TD 4 : Différentielle

Exercice 9 :

Détecteur de vecteurs propres

Soient E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et u un endomorphisme symétrique (i.e. pour tout $(x, y) \in E^2$: $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$) continu de E .

1. Montrer que l'application $x \in E \mapsto \langle u(x), x \rangle \in \mathbf{R}$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
2. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : E \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}. \end{aligned}$$

Établir qu'il s'agit d'une application différentiable et calculer sa différentielle. Montrer que pour tout élément non nul a de E , $d\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u .

Remarque : Cet exercice a été corrigé en TD, mais nous avons vu au passage toutes les idées qui permettent de démontrer une formule pour la différentielle d'un quotient. Soit E un espace vectoriel normé, $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ et $g: E \rightarrow \mathbf{R}^*$ deux applications différentiables. Alors l'application

$$\frac{f}{g}: x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

est différentiable, et pour tout $x \in E$,

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g(x)^2}$$

Attention, il faut bien comprendre que c'est une égalité dans $\mathcal{L}_c(E, \mathbf{R})$. Pour montrer ce résultat, on utilise le théorème des fonctions composées en introduisant les deux applications :

$$\begin{aligned} F : E &\rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}^* \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^* &\rightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{x}{y} \end{aligned}$$

Alors $\frac{f}{g} = h \circ F$ et il ne reste qu'à calculer les différentielles de F et h pour conclure.

Exercice 16 :

Calcul concret de dérivées partielles

Étudier la continuité puis l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Correction :

— Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \geq 2x^2y^2$$

donc pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$|f(x, y)| = x^2y^2 |\ln(x^2 + y^2)| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 |\ln(x^2 + y^2)| \xrightarrow{\|(x,y)\| \rightarrow 0} 0$$

car $t \ln(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$. Ainsi, f est continue en $(0, 0)$.

— En dehors de $(0, 0)$, f admet des dérivées partielles par rapport à chacune des variables, et on peut les calculer : pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\partial_1 f(x, y) = 2xy^2 \ln(x^2 + y^2) + x^2y^2 \frac{2x}{x^2 + y^2} = 2xy^2 \left(\ln(x^2 + y^2) + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right)$$

et

$$\partial_2 f(x, y) = 2x^2y \ln(x^2 + y^2) + x^2y^2 \frac{2y}{x^2 + y^2} = 2x^2y \left(\ln(x^2 + y^2) + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) = \partial_1 f(y, x)$$

Remarque : on peut aussi montrer que $\partial_2 f(x, y) = \partial_1 f(y, x)$ en utilisant la question 2 de l'exercice 6 et le fait que f est symétrique.

— Passons à la question de l'existence des dérivées partielles en $(0, 0)$. Pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, on a

$$\frac{f((0, 0) + t(1, 0)) - f(0, 0)}{t} = \frac{f(t, 0)}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Ainsi, $\partial_1 f(0, 0)$ existe et est égale à 0. Par symétrie de f on a aussi

$$\frac{f(0, t)}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

donc $\partial_2 f(0, 0)$ existe et est égale à 0. Ainsi, nous avons montré que f admettait des dérivées partielles par rapport aux deux coordonnées en tout point de $\mathbf{R}^2$.

— Étudions la continuité des dérivées partielles.

$$\begin{aligned} \partial_1 f &: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\mapsto \partial_1 f(x, y) \end{aligned}$$

est clairement continue sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ car elle s'écrit comme une composée de fonctions continues. Il nous reste à étudier la continuité en $(0, 0)$. Or pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, on a

$$|\partial_1 f(x, y)| = \left| 2xy^2 \ln(x^2 + y^2) + x^2y^2 \frac{2x}{x^2 + y^2} \right| \leq |y|(x^2 + y^2) |\ln(x^2 + y^2)| + |x| \frac{x^2 + y^2}{2}$$

car $2|xy| \leq x^2 + y^2$. En utilisant à nouveau le fait que $t \ln(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$, on en déduit que $|\partial_1 f(x, y)|$ tend vers 0 lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$ dans $\mathbf{R}^2$. Ainsi, $\partial_1 f$ est continue sur $\mathbf{R}^2$. De plus, comme $\partial_2 f(x, y) = \partial_1 f(y, x)$, la deuxième dérivée partielle est également continue sur $\mathbf{R}^2$.

Conclusion : nous avons montré que les deux dérivées partielles existaient et étaient continues sur tout $\mathbf{R}^2$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

Exercice 19 :

Différentiable ?

On considère $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue.

2. f admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?
3. f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Correction : On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^2$.

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, on a

$$|f(x, y)| = \frac{|x| |\sin(y^2)|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|y^2}{x^2 + y^2}$$

car pour tout $t \in \mathbf{R}$, $|\sin(t)| \leq |t|$. De plus, $|x||y| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$, donc

$$|f(x, y)| \leq \frac{|y|}{2} \xrightarrow{\|(x,y)\| \rightarrow 0} 0.$$

Ceci montre la continuité de f en $(0, 0)$, et sa continuité partout ailleurs est claire.

2. Pour tout $t \in \mathbf{R}^*$,

$$\frac{f((0, 0) + t(1, 0)) - f(0, 0)}{t} = \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

donc $\partial_1 f(0, 0)$ existe et vaut 0. De même,

$$\frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$$

pour tout $t \neq 0$, donc $\partial_2 f(0, 0) = 0$.

3. Si f était différentiable en $(0, 0)$, alors on aurait

$$\begin{aligned} f(a, b) &= f(0, 0) + a\partial_1 f(0, 0) + b\partial_2 f(0, 0) + o(\|(a, b)\|) \\ &= o(\|(a, b)\|) \end{aligned}$$

lorsque $\|(a, b)\|$ tend vers 0. Or pour $t \in \mathbf{R}^*$,

$$\frac{|f(t, t)|}{\|(t, t)\|} = \frac{|t| |\sin(t^2)|}{(t^2 + t^2)\sqrt{t^2 + t^2}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{|t|t^2}{2t^2\sqrt{2}|t|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \not\rightarrow 0$$

Donc $f(t, t)$ n'est pas négligeable devant $\|(t, t)\|$ lorsque t tend vers 0. Ainsi, f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 23 :

Lemme d'Hadamard

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ contenant 0 et soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbf{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et $df(0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe des fonctions $g_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbf{R})$, pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, telles que :

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j g_{i,j}(x).$$

2. Généraliser.

Indication : Comme dans l'exercice 9 de la feuille de TD 3, qui s'appelait déjà lemme d'Hadamard, on peut utiliser la formule de Taylor avec reste intégral et le théorème de régularité sous l'intégrale.