Leçon 151 Dimension d'un espace vectoriel (en dimension finie), rang, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre de Xavier Gourdon
2. Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li
3. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi
4. Algèbre linéaire de Joseph Grifone
5. Objectif agrégation
6. Extension de corps de Josette Calais
7. Cours d'algèbre de Daniel Perrin

Développements.

1. Réduction dans $O_n(\mathbb{R})$
2. Théorème de l'élément primitif

Table des matières

1 Dimension d'un espace vectoriel

1.1 Théorème de la base incomplète et dimension

(Chapitre 3.1.2 d'Algèbre de Xavier Gourdon)
On considère E un K-espace vectoriel.

1. Définition : Une famille e libre et génératrice de E est appelée une base de E
2. Proposition : Dans ce cas, tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des e_i et les scalaires s'appellent les coordonnées de x dans la base b
3. Exemple : La famille des $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ est une base de K^n appelée base canonique
4. Exemple : La famille des X^n est une base de $K[X]$
5. Définition : On dit que E est de dimension finie s'il existe famille génératrice finie
6. Exemple : K^n est de dimension finie et $K[X]$ ne l'est pas
7. Théorème : Si E de dimension finie, soit G une famille finie génératrice de E et $L \subset G$ une famille libre, alors il existe B de E telle que $L \subset B \subset G$
8. Corollaire : Si E de dimension finie alors E admet une base, de toute famille génératrice on peut extraire une base, toute famille libre peut être complétée en un base
9. Théorème : Si E de dimension finie alors toutes les bases de E ont même cardinal appelé dimension de E et noté $dim(E)$
10. Proposition : Si $dim(E) = n \in \mathbb{N}$ alors toute famille libre ou génératrice de n vecteurs de E est une base de E
11. Proposition : Si $dim(E) = n \in \mathbb{N}$, soit $E_1, ..., E_r$ des sous-espaces de E, alors $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} E_i$ si et seulement si $E = \sum_{1 \leq i \leq n} E_i$ et $n = \sum_{i=1}^{n} dim(E_i)$

1.2 Dualité en dimension finie

(Chapitre 3.9 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Définition : Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans K, on note E^* leur ensemble appelé dual de E
2. Remarque : Si E est de dimension finie de base e, soit $\varphi \in E^*$, alors $\varphi(x) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n$ avec $a_i = \varphi(e_i)$
3. Théorème : Si E de dimension finie n, sous $\varphi \in E^*$ non nul, alors $dim(ker(\varphi)) = n - 1$, ie $ker(\varphi)$ est un hyperplan de E
4. Proposition : Si E de dimension finie alors $dim(E^*) = dim(E)$
5. Théorème : Si E de dimension finie de base e, alors $e_i^*(e_k) = \delta_{ik}$ définie une base de E^* appelée base duale de e

6. Exemple : Si $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors e est une base de $\mathbb{R}^*$ dont la base duale est $e_1 * (x) = x_1 - x_2 + x_3, e_2^*(x) = x_2 - x_3, e_3^*(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3$
7. Définition : $E^{**} = (E^*)^*$ est la dual de E^* appelé le bidual de E
8. Théorème : Si E de dimension finie alors E et E^{**} sont canoniquement isomorphes
9. Application : Dans $\mathbb{R}^n$ avec e une base de $\mathbb{R}^n$, pour savoir si un vecteur x appartient au $F = Vect(x_1, x_2, x_3)$, au lieu de chercher $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$, on peut chercher à écrire F comme intersection d'hyperplans donc de noyaux de formes linéaires
10. Exemple : Dans $\mathbb{R}^5$ soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$, alors $F = Vect(e_1, e_2, e_3) = ker(\varphi_1) \cap ker(\varphi_2) \cap kar(\varphi_3)$ avec $\varphi_1(x) = -x_1 + x_2 + x_3, \varphi_2(x) = 4x_1 - 2x_2 + x_4, \varphi_3(x) = -6x_1 + x_2 + x_5$, donc par exemple $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin F$

1.3 Espace euclidien de dimension finie

(Chapitres I.2 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li, 22.1 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et 7.4 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

On considère E un espace vectoriel normé.

1. Lemme de Riesz : Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E tel que $F \neq E$, soit $\delta \in]0, 1[$, alors il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1, d(x, F) \geq 1 - \delta$
2. Théorème de compacité de Riesz : $dim(E) < +\infty$ si et seulement si $\overline{B}(0, 1)$ est compacte dans E
3. Corollaire : Si $dim(E) = n \in \mathbb{N}$ alors E est isomorphe à K^n, soit $C \subset E$, alors C compact si et seulement si C fermé borné, E est complet, et $L(E) = \mathcal{L}(E)$
4. Corollaire : Soit F sous-espace de dimension finie de E, alors F est fermé dans E
5. Théorème : Si $dim(E) = n \in \mathbb{N}$ alors toutes les normes sur E sont équivalentes
6. Application : Pour montrer une convergence en analyse matricielle ou une différentiabilité en calcul différentiel en dimension finie on peut travailler avec n'importe quelle norme
7. Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : Si E euclidien (réel de dimension finie muni d'un produit scalaire), soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre de E, alors il existe une unique famille orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E tel que $Vect(e_1, ..., e_k) = Vect(x_1, ..., x_k)$ et $\langle x_k, e_k \rangle > 0$

8. Exemple : Dans $\mathbb{R}^4$, soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors une base orthonormale de $Vect(v_1, v_2, v_3)$ est $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
9. Théorème de projection orthogonale : Dans ce cas, soit F sous-espace vectoriel de E et $x \in E$, alors il existe un unique $p_F(x) \in F$ tel que $\|x - p_F(x)\| = d(x, F)$, de plus pour $y \in E$, $y = p_F(x)$ si et seulement si $y \in F, x - y \in F^\perp$
10. Corollaire : Dans ce cas, si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de F, alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$, $\|x - p_f(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$
11. Exemple : Si $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire usuel $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ et $F = \mathbb{R}_2[X]$ alors $d(X^3, F) = \sqrt{6}$ (Exercices 7.7 et 7.18 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

2 Applications des espaces vectoriels de dimension finie

2.1 Invariants de similitude et réduction de Frobenius

(Chapitre B d'Algèbre de Xavier Gourdon)

1. Définition : Soit $x \in E$, alors π_x est le polynôme unitaire tel que $(\pi_x) = \{P \in K[X], P(u)(x) = 0\}$ et $E_x = \{P(u)(x), P \in K[X]$
2. Proposition : Soit $x \in E$, alors E_x est sous-espace de E de dimension $deg(\pi_x)$ et de base $(x, ..., u^{deg(\pi_x)-1})$
3. Théorème : Il existe $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_u$
4. Définition : On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$
5. Définition : Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + ... + a_0 \in K[X]$, alors on note $C(P)$ sa matrice compagnon
6. Proposition : Soit $P \in K[X]$, alors $\pi_{C(P)} = \chi_{C(P)} = P$
7. Théorème : Si u cyclique alors il existe une base b de E tel que $Mat_b(u) = C(\pi_u)$
8. Théorème : Il existe $F_1, ..., F_r$ sous-espaces de E stables par u tels que $E = F_1 \oplus ... \oplus F_r$, $u_i := u_{|F_i}$ cyclique et $P_i := \pi_{u_i} \mid P_{i-1}$
9. Remarque : La suite des polynômes P_i ne dépend que de u et est appelée les invariants de similitude de u
10. Théorème de réduction de Frobenius : Il existe une base b de E telle que $Mat_b(u) = diag(C(P_1), ..., C(P_r))$

11. Corollaire : Deux endomorphismes sont semblables si et seulement s'ils ont les mêmes invariants de similitude
12. Application : Soit $A, B \in M_n(K)$ et L une extension de corps de K tels que A et B soient semblables sur L alors A et B sont semblables sur K

2.2 Propriétés et réduction dans un espace euclidien

(Chapitres 22.3 22.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et 7.13 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

On considère E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

1. Définition : On dit que $P \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tPP = I_n = P^tP$, on note $O_n(\mathbb{R})$ leur sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$
2. Lemme : Soit $u \in O(E)$, alors il existe des sous-espaces vectoriels $F_1, ..., F_r$ de E deux à deux orthogonaux de dimension 1 ou 2 et stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$
3. Proposition : Soit $u \in O(E)$ et F sous-espace vectoriel de E stable par F, alors $F^\perp$ est stable par u
4. Théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux : Soit $u \in O(E)$, alors il existe une base orthonormée e de E telle que $Mat_e(u) = diag(I_p, I_q, R_1, ..., R_r)$ avec $p, q \in [\![1, n]\!], R_i = R(\theta_i), \theta_i \in \,]0, 2\pi[\, \backslash\{\pi\}$
5. Application : Les composantes connexes de $O(E)$ sont les fermés $SO(E)$ et $O^-(E)$
6. Définition : Soit $u \in End(E)$, alors on dit que u est symétrique si $\forall x, y \in E, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$, et on note $S(E)$ leur ensemble
7. Remarque : Soit $u \in End(E)$, alors $u \in S(E)$ si et seulement si pour toute base orthonormée b de E, $Mat_b(u) \in S_n(\mathbb{R})$
8. Théorème spectral : Soit $u \in S(E)$, alors u est diagonalisable dans une base orthonormée
9. Corollaire : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tPAP$ soit diagonale

2.3 Extensions de corps et nombres algébriques

(Chapitres 2.1, 2.3 et 2.4 de Extensions de corps de Josette Calais et III.1.a du Cours d'algèbre de Daniel Perrin)

On considère une extension de corps $L : K$.

1. Définition : Soit $a \in L$, alors on dit que a est algébrique sur K s'il existe $P \in K[x]\backslash K$ tel que $P(a) = 0$, dans ce cas on dit que $K(a)$ est une extension simple algébrique
2. Théorème : Soit $a \in L$, alors les assertions suivantes sont équialentes :
   (a) Il existe un unique polynôme $P \in K[X]$ unitaire irréductible tel que $f(a) = 0 \iff P \mid f$ dans $K[X]$
   (b) $K[a] = K(a)$
   (c) $[K(a) : K] := dim_K(K(a)) = deg(p)$

3. Remarque : Dans ce cas a est algébrique et P est appelé polynôme minimal de a
4. Exemple : i et $\sqrt{2}$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$ de polynômes minimaux $X^2 - 1$ et $X^2 - 2$
5. Remarque : Si a est algébrique sur K alors $dim_K(K(a)) = deg(P)$ appelé degré de a avec P polynôme minimal de a sur K
6. Définition : On dit que L est une extension algébrique de K si pour tout $a \in L$, a est algébrique sur K
7. Théorème : Si $L : K$ de degré fini alors L est une extension algébrique de K
8. Exemple : Les extensions simples $K(a)$ avec a algébrique sur K sont des extensions algébriques de K
9. Théorème de l'élément primitif : Soit L une extension de degré fini de K, si K est de caractéristique 0 alors L est monogonèe, ie il existe $a \in L$ tel que $L = K(a)$ (Problème 2.5.8 d'Algèbre de Xavier Gourdon)
10. Lemme : Soit $P, Q \in K[X]$ et $L : K$, alors $PGCD_{K[X]}(P, Q) = PGCD_{L[X]}(P, Q)$
11. Remarque : Ce théorème est également vérifié si K est fini

3 Rang d'applications

3.1 Point de vue endomorphisme

(Chapitres 3.2 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone et 4.1.3 d'Objectif agrégation)
On considère E, E' deux espaces vectoriels et $f \in L(E, E')$.

1. Proposition : Soit F sous-espace de E alors $f(F)$ est un sous-espace de E', en particulier $Im(f) = f(E)$ est un sous-espace de E'
2. Définition : $rg(f) = dim(Im(f)) = dim(f(E))$ est le rang de f
3. Exemple : Si $E = E_1 \oplus E_2$ et $f = p_1 \in L(E, E)$ le projecteur sur E_1 parallèlement) E_2, alors $Im(f) = E_1$ et $rg(f) = dim(E_1)$
4. Exemple : Si $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f(p) = p'$ alors $Im(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $rg(f) = n$
5. Proposition : Si $dim(E') < +\infty$ alors f est surjective si et seulement $rg(f) = dim(E')$
6. Théorème du rang : Si E, E' de dimensions finies alors $dim(E) = rg(f) + dim(ker(f))$
7. Corollaire : Si E, E' de même dimension finie alors f injective si et seulement si f surjective si et seulement si f bijective
8. Application : Soit $a_1, ..., a_p \in K$ deux à deux distincts et $b_1, ..., b_p \in K$, alors il existe un unique $P \in K_{p-1}[X]$, appelé polynôme interpolateur de Lagrange, tel que $P(a_i) = b_i$
9. Remarque : Ce résultat est faux en dimension infinie
10. Exemple : Si $E = E' = \mathbb{R}[X]$ et $f(P) = P'$ alors f surjective non injective

3.2 Point de vue matriciel

(Chapitres 3.3 et 3.8 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone et 3.3.6 d'Algèbre de Xavier Gourdon)

On considère $A \in M_{p,q}(K)$.

1. Définition : Le rang $rg(A)$ de A est le rang de ses vecteurs colonnes dans K^p, ie la dimension de l'espace engendré
2. Remarque : Si A est la matrice d'une application linéaire f alors $rg(A) = rg(f)$
3. Proposition : $rg(A) \leq inf(p, q)$
4. Proposition : Si $p = q$ alors A est inversible si et seulement si $rg(A) = p$
5. Théorème : Si $r = rg(A)$ alors A est équivalente à $I_r = diag(I_r, 0)$
6. Corollaire : Soit $A, B \in M_{p,q}(K)$, alors A et B sont équivalentes si et seulement si $rg(A) = rg(B)$
7. Définition : Soit $I \subset [\![1, p]\!]$, $J \subset [\![1, q]\!]$, alors $B = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}$ est appelé matrice extraite de A
8. Théorème : $rg(A)$ est le plus grand ordre (ie taille) des matrices carrées inversibles extraites de A
9. Corollaire : A et ${}^tA$ ont le même rang
10. Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, donc $rg(A) = rg({}^tA) = 2$ car le troisième vecteur colonne est somme des deux premiers indépendants

3.3 Point de vue bilinéaire et quadratique

(Chapitres 9.1 et 9.4 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

On considère φ une forme bilinéaire q une forme quadratique sur E de dimension finie n.

1. Définition : Soit e base de E, alors $Mat_e(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$
2. Remarque : Soit P la matrice de passage entre deux bases e et e' de E, alors on a $Mat_e(\varphi) = {}^tPMat_{e'}(\varphi)P$, donc $rg(Mat_e(\varphi)) = rg(Mat_{e'}(\varphi))$ car P inversible
3. Définition : Le rang de φ est le rang de $Mat_e(\varphi)$ dans n'importe quelle base e de E, de plus on dit que φ est dégénérée si $rg(\varphi) = n$
4. Proposition : φ est non dégénérée si et seulement $det(Mat_e(\varphi)) \neq$ pour toute base e de E
5. Exemple : Si $\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$ dans $\mathbb{R}^4$ alors, dans la base canonique e de $\mathbb{R}^4$, $Mat_e(\varphi) = diag(1, 1, 1, -1)$ donc $rg(f) = 4$
6. Exemple : Si $\varphi(x, y) = x_1y_1 - 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - 3x_3y_2 - 3x_2y_3$ alors $rg(\varphi) = 2$

7. Proposition : $dim(E) = rg(\varphi) + dim(N(\varphi))$ avec $N(\varphi) = \{y \in E, \forall x \in E, \varphi(x, y) = 0\} = E^{\perp}$ le noyau de φ
8. Définition : Le rang, noyau et matrice de q sont le rang, noyau et matrice de φ la forme polaire associée
9. Remarque : Le noyau de q n'est pas égal à $I(q) = \{x \in E, q(x) = 0\}$ il s'agit du cône isotrope de q mais $N(q) \subset I(q)$
10. Exemple : Si $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ dans $\mathbb{R}^2$ alors $rg(q) = 3$ et $I(q) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_3 = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$