Leçon 152 Déterminant, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi
2. Algèbre de Xavier Gourdon
3. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière
4. Théorie de l'intégration de Briane et Pagès
5. Algèbre linéaire de Joseph Grifone

Développements.

1. Déterminant circulant et suite de polygones
2. Déterminant de Gram et inégalité de Hadamard

Table des matières

1 Déterminants de vecteurs, d'endomorphisme et de matrices

1.1 Espaces des formes n-linéaires alternées

(Chapitre 17.1 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère E un K-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Définition : Un forme p-linéaire est une application $\varphi : E^p \longrightarrow K$ linéaire selon chaque variable, et on note $L_p(E, K)$ leur ensemble
2. Exemple : Un produit scalaire est une forme bilinéaire
3. Définition : On dit qu'un forme p-linéaire est alternée si $\exists i \leq j, x_i = x_j \Longrightarrow \varphi(x_1, ..., x_p) = 0$, on note $A_p(E, K)$ leur ensemble
4. Théorème : $L_p(E, K)$ est un K-espace vectoriel de dimenion n^p, et $A_p(E, K)$ en est un sous-espace vectoriel
5. Proposition : Soit $\varphi \in L_p(E, K)$, alors φ est alternée si et seulement si $\varphi(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, ..., x_p)$
6. Théorème : $A_n(E, K)$ est de dimension 1 engendré par $det_b(x_1, ..., x_n) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} x_{i,\sigma(i)}$ avec b base de E

1.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

(Chapitre 17.2 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : Soit b une base de E, alors det_b est appelé déterminant dans la base b
2. Théorème : Relation de Chasles : Soit b, b' des bases de E, alors $det_{b'}(x_1, ..., x_n) = det_{b'}(b_1, ..., b_n)det_b(x_1, ..., x_n) = det_{b'}(b)det_b(x_1, ..., x_n)$
3. Théorème : Soit $(x_1, ..., x_n) \in E^n$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
   — $(x_1, ..., x_n)$ est liée
   — Pour toute base b de E, $det_b(x_1, ..., x_n) = 0$
   — Il existe une base b de E telle que $det_b(x_1, ..., x_n) = 0$
4. Corollaire : Soit $(x_1, ..., x_n) \in E^n$, alors $(x_1, ..., x_n)$ est une base de E si et seulement s'il existe une base b de E tel que $det_b(x_1, ..., x_n) \neq 0$
5. Exemple : Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $x_1 = e_1 + e_2, x_2 = e_2 + e_3, x_3 = e_3 + e_1$, alors $det_e(x) \neq 0$ donc x est une base de $\mathbb{R}^3$

1.3 Déterminant d'une matrice carrée

(Chapitre 17.2 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : Soit $A \in M_n(K)$, alors $det(A)$ est le déterminant de ses vecteurs colonnes
2. Remarque : Autrement dit $det(A) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$

3. Proposition : En dimension 2 on obtient $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$, et en dimension 3 $det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + dhc - gec - dbi - hfa$
4. Exemple : $det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$
5. Théorème : Soit $A, B \in M_n(K)$ et $\lambda \in K$, alors $det({}^tA) = det(A)$, $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$ et $det(AB) = det(A)det(B)$
6. Proposition : Soit A et B semblables alors $det(A) = det(B)$
7. Proposition : Soit $A \in GL_n(K)$ alors $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$

1.4 Déterminant d'un endomorphisme

(Chapitre 17.2 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : Soit $u \in End(E)$, alors $det(u)$ est le déterminant de $Mat_b(u)$ avec b n'importe quelle base de E
2. Théorème : Soit $u \in End(E)$, alors $det(u)$ est l'unique $\lambda \in K$ tel que pour tout $\varphi \in A_n(E, K)$, $\varphi(u(x_1), ..., u(x_n)) = \lambda\varphi(x_1, ..., x_n)$
3. Remarque : En particulier $det_b(u(b_1), ..., u(b_n))$ pour n'impporte quelle base b de E
4. Théorème : Soit $u, b \in End(E)$ et $\lambda \in K$, alors $det(\lambda u) = \lambda^n det(u)$, $det(uv) = det(u)det(v)$
5. Proposition : Soit $u, v \in End(E)$ semblables alors $det(u) = det(v)$
6. Proposition : Soit $u \in GL(E)$, alors $det(u^{-1}) = det(u)^{-1}$
7. Exemple : Le déterminant d'une homothétie de rapport λ est λ^n, celui d'une dilatation de rapport λ est λ et celui d'une transvection est 1

2 Méthodes de calcul de déterminants

2.1 Mineurs et cofacteurs

(Chapitre 17.3 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définitions : Soit $A \in M_n(K), i, j \in [\![1, n]\!]$ alors :
   — Le mineure d'indice (i, j) de A est le déterminant de la matrice carrée $A_{i,j}$ extraite de A en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne
   — Le cofacteur d'indice (i, j) de A est $(-1)^{i+j}A_{i,j}$
   — La comatrice de A est $Com(A) = ((-1)^{i+j}det(A_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}$
2. Théorème : Soit $A \in M_n(K)$ et $(i_0, j_0) \in [\![1, n]\!]$ alors $det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j_0}a_{i,j_0}det(A_{i,j_0}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i_0+j}a_{i_0,j}det(A_{i_0,j})$ ce qu'on appelle les développements par ligne ou par colonne

3. Corollaire : Soit $A \in M_n(K)$, alors ${}^tCom(A)A = det(A)I_n = A^tCom(A)$
4. Application : Soit $A \in GL_n(K)$ alors $A^{-1} = det(A)^{-1}\ {}^tCom(A)$
5. Remarque : Numériquement cette méthode est mauvaise car le calcul du déterminant somme sur S_n qui est de cardinal $n!$

2.2 Matrices triangulaires par blocs

(Chapitre 17.3 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Lemme : Soit $A = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ avec $a \in K, \alpha \in M_{1,n-1}(K), B \in M_{n-1}(K)$, alors $det(A) = adet(B)$
2. Proposition : Soit $A \in T_n^+(K)$, alors $det(A) = \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$
3. Lemme : Soit $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$ avec $B \in M_p(K), C \in M_{p,n-p}(K)$, alors $det(A) = det(B)$
4. Proposition : Soit $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $B \in M_p(K), C \in M_{p,n-p}(K), D \in M_{n-p}(K)$, alors $det(A) = det(B)det(D)$
5. Théorème : Soit $A \in M_n(K)$ triangulaire supérieure par blocs $A_1, ..., A_p$, alors $det(A) = det(A_1)...det(A_p)$

2.3 Exemples classiques (circulant, de Vandermonde et de Cauchy)

(Chapitres 17.4.3 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et Exercice 17.5.7 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi, Exercice 3.5.12 d'Algèbre de Xavier Gourdon)

1. Définition : Soit $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$, alors $det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ est appelé déterminant circulant des a_i
2. Proposition : $det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix} = \prod\limits_{k=0}^{n-1} P(e^{\frac{2ki\pi}{n}})$ avec $P = \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_{j+1}X^j$
3. Application : Soit $(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$, $P^0 = (z_1, ..., z_n)$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P^{k+1} = \left(\frac{P_1^k + P_2^k}{2}, ..., \frac{P_n^k + P_1^k}{2}\right)$, alors $P^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} (g, ..., g)$ avec $g = Isobar(z_1, ..., z_n)$ (à connaître)
4. Définition : Soit $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$, alors $det((a_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n})$ est appelé déterminant de Vandermonde des a_i

5. Proposition : Dans ce cas $det((a_i^{j-1})_{1\leq i,j\leq n}) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)$
6. Définition : Soit $a_1, ..., a_n, b_1, ...b_n \in \mathbb{C}$ tel que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_i + b_j \neq 0$, alors $det\left(\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\right)$ est appelé déterminant de Cauchy des a_i, b_j
7. Proposition : Dans ce cas $det\left(\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\right) = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq n} a_i+b_j}$

3 Propriétés et applications du déterminant

3.1 En calcul différentiel

(Exercice 2.3.26 du Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière et 12.2 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

1. Théorème : $det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ et $\forall (M,H) \in (M_n(\mathbb{R}))^2, d(det)(M)(H) = tr({}^tCom(M)H)$
2. Application : Si $A \in C^0(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{R}))$ et $y_1, ..., y_n : \mathbb{R} \longrightarrow R^n$ solutions de $y' = Ay$ et $w = det(y_1, ..., y_n) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ leur wronskien, alors $w' = tr(A)w$ et si A est constante alors $\forall t \in \mathbb{R}, det(exp(tA)) = exp(t\ tr(A))$
3. Application : $GL_n(\mathbb{R})$ ouvert de $M_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$ ouvert de $M_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes et deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{R}$
4. Théorème de changement de variables : Soit $\varphi : U \longrightarrow V$ un C^1-difféomorphisme avec U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurable, alors $f \in L^1(V, \lambda_V)$ si et seulement si $(f \circ \varphi)det(J_\varphi) \in L^1(\lambda_U)$, dans ce cas $\int_V f(x)dx = \int_U f(\varphi(u))det(J_\varphi(u))du$
5. Application : Passage en coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2$: $\varphi(r,\theta) = (rcos(\theta), rsin(\theta))$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times [-\pi, \pi[$ dans $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, donc pour $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\int_{\mathbb{R}^2} f(x)dx = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(rcos(\theta), rsin(\theta))rd\theta dr$
6. Exemple : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

3.2 En algèbre linéaire

(Chapitres 6.3 et 5.2 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Remarque : On étend le déterminant sur un anneau A grâce à la formule explicite et si A est intègre alors les propriétés du déterminants restent vraies car A se plonge dans $Frac(A)$
2. Définition : Soit $f \in End(E)$, alors $\chi_f := det(Xid_E - f)$ est appelé polynôme caractéristique de f
3. Proposition : Les valeurs propres de $A \in M_n(K)$ sont les racines de χ_A unitaire de degré n
4. Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, alors $\chi_A = (X-2)(X-3)$ donc les valeurs propres de A sont 2 et 3 distinctes, donc A est diagonalisable

5. Définition : Un système de Cramer est un système linéaire $Ax = b$ d'inconnue $x \in K^n$ avec $b \in K^n$ et $A \in GLn(K)$
6. Théorème : Dans ce cas $Ax = b$ admet une unique solution donnée par les formules de Cramer $x_i = \frac{det(A_1,...,A_{i-1},b,A_{i+1},...,A_n)}{det(A)}$
7. Exemple : Le système de Cramer $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-5y+2z & = & 7 \\ x+2y-4z & = & 3 \\ 3x-4y-6z & = & 5 \end{array}\right.$ admet pour solution $(x,y,z) = (5,1,1)$

3.3 En géométrie

(Chapitres 4.10 et 4.11 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone, Exercice 7.19 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Théorème : Soit $(u,v) \in (\mathbb{R}^2)^2$, alors l'aire du parallélogramme engendré par u et v est $A(u,v) = |det(u,v)|$
2. Théorème : Si $(u,v,w) \in (\mathbb{R}^3)^3$ alors le volume du parallélépipède engendré par u,v,w est $Vol(u,v,w) = |det(u,v,w)|$
3. Définition : Soit b, b' deux bases de $\mathbb{R}^n$, alors on dit que b et b' ont même orientation si $det_b(b') > 0$, dans le cas contraire on dit qu'elles ont une orientation opposée
4. Proposition : L'ensemble B des bases de $\mathbb{R}^n$ se partage en deux sous-ensembles disjoints non vides B_1, B_2, appelés classes d'orientation, tels que toutes les bases de B_1 aient la même orientation et pareil pour B_2
5. Définition : On dit que l'on a fixé une orientation de $\mathbb{R}^n$ si l'on choisit une classe d'orientation
6. Exemple : En choisissant la base canonique $(e_1,...,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ comme orientation positive, alors la base $(-e_1,e_2,...,e_n)$ est orienté négativement
7. Définition : On suppose E euclidien, soit $v_1,...,v_n \in E$, alors la matrice de Gram de la famille $(v_1,...,v_n)$ est $Gram(\langle v_i,v_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$ et on note $G(v_1,...,v_n)$ son déterminant
8. Proposition : Dans ce cas, $G(v_1,...,v_n) \neq 0$ si et seulement si la famille $(v_1,...,v_n)$ est libre
9. Théorème : Dans ce cas, avec $F = Vect(v_1,...,v_n), x \in E$, on a $d(x,F)^2 = \frac{G(x,v_1,...,v_n)}{G(v_1,...,v_n)}$
10. Application : Inéglité de Hadamard : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(x_1,...,x_n) \in E^n$, alors :
    — $G(x_1,...,x_n) \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$
    — Si $E = \mathbb{C}^n$ alors $|det(x_1,...,x_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$
    On a égalité si et seulement si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est orthogonale ou si l'un des vecteurs est nul.
11. Application : Géométriquement dans $\mathbb{R}^3$ le volume du parallélépipède engendré par $u,v,w \in \mathbb{R}^3$ est majoré par le volume du pavé droit $\|u\| \|v\| \|w\|$