TD 2 : Applications linéaires continues

Exercice 1. *Continuité pour différentes normes*
On se place sur $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$. On considère la forme linéaire :

$$\varphi : f \in E \mapsto f(0).$$

Montrer que φ est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais n'est pas continue pour la norme $\|\cdot\|_{L^1}$.

Exercice 2. *Calcul de norme subordonnée*
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $F = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_F$ définie par :

$$\forall f \in F,\ \|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

On définit alors $T : E \to F$ par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ Tf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que T est bien définie, linéaire, continue et calculer sa norme subordonnée. La valeur de la norme de T est-elle atteinte ?

Exercice 3. *Calcul de norme subordonnée*
Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$, $a \in]0,1[$ et $T_a \colon E \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall f \in E,\ T_a(f) = \int_0^a x^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que T_a est bien définie, linéaire, continue et calculer sa norme subordonnée. La valeur de la norme de T_a est-elle atteinte ?

Exercice 4. *Calcul de norme subordonnée*
Sur $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on définit la forme linéaire μ_f associée à un élément non nul f de E par :

$$\forall g \in E, \quad \mu_f(g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que μ_f est bien définie, continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 5. *Une application bilinéaire*
On note $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$. On considère l'application :

$$B : \begin{cases} (E,\|\cdot\|_\infty) \times (E,\|\cdot\|_{L^2}) & \to (E,\|\cdot\|_\infty) \\ (f,g) & \mapsto \left(x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^t f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right) \end{cases}$$

Montrer que B est bien définie, bilinéaire, continue et calculer sa norme.

Exercice 6. *Formes linéaires positives*

Soient $a < b$ deux réels, $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et φ une forme linéaire positive sur E, i.e. pour tout $f \in E$, si $f \geqslant 0$ alors $\varphi(f) \geqslant 0$. Montrer que φ est continue et calculer sa norme subordonnée.

Indication : On pourra montrer et utiliser que pour tout $f \in E$, $|\varphi(f)| \leqslant \varphi(|f|)$.

Exercice 7. *Opérateurs à noyau*

Soit $K \in \mathcal{C}^0([0,1]^2,\mathbf{R})$. On note $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in E$, on note Tf la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Montrer que T est bien défini, qu'il s'agit d'un endomorphisme linéaire continu de E et calculer sa norme.

Exercice 8. *Continuité et noyau d'une forme linéaire*

Soient E un espace vectoriel normé et φ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que φ est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Exercice 9. *Norme et noyau d'une forme linéaire*

Soient E un espace vectoriel normé et H le noyau d'une forme linéaire continue non nulle φ. Montrer que pour tout x dans E,

$$d(x,H) = \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}.$$

Exercice 10. *Complétude de $\mathcal{L}_c(E,F)$*

Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Montrer que si F est complet, alors l'espace $\mathcal{L}_c(E,F)$ muni de la norme d'opérateur est complet.

Exercice 11. *Dual de $\ell^p(\mathbf{N})$, $1 \leqslant p < +\infty$*

Soit $1 \leqslant p < +\infty$ et q son exposant conjugué, i.e. tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour $y \in \ell^q(\mathbf{N})$, on pose pour tout $x \in \ell^p(\mathbf{N})$:

$$F_y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

1. Montrer que pour tout $y \in \ell^q(\mathbf{N})$, on a $F_y \in (\ell^p(\mathbf{N}))'$.
2. On pose :

   $$F\colon y \in \ell^q(\mathbf{N}) \mapsto F_y \in (\ell^p(\mathbf{N}))'.$$

   Montrer que F est une isométrie linéaire.

   Le but est maintenant de montrer la surjectivité de F. Soit $\varphi \in (\ell^p(\mathbf{N}))'$. On pose $y_n = \varphi(e_n)$, où e_n désigne la suite dont tous les termes sont nuls, sauf le terme de rang n qui vaut 1.
3. Pour $p = 1$, montrer que $(y_n)_n \in \ell^\infty(\mathbf{N})$.
4. Pour $1 < p < +\infty$, on pose pour tout $n, N \geqslant 0$,

   $$x_n^N = \begin{cases} y_n^{-1}|y_n|^q & \text{si } y_n \neq 0 \text{ et } n \leqslant N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Calculer $\varphi(x^N)$ et en déduire que $y \in \ell^q(\mathbf{N})$.
5. Montrer que F est surjective.