ALBI
L3, semestre 1 (2024-2025) - Groupe magistère
Université de Rennes - ENS Rennes

TD 1 : Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel. Soit $X = \{x_1, \cdots, x_m\} \subset E$ une famille libre, et soit $Y \subset E$ une famille génératrice. On suppose Y de cardinal fini n, et on note $Y = \{y_1, \cdots, y_n\}$.

1. Montrer que, quitte à permuter les y_i, la famille $\{x_1, y_2, \cdots, y_n\}$ engendre E.

2. Supposons que $m > n$. Montrer que, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, et toujours quitte à permuter les y_i, la famille $\{x_1, \cdots, x_k, y_{k+1}, \cdots, y_n\}$ engendre E.

3. En déduire que $m \leqslant n$, puis que toutes les bases de E ont même cardinal.

Exercice 2

Soient E, E' des espaces vectoriels sur K. Soit $X \subset E$. On considère l'application « restriction à X » :

$$r_X \ : \ \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,E') & \to & \mathcal{F}(X,E') \\ f & \mapsto & f_{|X} \ : \ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que si X est libre, alors r_X est surjective.

2. Démontrer que si X est génératrice, alors r_X est injective.

3. Les réciproques des résultats précédents sont-elles vraies ?

Exercice 3

Soient $E_1, \dots, E_r$ des K-espaces vectoriels. Soit $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r$.

1. Pour $1 \leq i \leq r$, on note $\tilde{E}_i = \{0\} \times \cdots \times E_i \times \cdots \times \{0\}$. Justifier que $\tilde{E}_i$ est un sous-espace vectoriel de E et exhiber un isomorphisme de E_i vers $\tilde{E}_i$.

2. Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^r \tilde{E}_i$.

Exercice 4

Soient E, E' des K-espaces vectoriels. Soient E'_1, E'_2 des sous-espaces de E'.

1. Montrer que $\mathcal{L}(E, E'_1)$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E, E')$.

2. On suppose que $E' = E'_1 \oplus E'_2$. Montrer que $\mathcal{L}(E, E') = \mathcal{L}(E, E'_1) \oplus \mathcal{L}(E, E'_2)$.

On se donne maintenant E_1, E_2 des sous-espaces vectoriels de E.

3. Montrer que l'application « restriction à E_1 » : $\mathcal{L}(E, E') \to \mathcal{L}(E_1, E')$ est linéaire et surjective.

4. On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$. Montrer que l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,E') & \to & \mathcal{L}(E_1,E') \times \mathcal{L}(E_2,E') \\ f & \mapsto & (f_{|E_1}, f_{|E_2}) \end{array}$$

est un isomorphisme.

5. Ces résultats se généralisent-ils aux sommes plus que 2 sous-espaces ?

Exercice 5

Soient E, E' des K-espaces vectoriels, et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. On note π la projection canonique de E vers E/F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$. On suppose que $F \subset \ker u$.

1. Soient $x, y \in E$. On suppose que $\pi(x) = \pi(y)$, montrer que $u(x) = u(y)$.

2. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire $\tilde{u} : E/F \to E'$ telle que $u = \tilde{u} \circ \pi$.

Exercice 6

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et soit $F \subset E$ stable par u. On note π la projection canonique de E vers E/F.

1. Montrer que $F \subset \ker(\pi \circ u)$.

2. En déduire qu'il existe un endomorphisme $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E/F)$ tel que $\pi \circ u = \tilde{u} \circ \pi$.

3. On suppose E de dimension finie. Que peut-on dire du polynôme caractéristique et du polynôme minimal de $\tilde{u}$?

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On note $\pi : E \to E/F$ la projection canonique. Soit G un sous-espace vectoriel de E. On considère la restriction π_G de π à G : $\pi_G : G \to E/F$.

1. Démontrer que π_G est surjective si et seulement si $E = F + G$.

2. Démontrer que π_G est injective si et seulement si F et G sont en somme directe.

3. En déduire que $\dim E/F + \dim F = \dim E$.

4. En déduire le théorème du rang.

Exercice 8

Soit E de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On fixe une base de E. Décrire la matrice de ${}^t u$ dans sa base duale.

2. Montrer que ${}^t({}^t u)$ s'identifie à u par l'isomorphisme canonique de E avec son bidual.

Exercice 9

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Pour toute base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$, on note $\varphi_{\mathcal{B}} : E \to E^*$ l'isomorphisme défini par $e_i \mapsto e_i^*$.

1. Soient $\mathcal{B}_1 = (e_i)$, $\mathcal{B}_2 = (f_i)$ deux bases de E. Soit $u \in GL(E)$ défini par $u(e_i) = f_i$. Montrer que ${}^t u \varphi_{\mathcal{B}_2} u = \varphi_{\mathcal{B}_1}$.

2. Soit $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u)$. Déduire de ce qui précède que $\varphi_{B_1} = \varphi_{B_2}$ si et seulement si ${}^t M M = I_n$.

3. En déduire qu'il n'existe pas d'isomorphisme $E \to E^*$ qui envoie toute base sur sa base duale.

Exercice 10

Soit E de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $A \subset E$ un sous-ensemble de E, on définit $A^0 \subset E^*$ comme l'ensemble des $\varphi \in E^*$ telles que pour tout $x \in A$, $\varphi(x) = 0$.

1. Décrire E^0 et $\{0\}^0$.

2. Montrer que A^0 est un sous-espace vectoriel de E^*.

3. Montrer que si $B \subset A$, alors $A^0 \subset B^0$.

4. Montrer que si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, alors $(F^0)^0$ s'identifie à F par l'isomorphisme canonique de E avec son bidual.
5. Montrer que si $F, G \subset E$ sont des sous-espaces vectoriels, alors $(F+G)^0 = F^0 \cap G^0$.
6. Montrer que $\dim F^0 + \dim F = \dim E$.
7. Redémontrer ce résultat en considérant l'application « restriction à F » : $E^* \to F^*$.

Exercice 11
1. Pour $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$. Justifier qu'il existe une unique forme linéaire $\varphi_a : K[X] \to K$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\varphi_a(X^i) = a_i$.
2. Montrer que $a \mapsto \varphi_a$ définit un isomorphisme $K^{\mathbb{N}} \to K[X]^*$.
3. Pour $\lambda \in K$, on considère $a_\lambda = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier que la famille $(a_\lambda)_{\lambda\in K}$ est libre.
4. On suppose K non dénombrable. Justifier que $K[X]$ et $K[X]^*$ ne sont pas isomorphes.
5. Traiter le cas où K est dénombrable (on pourra montrer que $K[X]$ est dénombrable et que $K[X]^*$ ne l'est pas).

Exercice 12
Soit E, E' des K-espaces vectoriels, et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Montrer que $F \otimes E'$ s'identifie naturellement à un sous-espace vectoriel de $E \otimes E'$ et que :

$$(E \otimes E')/(F \otimes E') \simeq (E/F) \otimes E'.$$

Exercice 13
Soient E, F des K-espaces vectoriels de dimension finie.
1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $F \otimes E^* \to \mathcal{L}(E,F)$ qui envoie $y \otimes \varphi$ sur $\varphi(\cdot)y$ pour tout $(y,\varphi) \in F \times E^*$.
2. En déduire que $\mathcal{L}(E,F) \simeq F \otimes E^*$.
3. On fixe une base de E et une base de F. Donner la base de $\mathcal{L}(E,F)$ obtenue par l'isomorphisme précédent, et donner la décomposition de $u \in \mathcal{L}(E,F)$ sur cette base.
4. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire t sur $E \otimes E^*$ telle que $t(y \otimes \varphi) = \varphi(y)$ pour tout $(y,\varphi) \in E \times E^*$.
En composant les applications précédentes, on définit une forme linéaire, notée T, sur $\mathcal{L}(E)$.
5. On fixe une base de E. En utilisant cette base et sa base duale, donner une formule pour $T(u)$ pour $u \in \mathcal{L}(E)$.
6. Identifier la forme linéaire T.

Exercice 14
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(E',F')$. On fixe des bases de E, F, E', F' (supposés de dimension finie) ainsi que les matrices de u et v dans ces bases.
1. Décrire la matrice de $u \otimes v$ dans les bases associées de $E \otimes E'$ et $F \otimes F'$.
2. On suppose désormais que $E = F$ et $E' = F'$. Déduire du calcul précédent que $\mathrm{Tr}(u \otimes v) = \mathrm{Tr}(u)\mathrm{Tr}(v)$.
3. Calculer $\det(u \otimes v)$.
Indication : on pourra commencer par montrer que $u \otimes v = (\mathrm{id}_F \otimes v) \circ (u \otimes \mathrm{id}_{E'})$.

Exercice 15

On note (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) les bases canoniques respectives de $\mathbf{R}^3$ et de $\mathbf{R}^2$. Soit $u\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans ces bases est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice de $\bigwedge^2(u)\colon \bigwedge^2(\mathbf{R}^3) \to \bigwedge^2(\mathbf{R}^2)$ dans les bases $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$ et $(f_1 \wedge f_2)$.

Exercice 16

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. On identifie $\bigwedge^n E$ à K.

1. En considérant l'application

$$\begin{array}{ccc} E^{n-1} & \to & E^* \\ (x_2, \dots, x_n) & \mapsto (x & \mapsto x \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n) \end{array},$$

montrer qu'on a un isomorphisme naturel $\bigwedge^{n-1} E \simeq E^*$.

2. En déduire qu'on a un isomorphisme naturel $E \simeq \left(\bigwedge^{n-1} E\right)^*$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$x_1 \wedge u(x_2) \wedge \cdots \wedge u(x_n) = v(x_1) \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n.$$

4. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ comme dans la question précédente. Montrer que $v \circ u = \det(u) id$.

5. On fixe une base de E, donner les coefficients de la matrice de v dans cette base en fonction de ceux de la matrice de u.

Exercice 17

Donner une formule pour l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$ lorsque son déterminant est non nul.

Exercice 18

Déterminer une base de l'image et du noyau des matrices réelles suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 12 \end{pmatrix}$

Exercice 19

On considère les sous espaces F et G de $\mathbb{R}^4$, F étant engendré par :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

et G engendré par :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les dimensions de F et G.

2. Montrer que $F \subset G$.

3. Donner une base d'un supplémentaire de F dans G.