encore une (mais pas l'union en général) donc on peut parler de tribu engendrée par une classe  $C \subset \mathcal{P}(E)$ .

Si  $C = \{A\}$  où  $A \in \mathcal{P}(E)$ , on note  $\sigma(A)$  la tribu engendrée par  $A$  :

$\sigma(A) = \{\emptyset, A, A^c, E\}$ .

Si  $C = \{A, B\}$ ,  $\sigma(A, B) = \{\emptyset, A, B, A^c, B^c, A \cup B, (A \cup B)^c, A \cap B, (A \cap B)^c, (A^c \cup B), (A^c \cup B)^c, A \cup B^c, (A \cup B^c)^c, E\}$ .

*Remarque 1.3* On peut avoir  $\sigma(A) = \sigma(B)$  sans avoir  $A = B$ .

**Définition 1.4** Une tribu est dite séparable ssi elle est engendrée par une classe dénombrable de parties de  $E$ .

Exo : Soit  $E, F$  deux espaces,  $\mathcal{A}$  une tribu sur  $E$  et  $f : F \rightarrow E$ .

1. Montrer que  $f^{-1}(\mathcal{A}) = \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{A}\}$  est une tribu sur  $F$ .  
 $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(E) = F, f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$  et

$$\bigcup_{i \geq 0} f^{-1}(A_i) = f^{-1} \left( \bigcup_{i \geq 0} A_i \right)$$

2. Soit  $U$  un sous-espace de  $\mathcal{P}(E)$ . Montrer que  $f^{-1}(\sigma(U)) = \sigma(f^{-1}(U))$ .  
 $f^{-1}(U) \in f^{-1}(\sigma(U))$  donc  $\sigma(f^{-1}(U)) \subset f^{-1}(\sigma(U))$ .

Posons  $\mathcal{B} = \{B, f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(U))\}$ .  $\mathcal{B}$  est une tribu sur  $E$ .

Or  $U \in \mathcal{B}$  donc  $\sigma(U) \subset \mathcal{B}$ . Donc  $f^{-1}(\sigma(U)) \subset f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \sigma(f^{-1}(U))$ .

## 1.2 Tribus boréliennes

### 1.2.1 Tribu borélienne de $\mathbb{R}$

**Définition 1.5** On définit et on note  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  la tribu engendrée par les intervalles de  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 1.1** Tout intervalle semi-ouvert  $]a, b]$  est un élément de  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.*  $]a, b] = \bigcap_{n \geq 1} ]a, b + \frac{1}{n}[$  ■

**Proposition 1.2**  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  est engendrée par  $C_1 = \{]-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$  et par  $C_2 = \{]-\infty, x], x \in \mathbb{Q}\}$ .

*Démonstration.*  $C_2 \subset C_1 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$  donc  $\sigma(C_2) \subset \sigma(C_1) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Il existe  $(a_n)_n, (b_n)_n \in (\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})^2$  tel que  $(a_n)_n$  décroît vers  $a$  et  $(b_n)_n$  croît vers  $b$ .

$]a_n, b_n] = ]-\infty, b_n] \setminus ]-\infty, a_n]$  donc  $]a_n, b_n] \in \sigma(C_2)$

$]a, b[ = \bigcup_{n \geq 0} ]a_n, b_n]$  donc  $]a, b[ \in \sigma(C_2)$ .

Donc  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(C_2)$ . ■

*Remarque 1.4* Un borélien (élément de  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ) ne peut pas, en général, être décrit d'une façon concrète.

**Proposition 1.3**  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  est engendrée par les ouverts de  $\mathbb{R}$  et par les fermés de  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Soit  $A$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $x \in A$ .

Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \subset A$ . Donc il existe  $a_x, b_x \in \mathbb{Q}^2$  tel que  $x \in ]a_x, b_x[ \subset A$ .

$\mathbb{Q}$  est dénombrable donc  $\bigcup_{x \in A} ]a_x, b_x[$  est une union dénombrable valant  $A$ .

Donc  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . ■

### 1.2.2 Tribu borélienne sur un espace topologique

**Définition 1.6** On appelle tribu borélienne sur  $E$  et on note  $\mathcal{B}(E)$  la tribu engendrée par les ouverts de  $E$ .

**Définition 1.7** On définit le produit de deux tribus  $A$  et  $B$  et on note  $A \otimes B$  la tribu engendrée par les pavés de la forme  $a \times b$  où  $a \in A$  et  $b \in B$ .

A-t-on  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^d$  ?

**Définition 1.8** On appelle espace mesurable un couple  $(E, A)$  où  $E$  est un espace et  $A$  une tribu sur  $E$ . Les éléments de  $A$  sont appelés mesurables de  $A$ .

## 1.3 Tribus complètes, complétion de mesures

### 1.3.1 Mesure positive sur $(E, \mathcal{A})$

**Définition 1.9** Une mesure  $\mu$  sur  $(E, \mathcal{A})$  est une application  $\mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  telle que  $\mu(\emptyset) = 0$  et  $\forall (A_n)_n$  série de mesurables disjoints,  $\mu\left(\bigcup_{i \geq 0} A_i\right) = \sum_{i \geq 0} \mu(A_i)$ .

*Remarque 1.5* Le deuxième axiome porte le nom de  $\sigma$ -additivité. Le second membre peut valoir  $+\infty$ .

Le premier membre ne dépend pas de l'ordre de l'union et le second non plus car la série est à termes positifs.

**Proposition 1.4**

- $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ .
- $\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ .

- Si  $(A_n)_n$  est croissante,  $\mu\left(\bigcup_{i \geq 0} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$ .
- Si  $(A_n)_n$  est décroissante et  $\mu(A_0) \neq +\infty$ , alors

$$\mu\left(\bigcap_{i \geq 0} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$$

- Si  $(A_n)_n$  est une suite de mesurables,  $\mu\left(\bigcup_{i \geq 0} A_i\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$ .

*Démonstration.*

- $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$
- $\mu(A \cup B) = \mu((A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)) = \mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$
- On pose  $B_n = A_{n+1} \setminus A_n$ . Les  $B_i$  sont disjoints et leur union vaut celle des  $A_i$ .

Donc :

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) \\ &= \mu(A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A_{n+1}) - \mu(A_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

- On pose  $B_n = A_0 \setminus A_n$ .  $B$  est croissante donc  $\mu\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n)$ .

$$\text{Or } \bigcup_{n \geq 0} B_n = A_0 \setminus \left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right).$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right) &= \mu(A_0) - \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) \\ &= \mu(A_0) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n) \\ &= \mu(A_0) - \mu(A_0) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

- On pose  $B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$ .

Les  $B_i$  étant disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \quad \blacksquare$$



### 1.3.2 Espaces négligeables

**Définition 1.10**  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  est un espace mesuré ssi  $E$  est un ensemble,  $\mathcal{A}$  une tribu et  $\mu$  une mesure positive sur  $\mathcal{A}$ .

**Définition 1.11** Un ensemble  $N \subset E$  est négligeable pour  $\mu$  ssi il existe  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $N \subset A$  et  $\mu(A) = 0$ .

*Remarque 1.6*  $N$  n'est pas forcément mesurable donc on ne peut pas dire  $\mu(N) = 0$ .

On voudrait agrandir  $\mathcal{A}$  en ajoutant les  $N$  négligeables (on dit qu'on complète  $\mathcal{A}$ ). Quand  $\mathcal{A}$  sera complétée en  $\mathcal{A}'$ , on étendra  $\mu$  à  $\mathcal{A}'$ . La mesure de  $N$   $\mu$ -négligeable sera nulle.

**Définition 1.12** On dit que  $f$  et  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  sont égales presque partout ssi il existe  $N \in \mathcal{A}$   $\mu$ -négligeable telle que  $f = g$  sur  $E \setminus N$ . En particulier, pour tout  $(A, B) \subset E$ , on dit que  $A = B$  presque partout ssi les deux indicatrices sont égales presque partout ssi  $A \Delta B$  est négligeable.

**Proposition 1.5**

- $A \Delta B = A^c \Delta B^c$ .
- $\mu(A \Delta B) = 0 \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$ .

*Démonstration.*

- $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$  est symétrique en  $(A, A^c)$  et  $(B, B^c)$ .
- Si  $\mu(A \Delta B) = 0$ ,  $\mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \setminus (A \cap B)) = 0$ . C'est la somme de deux termes positifs donc  $\mu(B) = \mu(A \cap B) = \mu(A)$ . ■

**Proposition 1.6** Soit  $\mathcal{N}$  l'ensemble des parties négligeables.

- $\emptyset \in \mathcal{N}$
- $B \subset A$  et  $A \in \mathcal{N}$  implique  $B \in \mathcal{N}$ .
- Si  $(A_n)_n \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ , alors  $\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{N}$ .
- Si  $(A_i)_i \in \mathcal{N}^I$ , alors  $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{N}$ .

*Démonstration.*

- Clair
- Clair
- Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , il existe  $C_i \in \mathcal{A}$  tel que  $A_i \subset C_i$  et  $\mu(C_i) = 0$ . On a :

$$\mu \left( \bigcup_{n \geq 0} C_n \right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(C_n) = 0$$

Donc  $\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{N}$ .

- Pour tout  $t \in I$ ,  $A_t \subset C_t \in \mathcal{A}$  avec  $\mu(C_t) = 0$ .

$$\bigcap_{t \in I} A_t \subset A_{t_0} \subset C_{t_0}$$

Donc  $\bigcap_{t \in I} A_t \in \mathcal{N}$ . ■

**Définition 1.13** On appelle tribu complétée de  $\mathcal{A}$  et on note  $\tilde{\mathcal{A}}$  la tribu engendrée par  $\mathcal{A} \cup \mathcal{N}$ .

*Remarque 1.7* Contrairement à  $\mathcal{A}$  qui est souvent difficile à décrire,  $\tilde{\mathcal{A}}$  a quatre descriptions.

**Proposition 1.7**

$$\begin{aligned} A \in \tilde{\mathcal{A}} & \text{ ssi } \exists (B, C) \in \mathcal{A}^2, B \subset A \subset C \text{ et } \mu(C \setminus B) = 0 \\ & \text{ ssi } \exists B, N \in \mathcal{A} \times \mathcal{N}, A = B \cup N \\ & \text{ ssi } \exists B \in \mathcal{A}, A = B \text{ presque partout} \\ ( & \text{ ssi } \exists B \in \mathcal{A}, A \Delta B \in \mathcal{N}) \end{aligned}$$

*Démonstration.*

- 2  $\Rightarrow$  3 Il existe  $(B, C) \in \mathcal{A}^2$  tel que  $B \subset A \subset C$  et  $\mu(C \setminus B) = 0$ .  
On a  $A = B \cup (A \setminus B)$ . Or  $B \in \mathcal{A}$  et  $A \setminus B \subset C \setminus B$  avec  $\mu(C \setminus B) = 0$ .
- 3  $\Rightarrow$  4 Il existe  $(B, N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{N}$  avec  $A = B \cup N$ .  
 $A \Delta B = (B \cup N) \setminus B \subset N \in \mathcal{N}$  donc  $A = B$  presque partout.
- 4  $\Rightarrow$  2 Il existe  $B \in \mathcal{A}$  tel que  $A \Delta B \in \mathcal{N}$ .  
Donc il existe  $D \in \mathcal{A}$  tel que  $A \Delta B \subset D$  et  $\mu(D) = 0$ .  
On pose  $B' = \underbrace{B \cap (D^c)}_{\in \mathcal{A}}$  et  $C' = \underbrace{B \cap D}_{\in \mathcal{A}}$ .  
On a  $B' \subset A \subset C'$  :  
 $B' \subset A$  ssi  $A^c \subset (B')^c = B^c \cup D$ . Or  $B^c \cup D \subset (A \cap B)^c$  et  $A^c \subset (A \cap B)^c$ .  
 $A \subset C'$  car  $A \cap B \subset B$  et  $A \setminus (A \cap B) \subset A \Delta B \subset D$ .  
De plus,  $\mu(C' \setminus B') = \mu(D) = 0$ .
- 4  $\Leftrightarrow$  1 On va montrer que  $E_2 = \{A \subset E, \exists B, N \in \mathcal{A} \times \mathcal{N}, A = B \cup N\}$  est une tribu, ce qui revient à montrer que  $E_3 = \{A \subset E, \exists B \in \mathcal{A}, A \Delta B \in \mathcal{N}\}$  en est une.
- $E \in E_3$  car  $E \Delta E = \emptyset$ .
  - Si  $A \in E_3$ , il existe  $B \in \mathcal{A}$  tel que  $A \Delta B \in \mathcal{N}$ .  
 $(A^c) \Delta (B^c) = A \Delta B \in \mathcal{N}$  et  $B^c \in \mathcal{A}$  donc  $A^c \in E_3$ .
  - Si  $(A_n)_n \in E_3^{\mathbb{N}}$ , il existe  $(B_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  tel que  $(A_n \Delta B_n)_n \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ .  
 $\bigcup_{n \geq 0} (A_n \Delta B_n) \in \mathcal{N}$  donc  $\left( \bigcup_{n \geq 0} A_n \right) \Delta \left( \bigcup_{n \geq 0} B_n \right) \in \mathcal{N}$ .

### 1.3. TRIBUS COMPLÈTES, COMPLÉTION DE MESURES

---

De plus,  $\bigcup_{n \geq 0} B_n \in \mathcal{A}$  donc  $\bigcup_{n \geq 0} A_n \in E_3$ .

Finalement,  $E_2$  est une tribu. Or  $E_2 \subset \tilde{\mathcal{A}}$  (par définition) et  $\tilde{\mathcal{A}} \subset E_2$  car  $\mathcal{A} \cup \mathcal{N} \subset E_2$ .

Donc  $\tilde{\mathcal{A}} = E_2$ . ■

**Proposition 1.8** Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $\tilde{\mathcal{A}}$  la tribu complétée de  $\mathcal{A}$  par rapport à  $\mu$ . L'application :

$$\tilde{\mu} : \begin{cases} \tilde{\mathcal{A}} & \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+} \\ A = B \cup N & \mapsto \mu(B) \end{cases}$$

est bien définie et est l'unique extension de  $\mu$  à  $\tilde{\mathcal{A}}$  (dans le sens où  $\tilde{\mu} = \mu$  sur  $\mathcal{A}$ ).

*Démonstration.*

- $\tilde{\mu}$  est bien définie : soit  $A \in \tilde{\mathcal{A}}$  tel que  $A = B \cup N = B' \cup N'$ .  
 $B \Delta B' \subset N \Delta N'$  donc  $\mu(B \Delta B') = 0$  donc  $\mu(B) = \mu(B')$ .
- $\tilde{\mu}$  est une mesure :
  - \*  $\tilde{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ .
  - \* Soit  $(A_n)_n \in \tilde{\mathcal{A}}^{\mathbb{N}}$  disjoints.

Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $A_i = B_i \cup N_i$ . On a :

$$\bigcup_{n \geq 0} A_n = \left( \bigcup_{n \geq 0} B_n \right) \cup \left( \bigcup_{n \geq 0} N_n \right)$$

Donc :

$$\tilde{\mu} \left( \bigcup_{n \geq 0} A_n \right) = \mu \left( \bigcup_{n \geq 0} B_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n)$$

- \* Soit  $\nu$  une extension de  $\mu$  à  $\tilde{\mathcal{A}}$  différente de  $\mu$ .  
Soit  $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ .  $A = B \cup N$  avec  $N \subset C \in \mathcal{A}$  tel que  $\mu(C) = 0$ .  
 $B \subset A \subset B \cup C$  donc  $\mu(B) = \nu(B) \leq \nu(A) \leq \nu(B \cup C) \leq \nu(B) + \nu(C) = \mu(B) + \mu(C) = \mu(B)$ .  
Donc  $\nu(A) = \mu(B) = \tilde{\mu}(A)$ . ■

**Proposition 1.9** L'ensemble  $\tilde{\mathcal{N}}$  des parties  $\tilde{\mu}$ -négligeables coïncide avec  $\mathcal{N}$ .

*Démonstration.* On a, par définition de  $\tilde{\mu}$ ,  $\mathcal{N} \subset \tilde{\mathcal{N}}$ .

Soit  $N \in \tilde{\mathcal{N}}$ . Il existe  $C \in \tilde{\mathcal{A}}$  tel que  $N \subset C$  et  $\tilde{\mu}(C) = 0$ .

Il existe  $B, N' \in \mathcal{A} \times \mathcal{N}$  tel que  $C = B \cup N'$ .

$\tilde{\mu}(C) = \mu(B) = 0$  donc  $B \in \mathcal{N}$ .

Or  $N \subset C \subset B \cup N' \in \mathcal{N}$ . Donc  $\mathcal{N} = \tilde{\mathcal{N}}$ . ■

## 1.4 Construction de mesures – Théorème de Carathéodory

### 1.4.1 Mesures extérieures

**Définition 1.14** (mesure extérieure) Une application  $\mu^* : \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, +\infty]$  est dite une mesure extérieure ssi :

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- $\mu^*$  est croissante.
- Pour tout  $(A_i)$  suite de parties de  $E$  disjointes deux à deux,

$$\mu^* \left( \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \mu^*(A_i)$$

**Définition 1.15** Une partie  $B$  de  $E$  est dite  $\mu^*$ -mesurable si  $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ ,  $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$ .

On note  $\mathcal{M}(\mu^*)$  l'ensemble des parties  $\mu^*$ -mesurables.

**Proposition 1.10**  $\mathcal{M}(\mu^*)$  est une tribu sur  $E$ . Elle est appelée tribu de Carathéodory. La restriction  $\mu$  de  $\mu^*$  à cette tribu est une mesure notée  $\mu$ .

*Remarque 1.8* Par le troisième axiome définissant  $\mu^*$ , on a clairement

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

*Démonstration.*

- $\emptyset \in \mathcal{M}(\mu^*)$  : en effet, pour tout  $A \subset E$ ,  $A \cap \emptyset = \emptyset$  et  $A \cap \emptyset^c = A$  donc  $\mu^*(\emptyset) = 0$ .
- $\mathcal{M}(\mu^*)$  est stable par complémentation vu la symétrie de la définition de  $\mathcal{M}(\mu^*)$ .
- Pour montrer la stabilité par réunion dénombrable, on va montrer :
  - la stabilité par réunion finie (donc par intersection finie par passage au complémentaire donc par différence)
  - la stabilité par union disjointe (Il suffira alors de considérer  $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$  avec  $B_n = A_n \setminus \bigcup_{0 \leq k \leq n-1} A_k$  disjoints deux à deux)
  - Soient  $(B_1, B_2) \in \mathcal{M}(\mu^*)^2$ .  
 Pour tout  $A \subset E$ ,  $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c) = \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2^c) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2)$ .  
 On a  $\mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2)) + \mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2)^c) = \mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2)) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2^c)$ .  
 Or  $\mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2)) = \mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1) + \mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1^c) = \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2)$ .

#### 1.4. THÉORÈME DE CARATHÉODORY

---

Donc  $\mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2)) + \mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2)^c) = \mu^*(A \cup B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2^c) = \mu^*(A)$ .

– Soit  $(B_n)_n \in \mathcal{M}(\mu^*)^{\mathbb{N}}$  disjoints.

Par récurrence, on a  $\mu^*(A) = \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap B_k) + \mu^*\left(A \cap \bigcap_{1 \leq k \leq n} B_k^c\right)$ .

En effet,

$$\begin{aligned} & \mu^*\left(A \cap \bigcap_{1 \leq k \leq n} B_k^c\right) \\ &= \mu^*\left(A \cap \bigcap_{1 \leq k \leq n+1} B_k^c\right) + \mu^*\left(A \cap \bigcap_{1 \leq k \leq n} B_k^c \cap B_{n+1}\right) \\ &= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcap_{1 \leq k \leq n+1} B_k^c\right)\right) + \mu^*(A \cap B_{n+1}) \end{aligned}$$

Donc  $\mu(A) = \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap B_k) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcap_{1 \leq k \leq n+1} B_k^c\right)\right) + \mu^*(A \cap B_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu^*(A \cap B_k) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcap_{1 \leq k \leq n+1} B_k^c\right)\right)$ .

On va montrer que  $\mu^*(A) \geq \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_n B_n\right)\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcap_n B_n^c\right)\right)$ .

On a  $A \cap \left(\bigcap_{n \geq 0} B_k\right) \subset A \cap \left(\bigcap_{k \leq n} B_k\right)$  donc  $\mu^*(A) \geq \sum_{k=0}^n \mu^*(A \cap B_k) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcap_{k \geq 0} B_k^c\right)\right)$ .

Donc  $\mu^*(A) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A \cap B_n) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right)^c\right)$ .

$\mu^*(A) \geq \mu^*\left(\bigcup_{n \geq 0} (A \cap B_n)\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right)^c\right)$ .

Donc  $\mu^*(A) \geq \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right)\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right)^c\right)$

Donc  $\mathcal{M}(\mu^*)$  est un tribu sur  $E$ .

- Montrons que  $\mu$  est une mesure :  $\mu(\emptyset) = 0$ .

Soit  $(B_n)_n$  une suite d'éléments disjoints.

$$\mu^*(A) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A \cap B_n) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right)^c\right)$$

donc, pour  $A = \bigcup_{n \geq 0} B_n$ , on a

$$\mu \left( \bigcup_{n \geq 0} B_n \right) = \mu^* \left( \bigcup_{n \geq 0} B_n \right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(B_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n). \quad \blacksquare$$

*Remarque 1.9* Si  $B \subset E$  est telle que  $\mu^*(B) = 0$ , alors  $B \in \mathcal{M}(\mu^*)$ . En effet,  $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B^c) + \mu^*(A \cap B)$  car  $\mu^*$  est croissante et  $\mu^*(A \cap B) \leq \mu^*(B) = 0$ . Donc  $B \in \mathcal{M}(\mu^*)$ .

Il en découle que si  $N$  est  $\mu$ -négligeable (ie  $N \subset B$ ),  $B \in \mathcal{M}(\mu^*)$  et  $\mu(B) = 0 = \mu^*(B)$  donc  $\mu^*(N) = 0$  donc  $N \in \mathcal{M}(\mu^*)$  donc  $\mathcal{M}(\mu^*)$  est complète.

### 1.4.2 Mesure de Lebesgue

**Définition 1.16** Dans le cas  $E = \mathbb{R}$ , on définit la mesure de Lebesgue  $\lambda^*$  par  $\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n), \bigcup_{n \geq 0} ]a_n, b_n[ \supset A \right\}$ .

**Proposition 1.11**  $\lambda^*$  est une mesure extérieure sur  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.*

- $\lambda^*(\emptyset) = 0$
- Si  $A \subset B$ , tout recouvrement de  $B$  est un recouvrement de  $A$ , donc, en passant à l'inf,  $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ .
- Soit  $(A_n)_n$  une suite de parties de  $\mathbb{R}$ . S'il existe  $n_0$  tel que  $\lambda^*(A_{n_0}) = +\infty$ , l'inégalité est vérifiée.

Dans le cas contraire, soit  $\varepsilon > 0$ .

Il existe un recouvrement  $\bigcup_{k \geq 1} ]a_k^{(n)}, b_k^{(n)}[$  tel que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k^{(n)} - a_k^{(n)}) \leq \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Alors,  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \subset \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq 1} [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]$ .

Donc  $\lambda^* \left( \bigcup_{n \geq 1} A_n \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (b_k^{(n)} - a_k^{(n)}) + \varepsilon$ .

$\lambda^*$  est donc sous-additive. ■

**Définition 1.17** La restriction de  $\lambda^*$  à  $\mathcal{M}(\lambda^*)$  est appelée mesure de Lebesgue.

**Proposition 1.12**  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{M}(\lambda^*)$  et  $\lambda(]a, b[) = \lambda([a, b]) = b - a$ .

*Démonstration.*

## 1.4. THÉORÈME DE CARATHÉODORY

---

- Il suffit de montrer que  $B_x = ]-\infty, x] \in \mathcal{M}(\lambda^*)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $(]a_n, b_n[)_n$  un recouvrement de  $A$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .  $A \cap B \subset \bigcup_{n \geq 0} ]a_n \wedge x, b_n \wedge (x + \frac{\varepsilon}{2^n})[$ <sup>1</sup>.

De plus,  $A \cap B^c \subset \bigcup_{n \geq 0} ]a_n \vee x, b_n \vee x[$ <sup>2</sup>.

On a donc  $\lambda^*(A \cap B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^* \left( ]a_n \wedge x, b_n \wedge (x + \frac{\varepsilon}{2^n})[ \right)$  et  $\lambda^*(A \cap B^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(]a_n \vee x, b_n \vee x[)$ .

Donc, en examinant différents cas, on obtient  $\lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \cap B^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) + 2\varepsilon$ .

Donc  $\lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \cap B^c) \leq \lambda^*(A)$ .

- $[a, b] \subset \bigcap_{n \geq 1} ]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$  donc  $\lambda^*([a, b]) \leq b - a$ .

Soit  $(]a_n, b_n[)_n$  un recouvrement de  $[a, b]$ .  $[a, b]$  est un compact de  $\mathbb{R}$  qui est de dimension finie donc il existe  $N$  tel que  $[a, b] \subset \bigcup_{1 \leq k \leq N} ]a_k, b_k[$ .

Donc  $b - a \leq \sum_{k=1}^N (b_k - a_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)$ . Donc  $\lambda^*([a, b]) \geq b - a$ .

De plus,  $\lambda^*({a}) = 0$  car  ${a} \subset \bigcap_{n \geq 1} ]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$ .

Donc  $\lambda^*([a, b]) = \lambda^*(]a, b]) + 0 + 0 = \lambda^*(]a, b])$ . ■

*Remarque 1.10*  $\lambda({a}) = 0$  et la  $\sigma$ -additivité de  $\lambda$  montrent que  $\lambda(E) = 0$  pour tout  $E$  dénombrable.

Donc les ensembles dénombrables sont  $\lambda$ -négligeables et ce ne sont pas les seuls (ensemble de CANTOR)

**Proposition 1.13** Soit  $\widetilde{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$  la complétée de  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  pour la mesure de Lebesgue.  $\mathcal{M}(\lambda^*) = \widetilde{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$

*Démonstration.* On sait que  $\widetilde{\mathcal{B}(\mathbb{R})} \subset \mathcal{M}(\lambda^*)$  ( $\mathcal{M}(\lambda^*)$  contient les boréliens et les ensembles  $\lambda$ -négligeables)

Pour l'inclusion réciproque, on utilise la caractérisation de  $\widetilde{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$  :  $A \in \widetilde{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$  ssi  $\exists C, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  tel que  $C \subset A \subset B$  et  $\lambda(B \setminus C) = 0$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}(\lambda^*)$ . On pose  $A_n = A \cap ]-n, n[$  pour  $n \geq 1$ .

Il est clair que  $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$  et que l'union est croissante. En vertu de la continuité par limite croissante, il suffit de construire  $(B_n)_n, (C_n)_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$

---

1.  $a \wedge b = \min(a, b)$   
2.  $a \vee b = \max(a, b)$

croissantes telles que  $C_n \subset A_n \subset B_n$  et  $\lambda(B_n \setminus C_n) = 0$ .

Soit  $n \geq 1$ . Comme  $\lambda^*(A_n) < \infty$ , pour tout  $p \geq 1$ , il existe  $(]a_k^{(p)}, b_k^{(p)}])_k$  recouvrement de  $A_n$  tel que  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(p)} - a_k^{(p)} \leq \lambda(A_n) + \frac{1}{p}$ .

On pose  $B_n = \bigcap_{p \geq 1} \bigcup_{k \geq 1} ]a_k^{(p)}, b_k^{(p)}[$ . On a alors clairement  $A_n \subset B_n$ .

On a  $\lambda(B_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^{(p)} - a_k^{(p)}) \leq \lambda^*(A_n) + \frac{1}{p}$ .

Donc  $\lambda^*(B_n) = \lambda(B_n) = \lambda^*(A_n)$  et  $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

On applique ce procédé à  $A_n^c$ , ce qui donne un  $U_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  tel que  $A_n^c \subset U_n$  avec  $\lambda^*(U_n) = \lambda^*(A_n^c)$ .

On pose  $C_n = U_n^c$ . On a alors  $C_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  et  $C_n \subset A_n \subset [-n, n]$  donc  $\lambda^*(C_n) = \lambda^*(A_n) = \lambda^*(B_n)$ .

Donc  $\lambda(B_n \setminus C_n) = 0$  et  $C_n \subset A_n \subset B_n$ . ■

### 1.4.3 Cas général

**Définition 1.18** On dit que  $m : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$  une prémesure (ou mesure sur l'algèbre  $\mathcal{C}$ ) ssi

- $m(\emptyset) = 0$
- Pour tout  $A, B \in \mathcal{C}^2$  disjointes,  $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$
- (continuité à droite) Si  $(A_n)_n$  est une suite décroissante de  $\mathcal{C}$  telle que  $\bigcap_{n \geq 0} A_n = \emptyset$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} m(A_n) = 0$ .
- ( $\sigma$ -finitude) Il existe  $(E_n)_n$  tels que  $E = \bigcup_{n \geq 0} E_n$ ,  $m(E_n) < +\infty$ ,  $E_n \in \mathcal{C}$  et la limite croissante de  $m(A \cap E_n)$  vaut  $m(A)$ .

*Remarque 1.11* Une mesure finie est  $\sigma$ -finie.

Une mesure  $\mu$  est dite de probabilité ssi  $\mu(E) = 1$ .

La  $\sigma$ -finitude assure l'unicité de la prémesure.

On démontre grâce à la propriété de continuité à droite que  $m$  est  $\sigma$ -additive pour les suites  $(A_n)_n$  dont l'union reste dans  $\mathcal{C}$ . On montre aussi la continuité à gauche et la sous-additivité.

**THÉORÈME 1.1** (CARATHÉODORY) Une prémesure admet une unique extension à la tribu  $\sigma(\mathcal{C})$ .



## 1.5 Cas $E = \mathbb{R}$

On pose  $S$  l'ensemble des intervalles de  $\mathbb{R}$ .  $S$  est une semi-algèbre<sup>3</sup>. On note  $\mathcal{A}$  l'algèbre engendrée par  $S$ .

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{j=1}^n I_j, I_j \text{ intervalles disjoints deux à deux} \right\}$$

On pose  $m$  l'application qui à un intervalle associe sa longueur.  $m$  est additive et continue à droite (car  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 0} ]-n, n[$  avec  $m(]-n, n[) = 2n$ ).

$$\text{En général, } \mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} m(A_i), A_i \in \mathcal{C}, A \subset \bigcup_{i \geq 0} A_i \right\}$$

Le reste de la preuve du théorème se fait comme précédemment.

### 1.5.1 Contre-exemple au théorème si $m$ n'est pas continue à droite

$E = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), A \text{ ou } A^c \text{ est fini}\}$ .

$\mathcal{C}$  est une algèbre. On définit  $m : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$  par  $m(A) = 0$  si  $A$  fini et  $m(A) = 1$  si  $A^c$  est fini.

$m$  vérifie  $m(\emptyset) = 0$  mais pas  $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$  si  $A \cap B = \emptyset$ .

En revanche,  $m$  n'est pas continue à droite :  $A_n = \{n, n+1, \dots\}$  vérifie  $m(A_n) = 1$  et  $\bigcap_{n \geq 0} A_n = \emptyset$ .

Supposons que  $m$  a une extension  $\mu$  à  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .  $\mu(\mathbb{N}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n^c) = 0$ .  
Donc  $\mu$  n'est pas croissante. Donc  $m$  n'a pas d'extension.

---

3. ie non vide, stable par intersection finie, contenant  $\mathbb{R}$  et tel que  $A \setminus B$  s'écrit comme union finie d'éléments de  $S$



# Chapitre 2

## Intégration par rapport à une mesure positive

Le fait de considérer des mesures positives n'est pas une perte de généralité. En effet, pour toute mesure à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , il existe une unique décomposition  $\mu = \mu^+ - \mu^-$  (décomposition de HAN-JORDAN) avec  $\mu^+$  et  $\mu^-$  des mesures positives ( $\mu^+(A) = \mu(A \cap P)$  et  $\mu^-(A) = \mu(A \cap N)$  avec  $P$  et  $N$  deux parties de  $A$  disjointes telles que  $\mu(P) \geq 0 \geq \mu(N)$ ).

### Introduction

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré complet. On va définir  $\int f d\mu$  où  $f : E \rightarrow F$  est dite mesurable. On commence par la définir pour des  $f$  simples (fonctions en escalier pour l'intégrale de RIEMANN) : les fonctions étagées et on utilise un théorème de densité pour utiliser les limites des intégrales des fonctions étagées.

Dans le cas  $(\mathbb{R}, \widetilde{\mathcal{B}(\mathbb{R})}, \lambda)$ , on retrouve l'intégrale de Riemann.

Dans le cas  $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n)$ . ( $\delta_n$  mesure de Dirac) L'intégrale est une série.

### 2.1 Fonctions mesurables

**Définition 2.1** Soient  $(E, \mathcal{E})$  et  $(F, \mathcal{F})$  deux espaces mesurables.

On dit que  $f : E \rightarrow F$  est mesurable ssi  $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$ .

Exemples :

- On pose :

$$f : \begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1_A(x) \end{cases}$$

avec  $A \subset E$ .

$f$  est  $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  mesurable ssi  $A \in \mathcal{E}$ .

- Soit  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  et  $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p))$ .

Toute fonction  $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathbb{R}^p))$ -mesurable est dite borélienne. En particulier, toute fonction continue est borélienne. Ceci se montre en utilisant le fait que la tribu borélienne est engendrée par les ouverts et se généralise aux espaces topologiques munis de leur tribu borélienne (c'est la définition de la continuité).

*Remarque 2.1* Si  $\mathcal{F} = \sigma(C)$  où  $C$  est une classe de parties de  $F$ ,  $f^{-1}(\mathcal{F}) = f^{-1}(\sigma(C)) = \sigma(f^{-1}(C))$  et il suffit de vérifier que  $f^{-1}(C) \in \mathcal{E}$ . Si  $F = \mathbb{R}^p$ , on peut considérer les boules ouvertes  $B(x, r)$ ,  $x \in \mathbb{Q}^p$  ou  $] -\infty, x]$ ,  $x \in \mathbb{Q}$ . On peut vérifier la mesurabilité sur les cylindres

$$\prod_{i=1}^q ]a_i, b_i[.$$

- Soit  $f : E \rightarrow F$ . La tribu  $\sigma(f^{-1}(A), A \in \mathcal{F})$  est la plus petite tribu rendant  $f$  mesurable. Plus généralement, si  $(f_i)_{i \in I}$  est une famille de fonctions de  $E \rightarrow F$ ,  $\sigma(f_i^{-1}(A), A \in \mathcal{F}, i \in I)$  est la plus petite tribu rendant les  $f_i$  mesurables. On note cette tribu  $\sigma(f_i, i \in I)$ .

**Proposition 2.1** La composée de fonctions mesurables est mesurable.

*Démonstration.* On utilise la remarque précédente avec pour tout ensemble  $A$ ,  $(f \circ g)^{-1}(A) = g^{-1}(f^{-1}(A))$ . ■

Conséquences :

- La combinaison linéaire finie de fonctions mesurables le reste.
- Si  $f_1, \dots, f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  sont boréliennes, alors la composée  $g(f_1, \dots, f_n)$  est mesurable. Pour cela, il suffit de prouver que  $(f_1, \dots, f_n) : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  est mesurable, donc de considérer les cylindres :

$$(f_1, \dots, f_n)^{-1} \left( \prod_{i=1}^n ]a_i, b_i[ \right) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}(]a_i, b_i[) \in \mathcal{E}$$

- $f \wedge g$  et  $f \vee g$  sont mesurables si  $f$  et  $g$  le sont.
- $\{x, f(x) = g(x)\} = (f - g)^{-1}(\{0\})$ ,  $\{x, f(x) < g(x)\}$  sont mesurables.

## 2.2 Limites de fonctions

**Définition 2.2** Soit  $(A_n)_n \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ . On définit :

$$\limsup A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

$$\liminf A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{k \geq n} A_k$$

*Remarque 2.2* Si on note  $f_n = 1_{A_n}$ , les  $f_n$  sont mesurables et

$$\limsup_n f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} f_k = 1_{\limsup A_n}$$

$$\liminf_n f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} f_k = 1_{\liminf A_n}$$

**Définition 2.3** On dit que  $(f_n)_n$  converge simplement dans  $\mathbb{R}$  ssi

$$\forall x \in E, \limsup f_n(x) = \liminf f_n(x) = \lim f_n(x)$$

**Proposition 2.2** Soit  $(f_n)_n$  des fonctions  $E \rightarrow \mathbb{R}$  mesurables.

- $\sup f_n$ ,  $\inf f_n$ ,  $\liminf f_n$  et  $\limsup f_n$  sont mesurables.
- Si  $f_n$  converge simplement vers  $f$ ,  $f$  est mesurable.

*Démonstration.*

- $\{\sup f_n < x\} = \bigcap_n \{f_n < x\}$ ,  $\{\inf f_n < x\} = \left( \bigcap_n \{f_n \geq x\} \right)^c$  et on utilise la composition des fonctions mesurables.
- $\{\limsup f_n - \liminf f_n = 0\} \in \mathcal{E}$ . ■

## 2.3 Intégrale d'une fonction étagée positive

**Définition 2.4** Une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est dite étagée ssi elle prend un nombre fini de valeurs.

Exemple :  $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$  où  $A_i \in \mathcal{E}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}^*$  est une fonction étagée.

Réciproquement, toute fonction étagée se décompose ainsi ( $A_i = \{x, f(x) = a_i\}$ ).

**Proposition 2.3** Une fonction étagée est mesurable ssi  $A_i \in \mathcal{E}$ .

Une fonction étagée mesurable admet une décomposition canonique  $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$  où les  $A_i$  forment une partition de l'ensemble  $\{f(x) \neq 0\}$ .

**Définition 2.5** L'intégrale d'une fonction  $f$  étagée positive (mesurable) est donnée par :

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

où  $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$  est la décomposition canonique de  $f$ .

Exemple :  $\int 1_A \, d\mu = \mu(A)$  pour  $A \in \mathcal{E}$ .

**Proposition 2.4**  $\int$  est linéaire.

Si  $f \geq g$ ,  $\int f \, d\mu \geq \int g \, d\mu$ .

*Démonstration.*

• On a clairement  $\int a f \, d\mu = a \int f \, d\mu$ .

Soit  $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$  et  $g = \sum_{i=1}^q b_i 1_{B_i}$ .

La décomposition canonique de  $f + g$  est  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{a \in A_i} \sum_{b \in B_j} (a + b) 1_{A_i \cap B_j}$   
avec  $A_0 = \{x, f(x) = 0\}$  et  $B_0 = \{x, g(x) = 0\}$ .

• Si  $f \geq g$ ,  $f = g + h$  avec  $h$  étagée positive donc  $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu + \int h \, d\mu \geq \int g \, d\mu$ . ■

**COROLLAIRE 2.1** Si  $(f_n)_n$  est une suite croissante de fonctions étagées positives et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$  est étagée alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu$$

*Démonstration.* Comme l'intégrale est positive, elle est croissante donc la suite  $(\alpha_n) = \int f_n \, d\mu$  est croissante et

$$\int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu$$

Il reste à montrer que  $\int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu$ .

On pose  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ . Si  $f = 0$ , il n'y a rien à prouver.

Sinon, soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$  et  $g = f\varepsilon$ . Pour un  $x$  tel que  $f(x) > 0$ , il existe  $n_x$  tel que  $\forall n > n_x, g(x) < f_n(x)$ .

Si  $a = g(x)$ ,  $\{y, g(y) = a < f_n(y)\}$  tend vers  $\{y, g(y) = a\}$ . Finalement,

$$\begin{aligned}
 \int g \, d\mu &= \sum_{a \text{ valeur de } g} a \mu(\{g = a\}) \\
 &= \sum_{a \text{ valeur de } g} a \mu(\lim_{n \rightarrow +\infty} \{g = a < f_n\}) \\
 &= \sum_{a \text{ valeur de } g} a \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\{g = a < f_n\}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{a \text{ valeur de } g} a \mu(\{g = a < f_n\}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{a \text{ valeur de } g} a \int 1_{\{g=a < f_n\}} \, d\mu \\
 &< \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \left( \sum_{a \text{ valeur de } g} 1_{\{g=a\}} \right) \, d\mu \\
 &< \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu
 \end{aligned}$$

Comme  $\varepsilon$  est arbitraire et  $\int g \, d\mu = \varepsilon \int f \, d\mu$ , on fait tendre  $\varepsilon$  vers 1 et on conclut. ■

*Remarque 2.3* La même preuve peut être écrite pour toute fonction  $h \leq f$  et  $h$  étagée.

## 2.4 Extensions

### 2.4.1 Extension aux fonctions mesurables positives

#### Lemme 2.0.1

Toute fonction mesurable positive  $f$  est limite croissante (simple) d'une suite de fonctions étagées positives.

*Démonstration.* On pose pour tout  $n$  et  $k \in \llbracket 0, n2^n - 1 \rrbracket$ .

$$f_n : \begin{cases} x \mapsto \frac{k}{2^n} \text{ si } \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \\ x \mapsto n \text{ si } f(x) > n \end{cases}$$

$(f_n)_n$  convient. ■

**Définition 2.6** Si  $f$  est mesurable positive, on définit  $\int f \, d\mu$  par :

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int g \, d\mu, g \text{ étagée positive}, g \leq f \right\}$$

**Lemme 2.0.2**

Si  $(f_n)_n$  est une suite croissante de fonctions étagées positives et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$  (mesurable positive), alors :

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu$$

*Démonstration.* On a toujours l'inégalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$$

Inversement, pour toute  $g \leq f$  avec  $g$  étagée positive, on a  $\int g \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu$ . ■

**THÉORÈME 2.1**

- L'intégrale d'une fonction mesurable positive est linéaire croissante.
- (BEPPPO-LEVI) Si  $(f_n)_n$  est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge vers  $f$  alors

$$\int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu$$

- (Lemme de FATOU) Si  $(f_n)_n$  est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge vers  $f$  alors

$$\int \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu$$

*Remarque 2.4*

- Si on pose :

$$f_n : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & \frac{1}{n} \end{cases}$$

$(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle et si  $\mu(E) = +\infty$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu = \infty \neq 0 = \int 0 \, d\mu.$$

- On a :

$$\int \inf f_n \, d\mu \leq \inf \int f_n \, d\mu \leq \sup \int f_n \, d\mu \leq \int \sup f_n \, d\mu$$



- *Le troisième point n'a pas d'analogue avec les  $\lim \sup$ .*

*Démonstration.*

- Clair par définition de l'intégrale.

- D'après le premier point  $\int f \, d\mu \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu$ .

Comme  $(f_n)_n$  est mesurable positive pour tout  $n$ , alors il existe  $(f_{n,k})_{n,k}$  suite croissante de fonctions étagées positives telle que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_{n,k} = f_n$ .

On pose  $h_k = \sup_{1 \leq n \leq k} f_{n,k}$ .

$(h_k)_k$  est une suite croissante de fonctions étagées positives donc admet une limite  $h$ . Montrons que  $h = f$ .

On a  $h \leq f$  car  $h_k = f_{n_0,k}$  pour un  $n_0 \leq k$  donc  $h_k \leq f_{n_0} \leq f$ . Donc  $h \leq f$ .

De plus,  $h_k \geq f_{n,k}$  pour tout  $k \geq n$ . Donc, pour tout  $n \leq k$ ,  $h_k \geq f_n$  donc  $h \geq f_n$  et  $h \geq f$ . Donc  $h = f$ .

Finalement,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int h_k \, d\mu = \int f \, d\mu$ .

Mais  $h_k = \sup_{1 \leq n \leq k} f_{n,k} \leq f_k$  donc  $\int h_k \, d\mu \leq \int f_k \, d\mu$ .

Donc  $\int f \, d\mu \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ .

Donc on a  $\int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu = \int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu$ .

- Comme  $(\inf_{k \geq n} f_k)_n$  est une suite croissante de fonctions mesurables positives,

$$\int \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} f_k \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \inf_{k \geq n} f_k \, d\mu$$

Or  $\inf_{k \geq n} f_k \, d\mu \leq f_n$  pour tout  $k \geq n$  donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \inf_{k \geq n} f_k \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu \quad \blacksquare$$

**COROLLAIRE 2.2** *Si  $(f_n)_n$  est une suite de fonctions mesurables positives, alors :*

$$\int \left( \sum_{n \geq 0} f_n \right) \, d\mu = \sum_{n \geq 0} \int f_n \, d\mu$$

*Démonstration.* Appliquer le deuxième point du théorème précédent à la suite des sommes partielles. ■

**Définition 2.7** Sur  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ , on définit la mesure de DIRAC par  $\delta_x(y) = 1$  si  $x = y$  et 0 sinon. Pour  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,  $\delta_x(A) = 1$  si  $x \in A$  et 0 sinon.

Application :

$$\delta_x(A) = 1_A(x) = \int 1_A(y) \delta_x(dy).$$

Par linéarité, pour  $f$  mesurable positive étagée,

$$f(x) = \int f(y) \delta_x(dy)$$

et cela reste vrai pour une fonction mesurable positive (par limite monotone).

On prend  $\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n$  (mesure de comptage) et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(n) = \int \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) \mu(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k(x) \mu(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_k(n)$$

### 2.4.2 Extension aux fonctions mesurables

**THÉORÈME 2.2** *Si  $f$  est mesurable alors  $f = f^+ + f^-$  avec  $f^+ = x \mapsto \max\{f(x), 0\}$  et  $f^- = x \mapsto \max\{-f(x), 0\}$  et cette décomposition est minimale dans le sens où si  $f = g - h$  avec  $g$  et  $h$  mesurables positives alors  $g \geq f^+$  et  $h \geq f^-$ .*

*Si  $\int f^+ d\mu$  est finie ou  $\int f^- d\mu$  est finie alors  $\int f d\mu$  existe dans  $\overline{\mathbb{R}}$  et vaut  $\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$ .*

**Définition 2.8**  $f$  est intégrable ssi  $f$  est mesurable et  $\int |f| d\mu$  finie. ( $|f| = f^+ + f^-$ )

Dans ce cas,  $\int f^+ d\mu$ ,  $\int f^- d\mu$  et  $\int f d\mu$  sont finies.

Exemple :  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$  avec  $\mu$  la mesure de comptage.

$f$  est intégrable ssi  $\sum_{n=0}^{\infty} |f(n)|$  est finie.

#### Proposition 2.5

- $f \mapsto \int f d\mu$  est une forme linéaire continue positive sur l'espace vectoriel des fonctions intégrables  $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ . On parle de continuité pour la semi-norme  $f \mapsto \int |f| d\mu$ .

- Pour tout  $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$ .

#### Lemme 2.2.1

Si  $f = g - h$  avec  $g$  et  $h$  mesurables positives telles qu'au moins une des intégrales soit finie,  $\int f d\mu = \int g d\mu - \int h d\mu$ .

*Démonstration.* Supposons  $\int g \, d\mu$  finie. On sait que  $f^+ \leq g$  donc  $\int f^+ \, d\mu$  est finie et  $\int f \, d\mu$  existe (car  $f \leq f^+$ ).

Or  $f^+ + h = f^- + g$ .  
 $\int f^+ \, d\mu + \int h \, d\mu = \int f^- \, d\mu + \int g \, d\mu$  donc  $\int h \, d\mu = \int g \, d\mu - \int f \, d\mu$  car  $\int f^+ \, d\mu$  est finie. ■

**Lemme 2.2.2 (de Fatou deuxième version)**

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions mesurables telles que pour tout  $n$ ,  $f_n \geq g$  avec  $g$  intégrable, alors :

$$\int \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu$$

*Démonstration.* Comme  $(f_n)_n$  est minorée par  $g$ , alors  $\int f_n \, d\mu$  existe dans  $] -\infty, +\infty]$ .

On pose  $f'_n = f_n - g = f_n - g^+ + g^-$ .  $f_n = f'_n + g^+ - g^-$ .

On a  $\int f_n \, d\mu = \int (f'_n + g^+) \, d\mu - \int g^- \, d\mu$  qui existe donc.

De même,  $\int \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu$  existe car  $\int g^- \, d\mu$  est finie.

Le lemme de Fatou appliqué à  $f'_n$  conclut. ■

*Remarque 2.5* En considérant  $-f_n$ , on a le résultat : si  $f_n$  est majorée par  $g$  intégrable,

$$\int \limsup_n f_n \geq \limsup_n \int f_n \, d\mu$$

**THÉORÈME 2.3 (CONVERGENCE DOMINÉE)** Si  $(f_n)_n$  est une suite de fonctions mesurables telles que  $|f_n| \leq g$  avec  $g$  intégrable et si  $(f_n)_n$  converge simplement vers  $f$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

*Démonstration.*  $|f_n| \leq g$  donc  $|f| \leq g$ . Or  $f$  est mesurable donc  $\int f_n \, d\mu$  et  $\int f \, d\mu$  existent.

Par le lemme de Fatou,  $\int f \, d\mu = \int \liminf_n f_n \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu$ .

De même,  $\limsup_n \int f_n \geq \int f \, d\mu \geq \limsup_n \int f_n \, d\mu$ .

Donc :

$$\int f \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu \leq \limsup_n \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$$

ce qui conclut. ■

Contre-exemple :

La domination est nécessaire : il suffit de considérer  $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}$  avec  $\mu(E) = +\infty$ .

### 2.4.3 Intégration d'une fonction à valeurs complexes

On dit que  $f_n$  converge vers  $f$  ssi  $\Re(f_n)$  et  $\Im(f_n)$  convergent.

On a alors  $\mathcal{B}(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \simeq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

**Définition 2.9** On dit que  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  est intégrable ssi  $f$  est  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -mesurable et  $\int |f| d\mu$  est finie.

Dans ce cas,  $\Re(f)$  et  $\Im(f)$  sont mesurables et intégrables. De plus, l'application  $f \mapsto \int f d\mu$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire et  $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$ .

*Démonstration.* Soit  $z$  un complexe tel que  $z \int f d\mu \in \mathbb{R}$  et  $|z| = 1$ .

Par  $\mathbb{C}$ -linéarité,  $z \int f d\mu = \int z f d\mu$  donc  $\left| \int f d\mu \right| = \left| \int z f d\mu \right|$ .

Or  $\int z f d\mu \in \mathbb{R}$  donc :

$$\left| \int z f d\mu \right| = \left| \int \Re(zf) d\mu \right| \leq \int |\Re(zf)| d\mu \leq \int |zf| d\mu \leq \int |f| d\mu$$

Donc  $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$ . ■

### 2.4.4 Compléments

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré (non nécessairement complet) et  $(E, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$  sa complétée pour  $\mu$ .

**THÉORÈME 2.4**  $1_A$  est  $\tilde{\mathcal{A}}$ -mesurable ssi il existe  $g, h$   $\mathcal{A}$ -mesurables tel que  $g \leq 1_A \leq h$  et  $g = h$   $\mu$ -presque partout ssi il existe  $f$   $\mathcal{A}$ -mesurable tel que  $f = 1_A$   $\mu$ -presque partout.

*Démonstration.*  $A \in \mathcal{A}$  ssi  $\exists D \in \mathcal{A}$  tel que  $A \Delta D \in \mathcal{N}$  ssi  $\exists B, C \in \mathcal{A}$ ,  $B \subset A \subset C$  et  $\mu(C \setminus B) = 0$ .

En termes d'indicatrices, on pose  $g = 1_B$ ,  $h = 1_C$  et  $f = 1_D$  et ça marche. ■

**Proposition 2.6** Soit  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $f$  est  $\tilde{\mathcal{A}}$ -mesurable.
- Il existe  $g, h$   $\mathcal{A}$ -mesurables tel que  $g \leq f \leq h$  et  $g = h$   $\mu$ -presque partout.
- Il existe  $f'$   $\mathcal{A}$ -mesurable tel que  $f = f'$   $\mu$ -presque partout.

*Démonstration.*

3  $\Rightarrow$  2 Prendre  $f' = g$ .

1  $\Rightarrow$  3 3 est vraie pour les fonctions indicatrices donc reste vrai pour les fonctions étagées positives donc pour les mesurables positives (par limite croissante) donc pour les fonctions mesurables quelconques avec la décomposition de Han-Jordan :

$f = f^+ - f^-$  avec  $g^+ \leq f^+ \leq h^+$  et  $g^- \leq f^- \leq f^-$  avec  $g^+ = h^+$  et  $g^- = h^-$  presque partout.

Donc  $g^+ - h^- \leq f \leq h^+ - g^-$  avec  $h^+ - g^- = g^+ - h^-$  presque partout.

2  $\Rightarrow$  1 On montre que  $\{f < x\} \in \tilde{\mathcal{A}}$  pour tout  $x$ .

Comme  $f = f'$   $\mu$ -presque partout,  $\{f < x\} \Delta \{f' < x\} \subset \{f \neq f'\} \in \mathcal{N}$ .

Or, par hypothèse,  $\{f' < x\} \in \mathcal{A}$ . Donc  $\{f < x\} \in \tilde{\mathcal{A}}$ . ■

**Lemme 2.4.1**

Si  $f$  et  $g$  sont  $\mathcal{A}$ -mesurables avec  $f = g$   $\mu$  presque partout,  $\int f d\mu$  existe ssi  $\int g d\mu$  existe et dans ce cas,  $\int f d\mu = \int g d\mu$ .

*Démonstration.* Si  $f = g$   $\mu$  presque partout (sur  $A$ ), alors il en est de même pour  $(f^+, g^+)$  et  $(f^-, g^-)$ . Il suffit donc de montrer le lemme pour  $f$  et  $g$  mesurables positives.

$(n1_A)_n$  converge vers  $+\infty 1_A$  donc par limite monotone,

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int n1_A d\mu = \int +\infty 1_A d\mu$$

Donc  $\int f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{A^c} f d\mu = \int_{A^c} f d\mu = \int_{A^c} g d\mu = \int g d\mu$ . ■

Interprétation :

Si  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est  $\tilde{\mathcal{A}}$ -mesurable, alors il existe  $f'$   $\mathcal{A}$ -mesurable tel que  $f = f'$   $\mu$  presque partout.

Si les intégrales existent, on a :

$$\int f d\tilde{\mu} = \int f' d\tilde{\mu} = \int f' d\mu$$

On supposera donc par la suite que  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  est complet.

**THÉORÈME 2.5** (INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TSCHEBYCHEV) Soit  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mesurable et  $a \in ]0, +\infty[$ .

$$\mu(\{|f| \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int |f| d\mu$$

*Démonstration.*

$$\int |f| d\mu \geq \int |f| 1_{\{f \geq a\}} d\mu \geq a \int 1_{\{f \geq a\}} d\mu = a\mu(\{f \geq a\})$$

■

**COROLLAIRE 2.3** Si  $f$  est intégrale alors  $\{|f| = +\infty\}$  est négligeable.

*Démonstration.*  $\mu(\{f = \infty\}) \leq \mu(\{|f| \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int |f| d\mu < \infty$  donc avec  $n \rightarrow +\infty$ , on a le résultat. ■

**COROLLAIRE 2.4** Si  $\int \sum_{n \geq 0} f_n d\mu$  est finie,  $\sum_{n \geq 0} f_n$  est finie presque partout.

*Remarque 2.6* Une fonction intégrable peut prendre des valeurs infinies sur un ensemble négligeable. On peut changer une valeur finie de la fonction sur un ensemble négligeable sans altérer l'intégrabilité.

**Proposition 2.7** Si  $f$  est intégrable,  $\int |f| d\mu = 0$  ssi  $f = 0$   $\mu$  presque partout.

*Remarque 2.7*  $f \mapsto \int |f| d\mu$  n'est pas une norme sur  $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ , c'est une semi-norme.

En quotientant cet espace par la relation  $\sim$  définie par  $f \sim g$  ssi  $f = g$   $\mu$  presque partout, on obtient un espace vectoriel normé.

*Démonstration.*

$\Leftarrow$  Clair.

$\Rightarrow$  Si  $\int |f| d\mu = 0$  alors, par Bienaymé-Tchebychev,  $\mu(\{|f| \geq \frac{1}{n}\}) \leq$

$$\int |f| d\mu = 0.$$

Comme  $\mu(\{|f| \geq \frac{1}{n}\})$  croît vers  $\mu(\{|f| > 0\})$  et par continuité à gauche,  $\mu(\{|f| > 0\}) = 0$ .

Donc  $|f| = 0$   $\mu$ -presque partout. ■

## 2.5 Lemme de Fatou et convergence dominée

**THÉORÈME 2.6** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions intégrables.

- Si  $(f_n)_n$  est minorée par  $g$  intégrable presque partout alors

$$\int \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu$$

- Si  $(f_n)_n$  est majorée par  $g$  intégrable presque partout alors

$$\int \limsup_n f_n \, d\mu \geq \limsup_n \int f_n \, d\mu$$

- Si  $(|f_n|)_n$  est majorée presque partout par  $g$  intégrable positive et si  $f_n$  converge simplement presque partout vers  $f$ , alors

$$\int f \, d\mu = \lim_n \int f_n \, d\mu$$

*Démonstration.*

- Soit  $N_1 = \bigcup_{n \geq 0} \{f_n < g\}$ .  $N_1 \in \mathcal{N}$ .

Soit  $f'_n = f_n$  sur  $N_1^c$  et  $f'_n = g$  sur  $N_1$ .

$f'_n \geq g$  partout et le lemme de Fatou (première version) assure :

$$\int \liminf_n f_n \, d\mu = \int \liminf_n f'_n \, d\mu \leq \liminf_n \int f'_n \, d\mu = \liminf_n \int f_n \, d\mu$$

- Pareil avec  $N_2 = \bigcup_{n \geq 0} \{f_n > g\}$

- $N_3 = \{\liminf_n f_n < \limsup_n f_n\} \cup \left( \bigcup_{n \geq 0} \{|f_n| > g\} \right)$ .

$\mu(N_3) = 0$ . On pose  $f'_n = f_n$ ,  $f' = f$  et  $g' = g$  sur  $N_3^c$  et  $f'_n = g' = f' = 0$  sur  $N_3$ .

$|f'_n| \leq g'$  partout et  $f'_n$  converge simplement vers  $f'$  partout. La convergence dominée (version 1) s'applique et :

$$\lim_n \int f_n \, d\mu = \lim_n \int f'_n \, d\mu = \int f' \, d\mu = \int f \, d\mu \quad \blacksquare$$

## 2.6 Intégrale de Riemann

### 2.6.1 Lien avec l'intégrale de Lebesgue

On considère un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$  (pour simplifier on prend  $[0, 1]$ ).

**Définition 2.10** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

On définit les intégrales supérieures et inférieures d'une subdivision  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  par :

$$I_-(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \inf_{x \in [t_i, t_{i+1}]} f(x)$$

$$I_+(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \sup_{x \in [t_i, t_{i+1}]} f(x)$$

**Définition 2.11**  $f$  est dite Riemann-intégrable ssi les suites  $I_-(f)$  et  $I_+(f)$  convergent vers le même réel quand  $n \rightarrow +\infty$  pour toute subdivision dont le pas  $(\sup_i (t_{i+1} - t_i))$  tend vers 0.

On note alors  $\int_0^1 f(x) dx$  la limite commune.

**Proposition 2.8** Une fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-intégrable est Lebesgue-intégrable et son intégrale de Riemann coïncide avec

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) 1_{[0,1]}(x) \lambda(dx)$$

*Démonstration.* On va montrer qu'il existe  $g$  et  $h$  boréliennes telles que  $g \leq f \leq h$  et  $h = g$   $\lambda$ -presque partout.

Prenons la subdivision de pas constant égal à  $\frac{1}{n}$ . On pose

$$u_i(n) = \inf\{f(x), x \in [t_i, t_{i+1}]\} \text{ et } v_i(n) = \sup\{f(x), x \in [t_i, t_{i+1}]\}$$

Comme  $f$  est Riemann-intégrable,  $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u_i(n)$  et  $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} v_i(n)$  convergent

vers  $\int_0^1 f(x) dx$ .

On peut définir les fonctions  $g_n(x) = u_0(n)$  si  $x \in [t_0, t_1]$  et  $u_i(n)$  si  $x \in ]t_i, t_{i+1}]$  et  $h_n$  la même avec les  $v_i(n)$ .

On a  $g_n \leq f \leq h_n$  donc, comme  $(h_n)_n$  est décroissante et  $(g_n)_n$  est croissante, avec  $g = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$  et  $h = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n$ , on a  $g \leq f \leq h$ .

De plus,  $(g_n)_n$  et  $(h_n)_n$  sont deux suites de fonctions boréliennes donc  $g$  et  $h$  sont aussi boréliennes.

Il reste à montrer que  $\int (h - g) d\lambda = 0$  ce qui assurera  $g = h$   $\lambda$ -presque partout car  $h - g \geq 0$ .

$f$  est bornée sur  $[0, 1]$  donc  $|f| \leq (\sup_{x \in [0,1]} |f|) 1_{[0,1]}$  donc par convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n d\lambda = \int g d\lambda$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int h_n \, d\lambda = \int h \, d\lambda$$

On a  $I_-(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u_i(n) = \int g_n \, d\lambda$  ( $g_n$  en escalier).

Par convergence dominée,  $\int g \, d\lambda = \int_0^1 f(x) \, dx$ .

De même,  $\int h \, d\lambda = \int_0^1 f(x) \, dx$ .

D'où  $\int (g - h) \, d\lambda = 0$ . ■

**Proposition 2.9 (Lebesgue, 1903)** Soit  $f$  bornée sur  $[0, 1]$ .

$f$  est Riemann-intégrable ssi  $f$  est continue  $\lambda$ -presque partout.

*Démonstration.*

- Soit  $f$  une fonction Riemann-intégrable. On appelle oscillation de  $f$  en  $x$  le réel noté  $\omega_f(x)$  définie par :

$$\omega_f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{u, v \in ]x-r, x+r[} |f(u) - f(v)|$$

Si  $A$  est l'ensemble des points de discontinuité de  $f$  alors

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left\{ x \in [0, 1], \omega_f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}}_{=A_n}$$

$A$  est-il Lebesgue mesurable ? Dans le cas affirmatif, il suffit de montrer que  $\lambda(A_n) = 0$ .

Considérons la subdivision de pas constant égal à  $\frac{1}{N}$ . Il y a  $m$  intervalles dans cette subdivision qui intersectent chaque  $A_n$ . Sur chacun de ces intervalles,  $I_+(f) - I_-(f)$  est au moins  $\frac{1}{n}$ . Donc  $I_+(f) - I_-(f) \geq \frac{m}{nN}$ .

Les  $A_n$  sont donc contenus dans une réunion d'intervalles dont la longueur est majorée par  $n(I_+(f) - I_-(f))$  donc la mesure extérieure de  $A_n$  est nulle car  $f$  est Riemann-intégrable.

- admis ■

## 2.6.2 Intégrale impropre généralisée

**Proposition 2.10** Soit  $I$  un intervalle non borné de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction localement Riemann-intégrable.

Si l'intégrale généralisée de  $f$  sur  $I$  (au sens de Riemann) converge absolument, alors  $f$  est Lebesgue-intégrable sur  $I$  et  $\int_I f(x) \, dx = \int f 1_I \, d\lambda$ .

*Remarque 2.8* Quand les intégrales de Riemann et Lebesgue coïncident, on note  $\int f 1_{[a,b]} d\lambda = \int_a^b f(x) dx$  pour tout intervalle de  $\mathbb{R}$ .

### 2.6.3 Intégrales paramétrées

On considère un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et  $f : I \times E \rightarrow \mathbb{R}$  tel que pour tout  $t \in I, x \mapsto f(t, x)$  est mesurable.

#### Continuité

**Proposition 2.11** Si  $t \mapsto f(t, x)$  est continue sur  $I$   $\mu$ -presque partout et que pour tout  $t, |f(t, x)| \leq g(x)$   $\mu$ -presque partout pour  $g \geq 0$  intégrable, alors  $t \mapsto \int f(t, x)\mu(dx)$  est bien définie et continue sur  $I$ .

*Démonstration.* Par convergence dominée,  $\int f(t, x)\mu(dx)$  existe et est finie.

Soit  $(t_n)_n$  une suite de  $I$  convergent vers  $t \in I$  fixé.

Pour tout  $n, |f(t_n, x)| \leq g(x)$   $\mu$ -presque partout et le théorème de convergence dominée assure  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f(t_n, x)\mu(dx) = \int f(t, x)\mu(dx)$ . ■

#### Dérivabilité

**Proposition 2.12** Si  $t \mapsto f(t, x)$  est dérivable sur  $I$   $\mu$ -presque partout et que pour tout  $t, |\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)| \leq g(x)$   $\mu$ -presque partout pour  $g \geq 0$  intégrable, alors  $t \mapsto \int \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\mu(dx)$  est bien définie et vaut  $\frac{\partial}{\partial t} \int f(t, x)\mu(dx)$ .

*Démonstration.* Le théorème des accroissements finie implique que

$$\left| \frac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t} \right| \leq g(x)$$

$\mu$ -presque partout, ce qui conclut avec la même preuve que précédemment. ■

# Chapitre 3

## Produit de mesures, changement de variables et mesures images

### 3.1 Tribu produit

#### 3.1.1 Définitions

On considère une famille finie d'espaces mesurables  $(E_i, \mathcal{A}_i)_i$  et l'espace produit  $F = \prod_{i=1}^n E_i$ . On va munir  $F$  de la tribu produit des  $\mathcal{A}_i$ . Pour cela, on définit les fonctions coordonnées :

$$v_i : \begin{cases} F & \rightarrow E_i \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto x_i \end{cases}$$

**Définition 3.1** On appelle tribu produit  $\mathcal{A}$  des  $(\mathcal{A}_i)_i$  et on note  $\mathcal{A} = \bigotimes_{1 \leq i \leq n} \mathcal{A}_i$

la tribu engendrée par l'algèbre  $\bigcup_{i=1}^n v_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$ .

*Remarque 3.1* C'est la plus petite tribu rendant les  $(v_i)_i$  mesurables.

On va considérer le cas de  $E_i = \mathbb{R}$ , mais on aura besoin de la définition suivante (qui est valable dans le cas général).

**Définition 3.2** On appelle pavé mesurable tout élément de la forme  $\prod_{i=1}^n A_i$  avec  $A_i \in \mathcal{A}_i$  pour tout  $i$ . La base du pavé est donnée par le produit des  $A_i$  qui sont différents de  $E$ .  $n$  est la dimension du pavé.

**Proposition 3.1**  $\mathcal{A}$  est engendrée par les pavés mesurables. Ceci reste vrai pour les pavés mesurables de dimension 1.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des pavés mesurables de  $H$  celui des pavés mesurables de dimension 1.

Si  $A = \prod_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$ ,  $A = \bigcap_{i=1}^n v_i^{-1}(A_i)$  donc  $A \in \mathcal{A}$  donc  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ .

Donc  $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$ .

De plus  $\sigma(H) \subset \sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$ .

Montrons que  $A \subset \sigma(H)$ . Il suffit de montrer que  $v_i^{-1}(A_i) \subset \sigma(H)$ .

Or  $v_i^{-1}(A_i) = E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times A_i \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n$  donc  $v_i^{-1}(A_i) \in \sigma(H)$ . ■

**COROLLAIRE 3.1** La tribu borélienne de  $\mathbb{R}^n$  est égale à  $(\mathcal{B}(\mathbb{R}))^{\otimes n}$ .

*Démonstration.*

$\subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  est engendrée par  $\prod_{i=1}^n A_i$  avec  $A_i$  ouverts.

$\supset$  Il suffit de montrer que les  $v_i$  sont  $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurables. Or elles sont continues donc boréliennes. ■

*Remarque 3.2* Le résultat est vrai dans le cas d'espaces topologiques séparables. (Kallenberg Foundations of modern probability)

### 3.1.2 Associativité du produit de tribus

**Proposition 3.2**  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

*Démonstration.*

$\subset$  Si  $A = \prod_{i=1}^{n+d} A_i$ , alors  $A = A'_1 \times A'_2$  avec  $A'_1 = \prod_{i=1}^d A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  et  $A'_2 =$

$$\prod_{i=d+1}^{d+n} A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Donc  $A$  est un pavé mesurable de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .

$\supset$  Inversement, soit  $C \times D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  mesurable.

On a  $C \times D = (C \times \mathbb{R}^n) \cap (\mathbb{R}^d \times D)$  et il suffit de prouver que  $C \times \mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{R}^n \times D$  sont des boréliens de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+d})$ .

Posons

$$H = \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), C \times \mathbb{R}^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+n})\}$$

et

$$G = \{D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^d \times D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+n})\}$$

Ce sont des tribus (sous-tribus de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  et de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ).

De plus, ces tribus contiennent les pavés mesurables : si  $C = \prod_{i=1}^d C_i$  est un pavé mesurable de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , alors  $C \times \mathbb{R}^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+n})$  est un pavé de dimension au plus  $d$  (de même pour  $G$  et  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ). On conclut que  $H = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  et  $G = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .  
 On a donc  $C \times \mathbb{R}^d \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+n})$  et  $\mathbb{R}^n \times D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+n})$  donc  $C \times D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+n})$ . ■

### 3.1.3 Fonctions mesurables

Soit  $(F, \mathcal{F})$  un espace mesurable et  $(E_i, \mathcal{A}_i)_i$   $d$  mesurables. On pose  $E = \prod_{i=1}^d E_i$  et  $\mathcal{A} = \otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i$ .

#### Cas d'une fonction $F \rightarrow E$

On pose :

$$f : \begin{cases} F & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & (f_1(x), \dots, f_d(x)) \end{cases}$$

**Proposition 3.3**  $f$  est mesurable ssi toutes les  $f_i : F \rightarrow E_i$  le sont.

*Démonstration.*

$\Rightarrow$  Pour tout  $i$ ,  $f_i = p_i \circ f$  donc on a clairement le résultat.

$\Leftarrow$  On doit montrer que  $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$  pour tout  $A \in \mathcal{A}$ . Il suffit de considérer les pavés mesurables de dimension 1.

un tel pavé s'écrit  $B \otimes \bigotimes_{j \neq i} E_j = p_i^{-1}(B)$  avec un  $B \in \mathcal{A}_i$ .

D'où  $f^{-1}(B) = f_i^{-1}(B) \in \mathcal{F}$  car  $f_i$  est mesurable.

Donc  $f$  est mesurable. ■

#### Cas d'une fonction $f : E \rightarrow F$

On pose :

$$f : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ (x_1, \dots, x_d) & \mapsto & f(x_1, \dots, x_d) \end{cases}$$

On considère les restrictions :

$$g_i : \begin{cases} E_i & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d) \end{cases}$$

avec  $(x_k)_{k \neq i}$  fixés.

**Proposition 3.4** Si  $f$  est mesurable, les  $g_i$  le sont aussi pour tous les  $(x_k)_{k \neq i}$ .

*Remarque 3.3* La réciproque est fautive. Prenons  $d = 2$ ,  $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$  munis de la tribu engendrée par les singletons.

Posons  $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$  et  $f = 1_\Delta$ .

$f$  n'est pas mesurable pour la tribu produit car  $\Delta$  n'en est pas un. Cependant, les restrictions sont mesurables : on a  $g_1(x) = 1_\Delta(x, y)$  avec  $y$  fixé.

Donc  $g_1 = 1_{\{y\}}$  est bien mesurable (de même pour  $g_2$ )

*Démonstration.* Soit  $B \in \mathcal{F}$  et montrons que  $g_i^{-1}(B) \in \mathcal{A}_i$  pour tout  $i$ .

On a  $g_i^{-1}(B) = \{x \in E_i, f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d) \in B\} = \{x \in E_i, (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d) \in f^{-1}(B)\}$ .

Notons  $U_i = \{B \in \mathcal{F}, g_i^{-1}(B) \in \mathcal{A}_i\}$ .

Comme  $f$  est mesurable,  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ . Or  $U$  est une tribu qui contient les pavés mesurables car si  $A = \prod_{i=1}^d A_i$  avec  $A_i \in \mathcal{A}_i$ , on a :

$$\left\{ x \in E_i, (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d) \in \prod_{j=1}^d A_j \right\} = A_i \in \mathcal{A}$$

Donc  $U = \mathcal{A}$  et on a la mesurabilité de  $g_i$ . ■

**COROLLAIRE 3.2** Si  $f : E \rightarrow F$  alors toute restriction à un sous-produit de  $E$  est mesurable.

## 3.2 Produit de mesures

### 3.2.1 Définitions

Soit  $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  et  $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  deux espaces mesurés. Posons  $E = E_1 \times E_2$  et  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ .

**Proposition 3.5** Si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont  $\sigma$ -finies<sup>1</sup> sur  $E_1$  et  $E_2$  alors il existe une unique mesure  $\mu$  sur  $\mathcal{A}$  notée  $\mu_1 \otimes \mu_2$  telle que  $\mu(A \times B) = \mu_1(A) \times \mu_2(B)$  pour tout  $A \in \mathcal{A}_1$  et  $B \in \mathcal{A}_2$ .

*Démonstration.*

---

1. Il existe une suite croissante de mesurables de mesure finie dont l'union (infinie) vaut  $E_1$

! Supposons que  $\nu$  est une mesure  $\sigma$ -finie sur  $E$  vérifiant  $\nu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$  pour tout  $A \in \mathcal{A}_1$  et  $B \in \mathcal{A}_2$ .

$\mu$  et  $\nu$  coïncident alors sur l'ensemble des pavés qui est un  $\pi$ -système qui engendre  $\mathcal{A}$ .

Donc  $\mu = \nu$  sur  $\mathcal{A}$  par le :

**THÉORÈME 3.1** (ARGUMENT DE CLASSE MONOTONE) *Le  $\lambda$ -système engendré par un  $\pi$ -système est la tribu engendrée par le  $\pi$ -système.*

appliqué au  $\lambda$ -système  $\{C \in \mathcal{A}, \mu(A) = \nu(A)\}$  et au  $\pi$ -système  $\{\text{pavés où } \mu \text{ et } \nu \text{ coïncident}\}$ .

$\exists$  On prouve d'abord :

**THÉORÈME 3.2** *Soit  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  mesurable.*

$$x \mapsto \int f(x, y)\mu_2(dy) \text{ et } y \mapsto \int f(x, y)\mu_1(dx)$$

sont mesurables.

*Démonstration.* Ces intégrales ont bien un sens car  $y \mapsto f(x, y)$  et  $x \mapsto f(x, y)$  sont mesurables positives.

Notons  $Q = \left\{ A \in \mathcal{A}, x \mapsto \int 1_A(x, y)\mu_2(dy) \text{ mesurable} \right\}$ .

C'est un  $\lambda$ -système car  $1_{A \setminus B} = 1_A - 1_{A \cap B}$  et si  $(A_n)_n$  est croissante,

$$1_{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1_{A_n}.$$

De plus  $Q$  contient les pavés car  $\int 1_{A_1 \times A_2}(x, y)\mu_2(dx) = 1_{A_1}(x)\mu_2(A_2)$  donc  $Q = \mathcal{A}$ .

La mesurabilité est vraie pour les fonctions indicatrices donc pour les fonctions étagées par linéarité et pour les mesurables positives par limite croissante.

On obtient de même la mesurabilité de la deuxième fonction. ■

On pose  $\mu(A) = \iint 1_A(x, y)\mu_2(dy)\mu_1(dx)$  pour tout  $A \in \mathcal{A}$ .

Cette écriture a bien un sens et  $\mu$  est bien une mesure. ■

### 3.2.2 Théorème de Fubini

**THÉORÈME 3.3** (TORELLI) *Si  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  et mesurable alors :*

$$\int f \, d\mu = \iint f(x, y)\mu_1(dx)\mu_2(dy) = \iint f(x, y)\mu_2(dy)\mu_1(dx)$$

*Démonstration.* Soit  $Z$  la fonction  $A \mapsto \iint 1_A(x, y)\mu_1(dx)\mu_2(dy)$ .

$Z$  est une mesure  $\sigma$ -finie et vérifie  $Z(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$  pour tout pavé donc  $Z = \mu$ .

On a donc  $\iint 1_A(x, y)\mu_1(dx)\mu_2(dy) = \iint 1_A(x, y)\mu_2(dy)\mu_1(dx)$  pour tout  $A$ .

C'est donc vrai pour les fonction étagées et donc pour les mesurables. ■

*Remarque 3.4* On redémontre ainsi Beppo-Levi en prenant pour  $\mu_2$  la mesure de comptage.

*Et ça marche même si les intégrales ne convergent pas !*

**COROLLAIRE 3.3 (FUBINI)** Soit  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mesurable.

$f$  est  $\mu$ -intégrable ssi  $x \mapsto \int |f(x, y)|\mu_2(dy)$  est  $\mu_1$ -intégrable ssi  $y \mapsto \int |f(x, y)|\mu_2(dx)$  est  $\mu_2$ -intégrable.

En particulier, ces deux fonctions sont finies  $\mu_1$  et  $\mu_2$  presque partout (par Bienaymé-Tchebychev) et on a :

$$\int f \, d\mu = \iint f(x, y)\mu_1(dx)\mu_2(dy) = \iint f(x, y)\mu_2(dy)\mu_1(dx)$$

*Démonstration.* On applique Torelli à  $|f|$  et on obtient (sans hypothèse d'intégrabilité) :

$$\int |f| \, d\mu = \iint |f(x, y)|\mu_1(dx)\mu_2(dy) = \iint |f(x, y)|\mu_2(dy)\mu_1(dx)$$

D'où les équivalences. La finitude s'en déduit.

On a de plus  $\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$  avec  $f^+$  et  $f^-$  intégrables.

On applique Torelli à  $f^+$  et  $f^-$  et en recombinaison les résultats, on obtient ce qu'on veut. ■

### 3.2.3 Conséquences

- Dans le cas où  $\mu_2$  est la mesure de comptage, alors pour toute fonction mesurable positive  $f$  et pour toute mesure  $\sigma$ -finie  $\mu_1$ ,

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} f(x, n)\mu_1(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} \int f(x, n)\mu_1(dx)$$

- Si  $f$  est de signe quelconque et intégrable par rapport à  $\mu_1 \otimes \mu_2$ , on a le même résultat.

- Si, de plus,  $\mu_1$  est aussi la mesure de comptage, on a  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(n, k) =$

$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(n, k)$  et on a le théorème de Fubini pour les séries doubles.



- Si  $f(x, y) = g(x)h(y)$  alors si  $g$  et  $h$  sont de même signe, mesurables et intégrables par rapport à  $\mu_1$  et  $\mu_2$  (respectivement), alors le théorème de Fubini permet d'écrire :

$$\iint f(x, y)\mu_1(dx)\mu_2(dy) = \left(\int g(x)\mu_1(dx)\right) \left(\int h(y)\mu_2(dy)\right)$$

### 3.3 Formule de changement de variables

On se place dans le cas  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda^d)$ , avec  $D$  et  $\Delta$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^d$  et  $h$  un  $C^1$ -difféomorphisme de  $D$  dans  $\Delta$ .

**Définition 3.3** La matrice Jacobienne de  $h$  en un point  $x \in D$  est la matrice  $J_h(x) = \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$  si  $h = (h_1, \dots, h_d)$  et  $x = (x_1, \dots, x_d)$ .

Dire que  $h$  est un difféomorphisme est équivalent à  $\det(J(x)) \neq 0$  pour tout  $x \in D$ .

**THÉORÈME 3.4** Pour toute fonction  $f$  mesurable positive,

$$\int_{\Delta} f(x)\lambda^d(dx) = \int_D f(h(x))|\det(J_h(x))|\lambda^d(dx)$$

*Remarque 3.5*

- C'est aussi vrai si  $f$  est de signe quelconque telle que  $\int f\lambda^d$  existe.
- Si  $d = 1$ ,  $D = ]a, b[$ ,  $\Delta = ]c, d[$  et  $h$  un  $C^1$ -difféomorphisme de  $D \rightarrow \Delta$ .  $h'$  est continue et  $h'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$  donc  $h'$  garde un signe constant sur  $D$ .

Dans le cas  $h' > 0$ , on a  $\int_c^d f(x) dx = \int_a^b f(h(x))h'(x) dx$ .

Dans le cas  $h' < 0$ , on a

$$\int_c^d f(x) dx = \int_b^a f(h(x))|h'(x)| dx = \int_a^b f(h(x))h'(x) dx$$

- On peut considérer la translation  $h : D \rightarrow y + D$  à  $y \in \mathbb{R}^d$  fixé.  $h$  est un  $C^1$ -difféomorphisme car  $J_h(x) = I_d$ .  
Si de plus  $D = \mathbb{R}^d$ , on a  $\int f(x + y) dx = \int f(x) dx$ . On dit que la mesure de Lebesgue est invariante par translation.
- Si  $h$  est une transformation orthogonale, c'est un  $C^1$ -difféomorphisme (car linéaire).

On a alors  $\int f(x) dx = \int f(h(x)) dx$  car la jacobienne de  $h$  est sa matrice donc de déterminant  $\pm 1$ .

On dit que la mesure de Lebesgue est invariante sous l'action de  $O_d$ .

**Définition 3.4** On dit qu'une mesure  $\mu$  sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  est absolument continue ou à densité par rapport à  $\lambda^d$  ssi il existe une fonction mesurable positive telle que  $\mu = f\lambda^d$  ie  $\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^d} f1_A\lambda^d$ .

En fait,  $g = |J_h|$  est positive borélienne donc  $\int (f \circ h)(x)g(x)\lambda^d(dx) = \int (f \circ h)(x)\mu(dx)$  avec  $\mu$  la mesure de densité  $g$  par rapport à  $\lambda^d$ .

On a  $\int_{\Delta} (f \circ h)(x)\mu(dx) = \int_D f(x)\lambda^d(dx)$ . On dit qu'on fait le transport de  $\lambda^d$  par  $h$ .

Plus généralement, si  $\mu = \nu \circ h^{-1}$ ,  $\mu$  est appelée mesure image par  $h$  de  $\nu$ .

**THÉORÈME 3.5** Si  $\mu$  est la mesure image d'une mesure  $\nu$  par une fonction  $h$  mesurable, on a  $\int_E (f \circ h)(x)\nu(dx) = \int_F f(x)\mu(dx)$ .

*Démonstration.* C'est clairement vrai pour les indicatrices, donc pour les fonctions étagées.

Par limite monotone, c'est vrai pour  $f$  mesurable positive. ■

**THÉORÈME 3.6** L'image de  $\lambda^d$  par  $h^{-1}$  est une mesure à densité par rapport à  $\lambda^d$  et cette densité est donnée par  $|J_h|$ , ce qui est équivalent à :

$$\int_{h(\Delta)} f(x) dx = \int_{\Delta} f(h(x))|J_h(x)| dx$$

*Démonstration.*

- Il suffit de le prouver dans le cas où  $\Delta$  est une boule ouverte. En effet, supposons que c'est vrai pour les  $B(y, r)$ .

On sait que  $\Delta$  peut être recouvert par un nombre dénombrable de boules ouvertes (ou fermées)  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

On pose  $A_1 = B_1$ ,  $A_2 = B_2 \cap A_1^c$ , et pour tout  $k$ ,  $A_k = B_k \cap \left( \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j^c \right)$ .

Les  $A_n$  forment une partition dénombrable de  $\Delta$  constituée de bornés.

Par hypothèse,

$$\int_{h(B_j)} f(x)1_{h(A_j)}x dx = \int f(h(x))1_{h(A_j)}(h(x))|J_h(x)| dx$$

Or  $1_{h(A_j)}(h(x)) = 1_{A_j}(x)$  donc  $\int_{h(A_j)} f(x) dx = \int_{A_j} (f \circ h)(x)|J_h(x)| dx$ .

De plus, les  $(h(A_i))_i$  forment une partition de  $D$  donc en sommant sur  $j$ , on a le résultat.

- Par récurrence sur  $d$ .

- Cas  $d = 1$ .  $\Delta$  est un ouvert donc pour tout  $x \in \Delta$ , on peut trouver  $r$  tel que  $T = [x - r, x + r] \subset \Delta$ .

L'image de  $I$  par  $h$  est un compact  $J = [c, b]$ .

Il suffit de montrer le résultat pour  $f = 1_A$ .

$A$  est borélien et comme  $\{] - \infty, a], a \in \mathbb{R}\}$  engendre  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , il suffit de prendre  $A = ] - \infty, a]$  car on va montrer que les mesures définies par :

$$\mu(A) = \int_J 1_A(y) dy$$

$$\nu(A) = \int_I 1_A(h(y)) |h'(y)| dy$$

En effet,  $\mu(\mathbb{R}) = \lambda(J) < +\infty$  et  $\nu(\mathbb{R}) = \int_I |h'(y)| dy < +\infty$  par continuité de  $h'$ .

De plus,  $\mu(] - \infty, a]) = \int_{\mathbb{R}} 1_{] - \infty, a] \cap J}(y) dy$  et

$$\nu(] - \infty, a]) = \int_{\mathbb{R}} 1_{] - \infty, a]}(h(y)) |h'(y)| dy = \int_{\mathbb{R}} 1_{] - \infty, a] \cap J}(h(y)) |h'(y)| dy$$

Si  $] - \infty, a] \cap J = \emptyset$  alors  $\mu(] - \infty, a]) = \nu(] - \infty, a]) = 0$ .

Sinon,  $] - \infty, a] \cap [c, b] = [c, a]$  (ou  $[c, b]$  mais on s'en fiche).

On a :

$$\mu(A) = \int_c^a dy = a - c$$

$$\nu(A) = \int_{h^{-1}(c)}^{h^{-1}(a)} h'(y) dy = h(h^{-1}(a)) - h(h^{-1}(c)) = a - c$$

Donc c'est vrai.

- Supposons que c'est vrai au rang  $d - 1$ .

$h$  est un difféomorphisme de  $\Delta \rightarrow D$  donc  $\det(J_h(x)) \neq 0$  pour tout  $x \in \Delta$ . En particulier, pour tout  $j$ , il existe  $i$  tel que  $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) \neq 0$ .

On va utiliser le théorème :

**THÉORÈME 3.7 (DES FONCTIONS IMPLICITES)** Soit  $f$  un difféomorphisme de  $E \rightarrow F$  avec  $E$  et  $F$  des espaces de Banach.

Si la différentielle de  $h$  est un homéomorphisme en  $x \in E$ , alors il existe  $V$  voisinage de  $x$  tel que  $f$  soit inversible de  $V(x)$  dans  $f(V(x))$ .

Posons  $\theta = x \mapsto (h(x), x_2, \dots, x_d)$ .  $\det(J_\theta(x)) = \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \neq 0$  pour tout  $x \in \Delta$ .

Par le théorème précédent, il existe  $m$  réciproque de  $\theta$  sur  $\Delta$ .

Soit  $x \in D$  et  $B(x, r) \subset \Delta$ . Posons  $\varphi = h \circ m$  et  $C$  et  $G$  les images de  $B(x, r)$  par  $\theta$  et  $h$ .

Posons  $K_1 = \{y_1, y \in B(x, r)\}$  à  $(y_2, \dots, y_d)$  fixés et

$$K_2 = \{(y_2, \dots, y_d), K_1 \neq \emptyset\}$$

On a :

$$\begin{aligned} & \iint_{K_2 \times K_1} (f \circ h)(x_1, \dots, x_d) |J_h(x)| \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_d \\ &= \iint_{K_2 \times K_1} (f \circ \varphi \circ \theta)(x_1, \dots, x_d) |J_\varphi(\theta(x))| |J_\theta(x)| \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n \\ &= \iint_{K_2 \times K_1} (f \circ \varphi)(x) |J_\varphi(x)| \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n \end{aligned}$$

$$\text{Or } \iint_{K_2 \times K_1} (f \circ h)(x_1, \dots, x_d) |J_h(x)| \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_d = \iint_{K_1 \times K_2} (f \circ h)(x_1, \dots, x_d) |J_h(x)| \, dx_2 \cdots dx_d \, dx_1.$$

Par hypothèse de récurrence, l'intégrale sur  $K_2$  est égale à ce qu'il faut pour avoir le résultat. ■

# Chapitre 4

## Mesures de probabilité

### 4.1 Fonctions de répartition

**Définition 4.1** Une mesure  $\mu$  sur  $(E, \mathcal{A})$  est dite de probabilité ssi  $\mu(E) = 1$ .

**Proposition 4.1** Toute mesure finie non nulle peut être normalisée par sa masse totale. On obtient ainsi une mesure de probabilité.

**Définition 4.2** À toute mesure de probabilité, on associe sa fonction de répartition :

$$F_\mu : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & [0, 1] \\ x & \mapsto & \mu(] - \infty, x]) \end{cases}$$

**Proposition 4.2** Si deux mesures finies ont le même fonction de répartition, alors elles coïncident sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Étant donné  $F$ , à quelles conditions existe-t-il  $\mu$  de probabilité tel que  $F = F_\mu$ .

**Proposition 4.3**

- $F_\mu$  est croissante.
- $F_\mu$  est continue à droite et a une limite à gauche en tout point.
- $F_\mu$  a un saut en  $x$  d'amplitude  $\mu(\{x\})$ .
- $F_\mu$  est continue ssi  $\mu(\{x\}) = 0$  pour tout  $x$ .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \mu(E) = 1$ .

*Démonstration.*

- Clair car  $\mu$  est croissante.
- Si  $(x_n)_n$  est décroissante et converge vers  $x$ , comme  $\mu(] - \infty, x_0])$  est fini,  $F_\mu(x_n)$  tend vers  $\mu(] - \infty, x]) = F_\mu(x)$ .

- Si  $(x_n)_n$  est croissante et converge vers  $x$ ,  $] - \infty, x_n]$  tend vers  $] - \infty, x[$ ,  $F_\mu(x_n)$  a une limite  $(\mu(] - \infty, x[))$ .
- Conséquence du point précédent puisque  $\mu(] - \infty, x[) = F_\mu(x) - \mu(\{x\})$ .
- Le reste est clair. ■

**THÉORÈME 4.1** Soit  $F ; \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  croissante, bornée, continue à droite et telle que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ . Il existe une unique mesure finie  $\mu$  sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  telle que  $F = F_\mu$ .

*Démonstration.*

! On a déjà vu.

∃ On introduit sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$  :

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (F(b_i) - F(a_i)), A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} ]a_i, b_i] \right\}$$

$\mu^*$  est une mesure extérieure et sa restriction à  $\mathcal{M}(\mu^*)$  (tribu de Carathéodory) est une mesure.

On vérifie que  $] - \infty, x]$  avec  $x \in \mathbb{R}$  sont dans  $\mathcal{M}(\mu^*)$  donc  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mu^*)$ .

Il faut prouver que  $F(x) = \mu(] - \infty, x])$  pour tout  $x$ .

• On a clairement  $\mu(]a, b]) \leq F(b) - F(a)$ . Il reste à prouver que  $\mu(]a, b]) \geq F(b) - F(a)$ .

• Soit  $(]x_n, y_n])_n$  un recouvrement dénombrable de  $]a, b]$  et  $\varepsilon \in ]0, b - a[$ . Pour tout  $n$ , on peut trouver  $z_n > y_n$  tel que  $F(z_n) \leq F(y_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$  (par continuité à droite de  $F$ ).

Comme  $[a + \varepsilon, b]$  est compact inclus dans  $]a, b]$ , on peut extraire un recouvrement fini de  $(]x_n, z_n])_n$  qui recouvre  $[a + \varepsilon, b]$ .

On a  $F(b) - F(a + \varepsilon) \leq \sum_{finie} (F(z_i) - F(x_i))$ .

Donc  $F(b) - F(a + \varepsilon) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} (F(z_i) - F(x_i)) \leq \sum_{i \geq 0} (F(y_i) - F(x_i)) + 2\varepsilon$ .

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, comme  $F$  est continue à droite,  $F(b) - F(a) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} (F(y_i) - F(x_i))$  pour tout recouvrement  $(]x_i, y_i])_i$ .

Donc  $F(b) - F(a) \leq \mu(]a, b])$ .

Donc  $F(b) - F(a) = \mu(]a, b])$ .

En faisant tendre  $a$  vers  $-\infty$ , comme  $\mu$  est croissante et  $F$  tend vers 0 en  $-\infty$ , on a  $F(b) = \mu(] - \infty, b])$ . ■

**Définition 4.3** (Intégrale de Stieltjes) Si  $F$  est une fonction de répartition alors on définit pour toute fonction borélienne positive  $f$  :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} \mu(dx)$$

avec  $\mu$  telle que  $F = F_{\mu}$ .

*Remarque 4.1* Si  $\mu$  est une mesure finie de densité  $h$  par rapport à la mesure de Lebesgue, alors on pose :

$$F_{\mu}(x) = \int_{-\infty}^x h(u) du$$

*Si  $h$  est continue,  $F_{\mu}$  est dérivable d'après Riemann.*

*Si  $h$  est seulement borélienne,  $F_{\mu}$  est dérivable presque partout,  $F'_{\mu} = h$  en tout point de dérivabilité et  $\int f(x) dF(x) = \int f(x)h(x) dx$ .*

## 4.2 Mesure de Radon

**Définition 4.4** On dit qu'une mesure est de Radon ssi elle est finie sur les compacts.

**Définition 4.5** Soit  $\mu$  de Radon sur  $\mathbb{R}$ .

On définit la fonction de répartition généralisée de  $\mu$  par  $F_{\mu}(x) = \mu([0, x])$  si  $x \geq 0$  et par  $\mu(]x, 0])$  si  $x < 0$ .

*Remarque 4.2* Si  $\mu$  est finie sur  $\mathbb{R}$ ,  $\mu$  est de Radon sur  $\mathbb{R}$  et  $F_{\mu}$  coïncide à une translation près à la fonction de répartition de  $\mu$ .

**Proposition 4.4**  $F_{\mu}$  est croissante, continue à droite,  $F_{\mu}(0) = 0$  et  $F_{\mu}(0^-) \leq 0$ .

**THÉORÈME 4.2** Soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  croissante continue à droite telle que  $F(0) = 0$ .

*Il existe une unique mesure de Radon sur  $\mathbb{R}$  telle que  $F = F_{\mu}$ .*

**THÉORÈME 4.3** RIESZ Soit  $E$  un espace localement compact. Si  $\mu$  est une mesure sur  $\mathcal{B}(E)$ , on peut définir  $J(f) = \int f d\mu$ .

*Si  $\mu$  est de Radon et  $f$  continue à support compact,  $J(f)$  existe.*

$J$  définit une forme linéaire positive continue sur l'ensemble des fonctions continues à support compact noté  $C_c(E)$ .

**THÉORÈME 4.4** DE REPRÉSENTATION Toute forme linéaire continue positive sur  $C_c(E)$  avec  $E$  localement compact séparable est de la forme  $J_{\mu}$  où  $\mu$  est une mesure de Radon régulière sur  $\mathcal{B}(E)$ .

Conséquence :  $I : f \mapsto \int f(x) dx$  (au sens de Riemann) pour  $f \in C_c(\mathbb{R})$ .

$I$  est une forme linéaire continue positive sur  $C_c(\mathbb{R})$  donc il existe  $\mu$  de Radon telle que  $J_\mu(f) = I(f)$ .

$\mu$  est la mesure de Lebesgue.