

ALBI

L3, semestre 1 (2024-2025) - Groupe magistère

Université de Rennes - ENS Rennes

TD 4 : Espaces hermitiens et euclidiens

Exercice 1

Soit E un espace hermitien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. On dit que u est positif (resp. défini positif) si la forme sesquilinéaire $(x, y) \mapsto \langle u(x), y \rangle$ est positive (resp. définie positive).

1. Démontrer que u est positif (resp. défini positif) si et seulement si ses valeurs propres sont toutes positives (resp. strictement positives).
2. On suppose u défini positif, démontrer qu'il existe un unique s défini positif tel que $s^2 = u$.
3. Que dire si u est seulement supposé positif ?

Exercice 2

Soit E un espace hermitien, et $u \in GL(E)$. On veut démontrer qu'il existe un unique couple (s, u) tel que s soit autoadjoint défini positif, v unitaire, et $sv = u$.

1. Démontrer que si on a une telle décomposition, alors $s^2 = uu^*$.
2. Démontrer que uu^* est défini positif, et en déduire l'existence et l'unicité de s .
3. Conclure.

Exercice 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont unitairement semblables.

1. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et $A^T = PB^TP^{-1}$.
2. Soit $P = OS$ la décomposition polaire de P . Montrer que B commute avec S .
3. Montrer que A et B sont orthogonalement semblables.

Exercice 4

Soient E, F des espaces euclidiens (ou hermitiens) et soit $u : E \rightarrow F$ linéaire. On se donne $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases orthonormées respectives de E et F .

1. Démontrer que $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(u^*) = \overline{\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(u)}^T$.
2. On suppose que $E = F$ est **euclidien** de dimension 2 et que u est normal et n'est pas diagonalisable. Démontrer que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^\times$.

Exercice 5

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien. On munit $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} E$ de sa structure canonique de $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

1. Démontrer qu'il existe une unique application $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_{\mathbb{C}}} : E_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ -bilinéaire, telle que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $x, y \in E$, $\langle \lambda \otimes x, \mu \otimes y \rangle = \lambda \bar{\mu} (x|y)$.
2. Démontrer que cette application est l'unique produit hermitien sur $E_{\mathbb{C}}$ tel que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle 1 \otimes x, 1 \otimes y \rangle = (x|y)$.
3. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Démontrer que $(1 \otimes e_1, \dots, 1 \otimes e_n)$ est une base orthonormée de $E_{\mathbb{C}}$.

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, démontrer que $(id \otimes u)^* = id \otimes u^*$.

Exercice 6

Soit E un espace euclidien, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. On suppose que π_u est de degré 2 et sans racines réelles.

1. Démontrer que uu^* possède une valeur propre réelle, que l'on notera λ .
2. Soit $x \in E$ un vecteur propre associé à λ , démontrer que la famille $\{x, u(x)\}$ est libre. On note V le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 qu'elle engendre.
3. Démontrer que $V = \text{Vect}\{u(x), u^2(x)\}$, et en déduire que V est stable par u et par u^* .
4. Démontrer par récurrence sur $\dim E$ qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant tous égaux à une même matrice de similitude.

Exercice 7

Soit E un espace euclidien.

1. Justifier l'identité du parallélogramme :

$$\forall x, y \in E, \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2) = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2.$$

Soit $x \in E$ et $r > 0$, on note $B(x, r)$ la boule de centre x et de rayon r .

2. Justifier que pour tous $y, z \in B(x, r)$, on a $\|y - z\|^2 \leq 4r^2 - 4 \left\| x - \frac{y+z}{2} \right\|^2$. Soit $C \subset E$ une partie convexe et fermée et $\delta = \inf_{y \in C} \|y - x\|$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n = B(x, \delta + 1/n)$.
3. Montrer que si $y, z \in B_n \cap C$, on a $\|y - z\|^2 = \mathcal{O}(1/n)$.
4. En déduire qu'il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = \delta$.
5. Soit $z \in C$. En considérant l'élément $z' = ty + (1-t)z \in C$, montrer que

$$\langle x - y, z - y \rangle \leq 0.$$

Exercice 8

Soit E un espace euclidien. On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne. On rappelle que l'enveloppe convexe d'une partie X de E est l'intersection de tous les convexes de E contenant X .

1. Montrer que pour tout $u \in O(E)$, $\|u\| = 1$.
2. En déduire que l'enveloppe convexe de $O(E)$ est contenue dans la boule unité de $\mathcal{L}(E)$. On munit $\mathcal{L}(E)$ du produit scalaire $(u|v) = \text{Tr}(u^*v)$. Notons C l'enveloppe convexe de $O(E)$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on suppose qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E)^*$ tel que pour tout $o \in P(E)$, $\varphi(u) > \varphi(o)$. Exhiber un convexe contenant $O(E)$ mais pas u .
4. Réciproquement, on suppose que $u \notin C$, montrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $o \in O(E)$, $\varphi(u) > \varphi(o)$.

Indication. On pourra utiliser la projection sur un convexe fermé.

Le but de la fin de l'exercice est de montrer que C est la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ (pour la norme subordonnée à la norme euclidienne).

5. Justifier le fait qu'il suffit de montrer que

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \|u\| \leq 1 \Rightarrow \forall v \in \mathcal{L}(E), \operatorname{Tr}(vu) \leq \sup_{o \in O(E)} \operatorname{Tr}(vo)$$

On fixe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\| \leq 1$.

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ dont on écrit une décomposition polaire $v = s\omega$. On fixe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de s .

6. Montrer que pour $o \in O(E)$, on a $\operatorname{Tr}(vo) \geq \sum_{i=1}^n \|s(e_i)\|$.

7. Montrer que $\operatorname{Tr}(vu) = \sum_{i=1}^n \langle v(e_i), u^*(e_i) \rangle$.

8. En déduire que $\operatorname{Tr}(vu) \leq \sum_{i=1}^n \|v(e_i)\|$ et conclure.

Exercice 9

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$.

1. Montrer que l'application

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle gx, gy \rangle$$

est un produit scalaire sur E .

2. Montrer que le produit scalaire précédent, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ est invariant par tous les éléments de G (c'est-à-dire que pour tous $x, y \in E$ et pour tout $g \in G$, on a $\langle x, y \rangle_G = \langle gx, gy \rangle_G$).

3. En déduire que G est conjugué à un sous-groupe de $O(E)$ (c'est-à-dire qu'il existe un sous-groupe H de $O(E)$ et un élément $u \in GL(E)$ tel que $uGu^{-1} = H$).

Remarque. On peut montrer (mais c'est plus difficile) que ce résultat reste vrai dans le cas où G est seulement supposé compact.

Exercice 10

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, et pour $n \geq 0$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$. On définit sur $E \times E$ l'application :

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

On fixe un entier $n \geq 0$.

1. Montrer que la restriction à $E_n \times E_n$ de l'application précédente fait de E_n un espace euclidien.

2. Pour tout $0 \leq i \leq n$, on note P_i le polynôme obtenu en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(1, X, \dots, X^n)$ de E_n . Montrer que P_n a n racines réelles distinctes dans l'intervalle $]0, 1[$.

3. On note $x_1, \dots, x_n$ les racines de P_n . Montrer qu'il existe une unique famille de nombres réels $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ tels que pour tout $P \in E_{n-1}$, $\int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=1}^n \omega_i P(x_i)$.

4. En utilisant la division euclidienne par P_n , montrer que la formule précédente reste valable pour $P \in E_{2n-1}$. Montrer que la formule n'est pas valable pour $P \in E_{2n}$.

5. Montrer que s'il existe $x'_1, \dots, x'_n \in \mathbb{R}$ et $\omega'_1, \dots, \omega'_n$ tels que pour tout $P \in E_{2n-1}$ on ait $\int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=1}^n \omega'_i P(x'_i)$, alors nécessairement les x'_i sont les x_i et les ω'_i sont les ω_i .

Exercice 11

Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré. On rappelle qu'un sous-espace totalement isotrope de E est un sous-espace vectoriel de E constitué de vecteurs isotropes.

1. Expliquer pourquoi tout sous-espace totalement isotrope est contenu dans un sous-espace totalement isotrope maximal pour l'inclusion.
2. Soient F, F' deux sous-espaces totalement isotropes de E . On suppose que $\dim F \leq \dim F'$. Montrer qu'il existe une isométrie u de E telle que $u(F) \subset F'$.
3. En déduire que le groupe des isométries de E opère transitivement sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de E , et qu'ils ont donc tous la même dimension.

Exercice 12

Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré, que l'on suppose isométrique à la somme directe orthogonale :

$$\left(\bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathbf{H}_i \right) \oplus F,$$

avec F anisotrope et les $\mathbf{H}_i$ sont des plans hyperboliques.

1. Montrer que E a un sous-espace totalement isotrope maximal de dimension r .
2. En déduire que la dimension des sous-espaces totalement isotropes maximaux de E est égale à son indice d'isotropie.
3. On suppose que E est un espace quadratique réel (non dégénéré) de signature (s, t) . Montrer que son indice d'isotropie est $\min\{s, t\}$.
4. On suppose que E est un espace quadratique complexe (non dégénéré) de dimension n . Déterminer son indice d'isotropie.

Exercice 13

D'après le théorème de Witt, étant donné (E, q) non dégénéré de dimension finie, il existe un espace quadratique anisotrope, unique à isométrie près, tel que $E = F \oplus H$ où H est un espace hyperbolique.

On appelle *partie anisotrope* de E la classe d'isométrie de sous-espace de E . Deux espaces quadratiques sont dit Witt-équivalents s'ils ont la même partie anisotrope.

1. Montrer que la Witt-équivalence est une relation d'équivalence, et que deux espaces quadratiques isométriques sont Witt-équivalents.
2. Montrer que l'ensemble des classes de Witt-équivalence d'espaces quadratiques non dégénérés de dimension finie sur un corps K fixé, muni de l'opération induite par la somme directe orthogonale, forme un groupe abélien.

Ce groupe s'appelle le *groupe de Witt* de K , on le note $W(K)$.

3. Montrer que $W(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et que $W(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}$.
4. Déterminer $W(\mathbb{F}_p)$ pour p premier impair (on pourra distinguer les cas selon que -1 est ou non un carré dans $\mathbb{F}_p$).