

TD 1 : Espaces vectoriels normés et complétude

Exercice 3 :
Comparaison de normes mixtes

On se place sur l'espace $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$. Pour $a \in [0, 1]$ et $f \in E$, on pose :

$$N_a(f) = \int_0^a |f(t)| dt + \sup_{x \in [a, 1]} |f(x)|.$$

1. Montrer que pour tout $a \in [0, 1]$, N_a est bien définie et qu'il s'agit d'une norme sur E .
2. Comparer N_a et N_b pour $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Correction :

1. Cela découle facilement du fait que l'on somme la norme L^1 de la restriction de f à $[0, a]$ et la norme infinie de sa restriction à $[a, 1]$.
2. Lorsque $a = b$, les normes sont égales, donc leur équivalence ne fait aucun doute ! On s'intéresse donc plutôt au cas $a < b$. Pour tout $f \in E$, on a

$$\begin{aligned} N_b(f) &= \int_0^b |f(t)| dt + \sup_{x \in [b, 1]} |f(x)| = \int_0^a |f(t)| dt + \int_a^b |f(t)| dt + \sup_{x \in [b, 1]} |f(x)| \\ &\leq \int_0^a |f(t)| dt + (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| + \sup_{x \in [b, 1]} |f(x)| \\ &\leq \int_0^a |f(t)| dt + \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| + \sup_{x \in [b, 1]} |f(x)| \quad \text{car } b - a \leq 1. \end{aligned}$$

De plus, comme $[a, b] \subseteq [a, 1]$ et $[b, 1] \subseteq [a, 1]$, on a

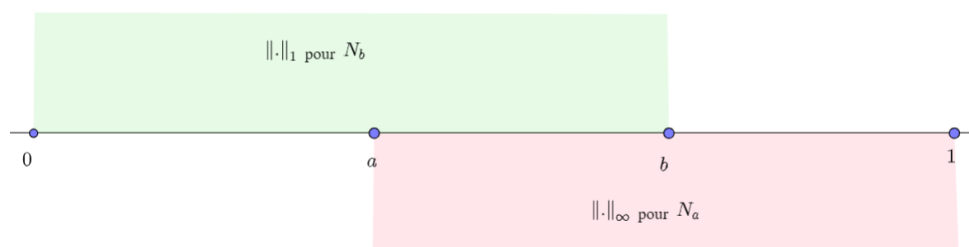
$$\begin{cases} \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq \sup_{x \in [a, 1]} |f(x)| \\ \sup_{x \in [b, 1]} |f(x)| \leq \sup_{x \in [a, 1]} |f(x)| \end{cases}$$

d'où

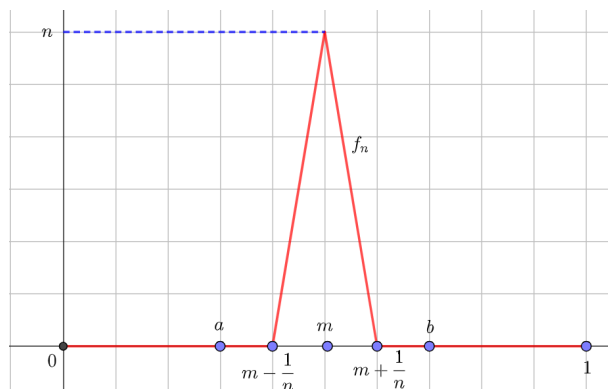
$$\begin{aligned} N_b(f) &\leq \int_0^a |f(t)| dt + 2 \sup_{x \in [a, 1]} |f(x)| \\ &\leq 2 \int_0^a |f(t)| dt + 2 \sup_{x \in [a, 1]} |f(x)| = 2N_a(f) \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $f \in E$, $N_b(f) \leq 2N_a(f)$.

Montrons que par contre, il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_a \leq CN_b$. On peut deviner ce fait car sur l'intervalle $[a, b]$, on doit comparer une norme 1 et une norme infinie, et il est possible de faire exploser la norme infinie sans faire exploser la norme 1 en créant des chapeaux de plus en plus pointus.



Supposons par l'absurde qu'une telle constante existe, et considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ comme sur le dessin ci-dessous, où l'on a noté $m := \frac{a+b}{2}$ le milieu de $[a, b]$.



Les f_n sont continues (affines par morceaux) et pour n suffisamment grand, disons $n \geq n_0$, on a $a < m - \frac{1}{n} < m + \frac{1}{n} < b$. Alors pour tout $n \geq n_0$,

$$N_a(f_n) = \int_0^a |f_n(t)| dt + \sup_{x \in [a, 1]} |f_n(x)| = 0 + n$$

tandis que

$$N_b(f_n) = \int_0^b |f_n(t)| dt + \sup_{x \in [b, 1]} |f_n(x)| = 1 + 0 = 1$$

(le calcul de l'intégrale vient juste de la formule pour l'aire d'un triangle). Ainsi si l'on avait $N_a \leq CN_b$ alors pour tout $n \geq n_0$,

$$N_a(f_n) = n \leq C = CN_b(f_n)$$

ce qui donne une contradiction dès que n est suffisamment grand.

□

Exercice 4 :

Étrangetés en dimension infinie

1. On munit dans un premier temps $\mathbf{R}[X]$ de la norme

$$\left\| \sum a_k X^k \right\|_{\infty} := \sup_{k \in \mathbf{N}} |a_k|.$$

Montrer que la suite $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée pour $\| \cdot \|_{\infty}$. Peut-on en extraire une sous-suite convergente ?

2. Construire une norme sur $\mathbf{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$ tende vers 0 pour cette norme.

3. On fixe maintenant $P \in \mathbf{R}[X]$. Construire une norme sur $\mathbf{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$ tende vers P pour cette norme.

Correction :

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\|X^n\|_\infty = 1$, donc la suite $(X^n)_{n \geq 1}$ est bien bornée dans $\mathbf{R}[X]$ muni de cette norme.
 Montrons qu'on ne peut en extraire de sous-suite convergente. Si, par l'absurde, il existait une extractrice $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ et $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $\|X^{\varphi(n)} - P\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors : pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$1 \underset{(\star)}{=} \|X^{\varphi(n+1)} - X^{\varphi(n)}\|_\infty \leq \|X^{\varphi(n+1)} - P\|_\infty + \|P - X^{\varphi(n)}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

d'où une contradiction. L'égalité $(\star)$ vient du fait que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, donc le polynôme $X^{\varphi(n+1)} - X^{\varphi(n)}$ n'a que deux coefficients non-nuls, égaux à 1 et -1 .

2. On peut prendre la norme

$$\|P\|_1 := \int_0^1 |P(t)| dt,$$

ou

$$\sup_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |P(t)|$$

ou encore la norme suivante :

$$\left\| \sum_{k \geq 0} a_k X^k \right\| = \sum_{k \geq 0} \frac{|a_k|}{k+1}$$

qui sera pratique pour la question suivante.

3. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme quelconque. On note N son degré. On utilise la norme définie précédemment mais en prenant les coefficients des polynômes dans la base $(1, X, \dots, X^N, X^{N+1} - P, X^{N+2} - P, \dots)$ (qui est bien une base car les degrés sont échelonnés). Pour n assez grand, $\|X^n - P\| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$.

Exercice 5 :

De l'importance du corps de base...

Considérons le $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel $E = \mathbf{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Q}\}$ muni de

$$N_0(a + b\sqrt{2}) = |a + b\sqrt{2}| \quad \text{et} \quad N_\infty(a + b\sqrt{2}) = \max(|a|, |b|).$$

Les normes N_0 et N_∞ sont-elles équivalentes ? Commenter.

Correction : Pour tout $(a, b) \in \mathbf{Q}^2$,

$$|a + b\sqrt{2}| \leq |a| + \sqrt{2}|b| \leq (1 + \sqrt{2}) \max(|a|, |b|)$$

Donc $N_0 \leq (1 + \sqrt{2})N_\infty$. Montrons que par contre, il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_\infty \leq CN_0$. Pour cela, supposons qu'une telle constante existe et prenons une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de rationnels qui converge vers $-\sqrt{2}$ pour la valeur absolue usuelle (ce qui est possible par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$), et prenons $(b_n)_{n \geq 0}$ la suite constante égale à 1. Alors pour tout $n \geq 0$,

$$1 \leq \max(|a_n|, |b_n|) \leq C|a_n + b_n\sqrt{2}| = |a_n + \sqrt{2}|$$

ce qui donne une contradiction lorsque n tend vers l'infini car le membre de droite tend vers 0.

Exercice 6 :*Propriétés élémentaires sur les espaces complets*On se place sur un evn E . Montrer que :

1. La complétude est stable par union finie, intersection quelconque, et produit cartésien fini (et même dénombrable).
2. Un ensemble compact est complet.
3. Une partie complète est fermée.
4. Si E est complet, les sous-ensembles complets sont les sous-ensembles fermés.
5. Une partie A est complète si et seulement si toute suite décroissante $(F_n)_{n \geq 0}$ de fermés non vides de A dont le diamètre tend vers zéro a une intersection non vide (et réduite à un point).

Indications pour la question 5 : — On suppose A complète et on veut montrer le résultat concernant les intersections décroissantes de fermés F_n . Pour cela, on choisit une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de sorte à ce que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on ait $x_n \in F_n$. On montre alors que cette suite est de Cauchy, puis que sa limite appartient à l'intersection des F_n .

— Réciproquement, si l'on suppose le résultat sur les intersections décroissantes de fermés vérifié, montrons que A est complète. Pour cela, on considère une suite de Cauchy $(x_n)_{n \geq 0}$ dans A . Une idée est ensuite d'utiliser le résultat suivant, dont la preuve est un exercice intéressant : *l'ensemble des valeurs d'adhérences $\mathcal{X}$ de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ peut être décrit de la manière suivante :*

$$\mathcal{X} = \bigcap_{N \geq 0} \overline{\{x_n, n \geq N\}}$$

où la barre désigne l'adhérence dans A .

La conclusion vient ensuite du fait qu'une suite de Cauchy admettant au moins une valeur d'adhérence converge.

□

Exercice 7 :*Complétude en termes de séries*

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que E est complet si et seulement si toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente.

Correction : — On suppose $(E, \|\cdot\|)$ complet et on veut montrer que toute série absolument convergente est convergente. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de E telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty. \quad (1)$$

On veut montrer que la suite $(S_N)_{N \geq 0}$ définie par

$$S_N := \sum_{n=0}^N x_n$$

est de Cauchy, car puisque E est supposé complet, cela montrera la convergence de la série de terme général x_n . Soit $\varepsilon > 0$. D'après (1), il existe $N_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $M \geq N_0$,

$$\sum_{n \geq M} \|x_n\| \leq \varepsilon.$$

Alors pour tout $N > M \geq N_0$,

$$\|S_N - S_M\| = \left\| \sum_{n=M+1}^N x_n \right\| \leq \sum_{n=M+1}^N \|x_n\| \leq \sum_{n \geq M+1} \|x_n\| \leq \varepsilon$$

ce qui montre bien que la suite (S_N) est de Cauchy.

- Réciproquement, on suppose que toute série d'éléments de E absolument convergente est convergente. On souhaite montrer que E est complet. Pour cela, on prend $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans E et on veut montrer qu'elle converge. Pour relier la convergence de cette suite à celle d'une série, on a envie de considérer la série de terme général $x_{n+1} - x_n$. Le problème est que le fait que la suite soit de Cauchy nous dit seulement que ce terme général tend vers 0, mais n'assure pas du tout qu'il tende suffisamment vite vers 0 pour que la série soit absolument convergente. Heureusement, le fait que $(x_n)_{n \geq 0}$ soit de Cauchy nous autorise à extraire ! En effet, il nous suffit de montrer qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ qui converge pour conclure. L'idée est alors d'utiliser le fait que la suite (x_n) soit de Cauchy pour construire une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

La série de terme général $x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}$ est alors absolument convergente, donc convergente par hypothèse sur E , et donc la suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge par télescopage. $\square$

Exercice 11 :

Complétude de l'espace des suites convergentes

On note X le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ formé des suites à valeurs réelles qui sont convergentes. On munit X de la norme uniforme définie par

$$\forall u \in X, \|u\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbf{N}} |u_n|,$$

Montrer que $(X, \|\cdot\|_{\infty})$ est complet.

Correction : Soit $(u^k)_{k \geq 0}$ une suite à valeurs dans X , c'est-à-dire que chaque u^k est une suite convergente $(u_n^k)_{n \geq 0}$ à valeurs réelles. On suppose que la suite $(u^k)_{k \geq 0}$ est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}, \forall k, \ell \geq n_0, \|u^k - u^\ell\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

- *Candidat limite :* Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $k, \ell \geq n_0(\varepsilon)$,

$$|u_n^k - u_n^\ell| \leq \|u^k - u^\ell\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

donc la suite $(u_n^k)_{k \geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbf{R}$ qui est complet, donc elle converge. On note u_n^∞ sa limite. Comme n était quelconque, nous avons bien défini une suite $u^\infty := (u_n^\infty)_{n \geq 0}$ (la suite des « limites ponctuelles » de la suite $(u^k)_{k \geq 0}$).

- *Convergence vers le candidat :* Montrons que $\|u^k - u^\infty\|_{\infty} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\forall k, \ell \geq n_0(\varepsilon), \forall n \in \mathbf{N}, |u_n^k - u_n^\ell| \leq \|u^k - u^\ell\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

donc en laissant ℓ tendre vers l'infini, on en déduit que

$$\forall k \geq n_0(\varepsilon), \forall n \in \mathbf{N}, |u_n^k - u_n^\infty| \leq \varepsilon$$

donc pour tout $k \geq n_0(\varepsilon)$, on a $\|u^k - u^\infty\|_{\infty} \leq \varepsilon$. Ceci montre bien la convergence de $(u^k)_{k \geq 0}$ vers u^∞ pour la norme uniforme.

- *Le candidat appartient bien à X* : il nous reste à montrer que u^∞ est bien une suite convergente. Chaque u^k étant une suite convergente, on note $\ell_k \in \mathbf{R}$ sa limite :

$$\ell_k := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^k.$$

Montrons que la suite ℓ_k est convergente, et que la suite u^∞ converge vers la limite de la suite $(\ell_k)_{k \geq 0}$. Pour cela, on commence par montrer que (ℓ_k) est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k, k' \geq n_0(\varepsilon)$,

$$\forall n \in \mathbf{N}, |u_n^k - u_n^{k'}| \leq \|u^k - u^{k'}\|_\infty \leq \varepsilon$$

d'où, en laissant tendre n vers l'infini :

$$|\ell_k - \ell_{k'}| \leq \varepsilon.$$

La suite $(\ell_k)_{k \geq 0}$ est donc de Cauchy dans $\mathbf{R}$ qui est complet, donc elle converge vers un certain réel ℓ . Montrons que $(u_n^\infty)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ .

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $k \in \mathbf{N}$ suffisamment grand pour avoir à la fois $\|u^k - u^\infty\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $|\ell_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |u_n^\infty - \ell| &\leq |u_n^\infty - u_n^k| + |u_n^k - \ell_k| + |\ell_k - \ell| \\ &\leq \|u^\infty - u^k\|_\infty + |u_n^k - \ell_k| + |\ell_k - \ell| \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + |u_n^k - \ell_k| \end{aligned}$$

Puis comme $(u_n^k)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ_k , il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n^k - \ell_k| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Donc pour tout $n \geq N$, $|u_n^\infty - \ell| \leq \varepsilon$, ce qui conclut la preuve.

Remarques : (1) On a démontré au passage une version du théorème de la double limite :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} u_n^k$$

le point important étant la convergence *uniforme* de u^k vers u^∞ .

(2) Une rédaction alternative de cet exercice est possible : on pourrait utiliser le fait que X est contenu dans $\ell^\infty(\mathbf{N}, \mathbf{R})$, qui est complet pour la norme uniforme, et donc d'après l'exercice 6, X est complet si et seulement si il est fermé dans $\ell^\infty(\mathbf{N}, \mathbf{R})$. Cela nous permet de sauter les deux premières étapes de la preuve précédente, et de passer directement à la dernière qui consiste à montrer qu'une limite uniforme de suites convergentes est encore convergente.