# Théorème de Montel et une jolie application

*Prérequis :* Théorème d'Ascoli, lemme de Baire, théorème de Weierstrass (une limite uniforme sur tout compact de fonctions holomorphes est holomorphe).

Si $U$ est un ouvert $\mathbf{C}$, on notera $\mathcal{O}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $U$. Si $K$ est une partie compacte de $U$, et si $f\colon U \to \mathbf{C}$ est continue, on note $\|f\|_K := \sup_{z\in K} |f(z)|$. On rappelle la définition d'une partie bornée de $\mathcal{O}(U)$ :

**Définition 1 :**
Soit $U$ un ouvert de $\mathbf{C}$ et $A \subseteq \mathcal{O}(U)$. On dit que $A$ est bornée si pour tout compact $K \subseteq U$, il existe $C_K \in \mathbf{R}_+$ telle que pour toute fonction $f \in A$, $\|f\|_K \leqslant C_K$.

Si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{O}(U)^{\mathbf{N}}$, on dira que cette suite est bornée si la partie $A := \{f_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ est bornée au sens de la définition précédente.

**Théorème 2** (Montel) **:**
Soit $U$ un ouvert de $\mathbf{C}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de fonctions holomorphes sur $U$, on peut en extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de $U$.

*Démo :* La trame de la preuve est la suivante : on montre d'abord que si $K \subseteq U$ est un compact fixé, alors on peut extraire de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une sous-suite qui converge uniformément sur $K$. Le point clef de cette étape est le théorème d'Ascoli. Ensuite, on recouvre $U$ par une suite exhaustive de compacts, et on fait une extraction diagonale pour obtenir une extractrice commune qui donne la convergence uniforme sur tous les compacts.

*Étape 1 :* Fixons un compact $K \subseteq U$ et montrons qu'il existe une extractrice $\varphi$ telle que $\left(f_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $K$.

On voit $A := \{f_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ comme une partie de $\left(\mathcal{C}^0(K, \mathbf{C}), \|\ \|_K\right)$. Comme $K$ est compact et $\mathbf{C}$ est complet, on est bien dans les hypothèses du théorème d'Ascoli. Ainsi, pour montrer que $A$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0(K, \mathbf{C})$, il suffit de montrer les deux points suivants :

(i) Pour tout $z \in K$, $\{f_n(z), n \in \mathbf{N}\}$ est une partie relativement compacte de $\mathbf{C}$.

(ii) $A$ est équicontinue en tout point i.e. pour tout $z_0 \in K$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in K, (\ |z - z_0| \leqslant \delta \implies \forall n \in \mathbf{N}, |f_n(z) - f_n(z_0)| \leqslant \varepsilon\ )$$

**Remarque :**
Le théorème d'Ascoli est parfois énoncé en remplaçant le point (ii) par l'uniforme équicontinuité :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z, z' \in K, \left(\ |z - z'| \leqslant \delta \implies \forall n \in \mathbf{N}, |f_n(z) - f_n(z')| \leqslant \varepsilon\ \right).$$

Comme $K$ est un espace métrique compact, les deux notions sont équivalentes.

Montrons le point (i) : si $z \in K$ et $n \in \mathbf{N}$, on a $|f_n(z)| \leqslant \|f_n\|_K$. Comme la suite $(f_n)$ est bornée dans $\mathcal{O}(U)$, il existe une constante $C_K$, qui ne dépend que du compact $K$, telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|f_n\|_K \leqslant C_K$. On en déduit que $\{f_n(z), n \in \mathbf{N}\} \subseteq \overline{D}(0, C_K)$ : c'est donc une partie bornée de $\mathbf{C}$, donc relativement compacte.

Maintenant, montrons que le point (ii) est satisfait. Soit $z_0 \in K$, soit $\epsilon > 0$. Comme $U$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subseteq U$.
D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $z \in \overline{D}\left(z_0, \frac{r}{2}\right)$ et $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| \underset{\text{IAF}}{\leqslant} \|f_n'\|_{\overline{D}\left(z_0, \frac{r}{2}\right)} |z - z_0|.$$

Nous allons maintenant utiliser le lemme suivant, dont la preuve est reportée à la fin du document pour ne pas casser le rythme.

> **Lemme 3 :**
> Il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(U)$,
> $$\|f'\|_{\overline{D}\left(z_0, \frac{r}{2}\right)} \leqslant M\|f\|_{\overline{D}(z_0, r)}$$

En appliquant ce lemme dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| \leqslant M\|f_n\|_{\overline{D}(z_0, r)} |z - z_0|.$$

Il ne reste plus qu'à utiliser le caractère borné de la suite $(f_n)$ pour conclure. En effet, il existe une constante $C = C_{\overline{D}(z_0, r)} \in \mathbf{R}_+$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\|f_n\|_{\overline{D}(z_0, r)} \leqslant C,$$

d'où finalement :

$$\forall z \in \overline{D}\left(z_0, \frac{r}{2}\right), \ \forall n \in \mathbf{N}, \ \ |f_n(z) - f_n(z_0)| \leqslant MC|z - z_0|.$$

On a donc bien montré que dès que $z$ devient proche de $z_0$, on peut rendre tous les $|f_n(z) - f_n(z_0)|$ arbitrairement petits (indépendamment de $n$) : c'est le point (ii) !

Le théorème d'Ascoli permet alors de conclure à la relative compacité de $A = \{f_n, \ n \in \mathbf{N}\}$ dans $\left(\mathcal{C}^0(K, \mathbf{C}), \| \ \|_K\right)$ : on peut donc extraire de $(f_n)$ une sous-suite qui converge uniformément sur le compact $K$.

*Étape 2 :* On recouvre $U$ par une suite de compacts, puis on fait une extraction diagonale.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons

$$K_n := \left\{ z \in U, \ |z| \leqslant n \text{ et } d(z, \mathbf{C} \setminus U) \geqslant \frac{1}{n} \right\}$$

C'est une suite croissante de compacts de $U$, donc l'union recouvre $U$.

D'après l'étape précédente, il existe une extractrice $\phi_1$ telle que $\left(f_{\phi_1(n)}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur $K_1$. On applique ensuite l'étape 1 à cette suite $\left(f_{\phi_1(n)}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ et au compact $K_2$ : on en déduit une extractrice $\phi_2$ telle que $\left(f_{\phi_1 \circ \phi_2(n)}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur $K_2$, et ainsi de suite...

On obtient finalement des extractions successives $\phi_1, \ldots, \phi_j, \ldots$ telles que $\left(f_{\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_j(n)}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur $K_j$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\psi(n) := (\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n)(n)$, et on vérifie que $\psi$ est bien une extractrice et que $\left(f_{\psi(n)}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur chacun des

$K_j$ et donc sur tout compact de $U$ (car n'importe quel compact de $U$ finit par être inclus dans un $K_j$ pour $j$ suffisamment grand). La limite pour la convergence uniforme sur tout compact de la suite $\left(f_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est holomorphe d'après le théorème de Weierstrass.

$\square$

**Remarques :** • Comme on dit souvent simplement « par extraction diagonale », on peut oublier pourquoi ce procédé fait bien ce qu'il faut. Rappelons donc les arguments dans notre exemple.

- $\psi\colon \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ est bien strictement croissante : en effet, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\psi(n+1) &= \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_{n+1}(n+1) \\
&= (\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n)\left(\phi_{n+1}(n+1)\right) \\
&> (\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n)\left(\phi_{n+1}(n)\right) \text{ par stricte croissance des } \phi_j \\
&\underset{(*)}{\geqslant} (\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n)(n) \\
&= \psi(n)
\end{aligned}$$

$(*)$ car $\phi_{n+1}\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est strictement croissante, donc $\phi_{n+1} \geqslant \mathrm{id}_{\mathbf{N}}$.

- Si on fixe un $j \in \mathbf{N}^*$, alors pour tout $n \geqslant j$, $\psi(n) = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_j \circ \cdots \circ \phi_n(n)$. Ainsi, la suite $\left(f_{\psi(n)}\right)_{n\geqslant j}$ est extraite de la suite $\left(f_{\phi_1\circ\cdots\circ\phi_j(k)}\right)_{k\in\mathbf{N}}$, qui converge uniformément sur $K_j$ par construction des extractions $\phi_1, \ldots, \phi_j$. Donc $\left(f_{\psi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $K_j$. Comme ceci est vrai pour tout $j$, on obtient bien la conclusion annoncée ci-dessus.

• Tous ces détails pour l'extraction diagonale sont sans doute sûrement considérés comme connus, et peuvent être passés sous silence pour que le développement rentre dans les temps. L'étape 2 se réduit alors à son titre. Cependant, il vaut mieux avoir détaillé une fois dans sa vie le procédé, pour répondre à d'éventuelles questions.

Donnons une jolie application du théorème de Montel !

**Théorème 4** (Osgood) **:**
Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{O}(U)^{\mathbf{N}}$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers une fonction $f$, et on note $\Omega$ l'union de tous les ouverts de $U$ sur lesquels $f$ est holomorphe. Alors $\Omega$ est un ouvert dense dans $U$. Autrement dit, une limite simple de fonctions holomorphes est holomorphe sur un ouvert dense !

*Démo :* • $\Omega$ est ouvert comme union d'ouverts.

• Maintenant, montrons que $\Omega$ rencontre tout disque fermé inclus dans $U$.

Soit $\overline{D}$ un disque fermé inclus dans $U$. Nous allons montrer qu'il existe un disque ouvert $\tilde{D}$, inclus dans $\overline{D}$, tel que la suite des $f_{n_{|\tilde{D}}}$ soit bornée dans $\mathcal{O}(\tilde{D})$.
Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit

$$F_k := \left\{ z \in \overline{D},\ \sup_{n\in\mathbf{N}} |f_n(z)| \leqslant k \right\}.$$

Chaque $F_k$ est fermé dans $\overline{D}$, et par convergence simple de la suite $(f_n)$, on a

$$\overline{D} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k$$

(en effet, dès qu'on prend un $z$ dans $\overline{D}$, la suite $(f_n(z))_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, donc bornée). Mais maintenant, puisque $\overline{D}$ est fermé dans $\mathbf{C}$, il est complet, et donc nous pouvons appliquer le lemme de Baire ! Comme l'union des fermés $F_k$ est égale à $\overline{D}$, qui est d'intérieur non vide, l'un des $F_k$ doit être d'intérieur non vide. Choisissons un $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que $F_{k_0}$ soit d'intérieur non vide. Alors il existe $\tilde{D}$ un petit disque ouvert contenu dans $F_{k_0}$. En particulier, pour tout compact $K \subseteq \tilde{D}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|f_n\|_K \leqslant k_0$. Donc la suite des ${f_n}_{|\tilde{D}}$ est bornée dans $\mathcal{O}(\tilde{D})$.

On applique alors le théorème de Montel pour extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de $\tilde{D}$. Comme les $f_n$ sont holomorphes, le théorème de Weierstrass nous assure que cette limite uniforme sur tout compact est holomorphe. Mais comme on sait également que la suite $(f_n)$ converge simplement, la limite pour la CVUSTC[1] sur $\tilde{D}$ ne peut-être que $f_{|\tilde{D}}$. Donc $f$ est holomorphe sur $\tilde{D}$, et donc on a trouvé un ouvert sur lequel $f$ est holomophe, qui rencontre $\overline{D}$. Finalement $\Omega$ rencontre bien tout disque fermé inclus dans $U$, d'où la conclusion.

$\square$

*Preuve du lemme 3 :* rappelons les notations : on avait pris un $z_0$ dans notre ouvert $U$, et un $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subseteq U$. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$. D'après la formule de Cauchy pour la dérivée[2], pour tout $z \in \overline{D}\left(z_0, \frac{r}{2}\right)$, on a :

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^2}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\mathrm{e}^{it})}{(z_0 + r\mathrm{e}^{it} - z)^2} ir\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t.$$

Donc pour tout $z \in \overline{D}\left(z_0, \frac{r}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + r\mathrm{e}^{it})|}{|z_0 + r\mathrm{e}^{it} - z|^2} r\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + r\mathrm{e}^{it})|}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} r\mathrm{d}t, \text{ car } z \in \overline{D}\left(z_0, \frac{r}{2}\right) \\ &\leqslant \frac{4\|f\|_{\overline{D}(z_0,r)}}{r}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|f'\|_{\overline{D}\left(z_0,\frac{r}{2}\right)} \leqslant \frac{4}{r}\|f\|_{\overline{D}(z_0,r)}$$

ce qui conclut la démonstration du lemme 3.

**Remarques :**

- Il peut sembler étrange de considérer cet ensemble $\Omega$ et pas juste l'ensemble des $z$ tels que $f$ est holomorphe en $z$. Mais en fait je n'ai pas trouvé de raison pour que ce dernier ensemble soit ouvert…
- L'application la plus célèbre du théorème de Montel et de cette notion de famille bornée de fonctions holomorphes est sans doute le théorème de représentation conforme de Riemann.

[1]convergence uniforme sur tout compact.

[2]Pas la peine d'apprendre plusieurs formules de Cauchy, celle-ci se retrouve en dérivant sous l'intégrale la formule de Cauchy pour $f$.