Leçon 153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie, réduction en dimension finie, applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi
2. Algèbre linéaire de Joseph Grifone
3. Algèbre de Xavier Gourdon
4. Algèbre linéaire Réduction d'endomorphismes de Mansuy et Mneimné
5. Analyse de Xavier Gourdon

Développements.

1. Décomposition de Dunford-Jordan-Chevalley
2. Réduction de Jordan

Table des matières

1 Polynômes d'endomorphismes

1.1 Algèbre et polynôme minimal

(Chapitres 19.1 et 19.2 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère E un espace vectoriel et $u \in End(E)$.

1. Définition : $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ avec $u^k = u \circ ... \circ u$
2. Définition : On note $K[u]$ la sous-algèbre de $End(E)$ engendré par u, ie l'ensemble des $P(u)$ pour $P \in K[X]$
3. Exemple : Si $u^2 = u$ est un projecteur alors $K[u] = \{au + bid_E, (a,b) \in K^2\}$
4. Remarque : $K[u]$ est une algèbre commutative $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) = (QP)(u)$
5. Remarque : De même on définit $K[A]$ et si $A = Mat_b(u)$ alors $P(A) = Mat_b(P(u))$
6. Proposition : L'ensemble I_u des polynômes annulateurs de u est un idéal de $K[X]$, donc il existe un unique $\pi_u \in K[X]$ unitaire, appelé polynôme minimal de u, tel que $I_u = (\pi_u)$
7. Exemple : Si u nilpotent d'indice q alors $\pi_u = X^q$
8. Lemme : Soit F sous-espace de E stable par u et $v = u_{|F} \in End(F)$, alors $\pi_v \mid \pi_u$
9. Théorème : Soit $P \in I_u$, alors $Sp(u) \subset Z(P)$, et $Sp(u) = Z(\pi_u)$
10. Théorème : $K[u]$ est un espace vectoriel de dimension $deg(\pi_u)$ et de base $(1, u, ..., u^{deg(\pi_u)-1})$
11. Théorème : On a $K[u]$ est un corps si et seulement si $K[u]$ est intégre si et seulement si π_u est irréductible

1.2 Polynômes caractéristiques et valeurs propres

(Chapitres 6.3 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone et 19.3 d'Algèbre et géométrie de Jean Etienne Rombaldi)

1. Définition : $\chi_u = det(Xid_E - u)$
2. Remarque : χ_u est unitaire et $deg(\chi_u) = n$
3. Exemple : Si $u = \lambda id_E$ alors $\chi_u = (X - \lambda)^n$
4. Définition : $\pi_{u,x}$ est le générateur unitaire de $I_{u,x} = \{P \in K[X], P(u)(x) = 0\} \neq \varnothing$
5. Lemme : $E_{u,x} = Vect(u^k(x), k \in \mathbb{N}\}$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $deg(\pi_{u,x})$ stable par u, de plus $\pi_{u_{|E_{u,x}}} = \chi_{u_{|E_{u,x}}} = \pi_{u,x}$
6. Théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_u(u) = 0$
7. Corollaire : λ valeur propre de u si et seulement si $\chi_u(\lambda) = 0$

1.3 Lemme des noyaux

(Chapitre 19.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Lemme : Soit $P_1, ..., P_p \in K[X]$ deux à deux premiers entre eux et $Q_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} P_j$, alors $Q_1, ..., Q_p$ sont premiers entre eux dans leur ensemble et $P_k \wedge Q_k = 1$
2. Lemme des noyaux : Soit $P_1, ..., P_p$ deux à deux premiers entre eux et $P = \prod_{k=1}^{p} P_k$, alors $ker(P(u)) = \sum_{k=1}^{p} ker(P_k(u))$ et les projecteurs $p_k : ker(P(u)) \longrightarrow ker(P_k(u)) \in K[u]$
3. Remarque : Ce théorème est également vrai en dimension infinie
4. Corollaire : Soit $\pi_u = \prod_{k=1}^{p} P_k^{\beta_k}$, alors $E = \bigoplus_{k=1}^{p} ker(P_k^{\beta_k})$
5. Corollaire : Soit $\chi_u = \prod_{k=1}^{p} P_k^{\alpha_k}$ le polynôme caractéristique de u, alors $E = \bigoplus_{k=1}^{p} ker(P_k^{\alpha_k})$

2 Applications à la réduction d'endomorphismes

2.1 Trigonalisation, diagonalisation et décomposition de Dunford

(Chapitres 19.4 et 19.5 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Théorème : Les assertions suivantes sont équivalentes :
   — u est diagonalisable
   — Il existe $P \in K[X]$ scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$
   — π_u est scindé à racines simples
2. Exemple : Soit p projecteur alors p diagonalisable car annulé par $X^2 - X$
3. Théorème : Les assertions sont équivalentes :
   — u est trigonalisable
   — Il existe $P \in K[X]$ scindé tel que $P(u) = 0$
   — π_u est scindé
4. Corollaire : Si π_u scindé alors $det(u) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} \lambda^{\nu(\lambda)}$ et $tr(u) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \lambda^{\nu(\lambda)}$
5. Corollaire : Si K est algébriquement clos alors tout $u \in End(E)$ est trigonalisable
6. Exemple : Dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel tout endomorphisme est trigonalisable
7. Théorème : Si $P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$ et $N_k = ker\left((u - \lambda_k id_E)^{m_k}\right)$ avec $m_k \geq \beta_k$ alors $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$, $N_k = ker\left((u - \lambda_k id_E)^{\beta_k}\right)$, N_k est u-stable et $Sp\left(u_{N_k}\right) = \{\lambda_k\}$, $dim(N_k) = \alpha_k$ et $(u - \lambda_k id_E)_{|N_k}$ est nilpotent d'indice β_k
8. Lemme : p_k projecteur de E sur N_k parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} N_j$ est un polynôme en u

9. Théorème de décomposition de Dunford : Si χ_u est scindé alors il existe un unique couple $(d,n) \in End(E)^2$ tel que d diagonalisable, n nilpotent, $dn = nd$ et $u = d + n$, de plus $(d,n) \in K[u]^2$
10. Corollaire : Soit $A \in M_n(K)$ tel que χ_A soit scindé sur K, alors il existe un unique couple $(D,N) \in M_n(K)^2$ tel que $DN = ND$, D diagonalisable, N nilpotente et $A = D + N$, de plus D et N sont des polynôme en A
11. Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, alors la décomposition de Dunford de A est $D = \begin{pmatrix} a & 1 & -\frac{1}{b-a} \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{b-a} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.2 Endomorphismes nilpotents et réduction de Jordan

(Chapitres 21.3 et 21.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Lemme : Si u nilpotent d'indice q alors ${}^t u \in End(E^*)$ est nilpotent d'indice q
2. Lemme : Si u nilpotent d'indice q et $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$ alors $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ est libre et $F = Vect(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ est stable par u
3. Lemme : Si u nilpotent d'indice q alors il existe $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ tels que $F = Vect(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ et $G = {}^\perp H = {}^\perp Vect(\varphi, {}^t u(\varphi), ..., ({}^t u)^{q-1}(\varphi))$ sont u-stables et $E = F \oplus G$
4. Théorème de réduction des endomorphismes nilpotents : Si u nilpotent d'indice q alors il existe une base $b = (b_1, ..., b_r)$ de E telle que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$:
   — $E_i = Vec(b_i)$ est stable par u
   — $J_i = Mat_{b_i}\left(u_{|E_i}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{dim(E_i)}(K)$
   Ainsi $Mat_b(u) = diag(J_1, ..., J_r)$
5. Théorème de réduction de Jordan : Si χ_u est scindé alors il existe une base b de E tel que $Mat_b(u) = diag(J_1, ..., J_p)$ avec $J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_{k,1} & \lambda_k & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{k,\alpha_k - 1} & \lambda_k & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_{k,i} \in \{0, 1\}$
6. Corollaire : Toute matrice $A \in M_n(K)$ de polynôme caractéristique scindé est semblable à une matrice de la forme précédente

2.3 Invariants de similitude et réduction de Frobenius

(Chapitre B d'Algèbre de Xavier Gourdon)

1. Définition : Soit $x \in E$, alors on note $\pi_{u,x}$ le polynôme unitaire engendrant l'idéal $\{P \in K[X], P(u)(x) = 0\}$, et $E_x := \{P(u)(x), P \in K[x]$
2. Proposition : Il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$
3. Définition : On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_{u,x} = E$
4. Remarque : u est cyclique si et seulement si $deg(\pi_u) = n$ si et seulement si $\pi_u = \chi_u$
5. Proposition : Si u cyclique alors il existe une base b de E tel que $Mat_b(u) = C(\pi_u)$ avec $C(\pi_u)$ matrice compagnon associée au polynôme π_u
6. Théorème : Il existe $F_1, ..., F_r$ sous-espaces u-stables tels que :
   - $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$
   - Pour tout $i \in [\![1, r,]\!], u_i = u_{|F_i}$ est cyclique
   - Pour tout $i \in [\![1, r]\!], \pi_{i+1} \mid \pi_i$
7. Remarque : $\pi_1, ..., \pi_r$ ne dépendent que de u et non du choix de la décomposition
8. Définition : Les $\pi_1, ..., \pi_r$ sont appelés les invariants de similtudes de u
9. Théorème de réduction de Frobenius : Il existe une base b de E tel que $Mat_b(u) = \begin{pmatrix} C(\pi_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C(\pi_r) \end{pmatrix}$
10. Remarque : $\pi_1 = \pi_u$ et $\pi_1 ... \pi_r = \chi_u$
11. Corollaire : u et v sont semblables si et seulement s'ils ont les mêmes invariants de similitude
12. Application : A partir de la réduction de Frobenius on peut retrouver la réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent

3 Utilisation des polynômes d'endomorphimes

3.1 Calculs d'inverses et de puissances

(Chapitre 1.4 d'Algèbre linéaire de Mansuy et Mneimné)

1. Proposition : Soit $P \in K[X]$ tel que $P(u) = 0$ et $P(0) = a_0 \neq 0$ alors $u \in GL(E)$ et $u^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{d} a_k u^{k-1} \in K[u]$
2. Exemple : Si $(u - 2id_E) \circ (u - 3id_E) = 0$ et u n'est pas une homothétie alors $u^{-1} = -\frac{1}{6}(u - 5id_E)$
3. Corollaire : $u \in GL(E) \Longleftrightarrow 0 \notin Z(\pi_u)$
4. Proposition : Si $P(u) = 0$ alors $\forall k \in \mathbb{N}, u^k \in Vect(id_E, ..., u^{d-1})$
5. Exemple : Soit $P = (X - a)(X - b)$ tel que $P(u) = 0$ alors $u^k = \frac{a^k - b^k}{a - b} u + \frac{ba^m - ab^m}{b - a} id_E$

3.2 Calcul d'exponentielles de matrices

(Chapitre 23.3 d'Algèbre linéaire d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Théorème : Soit $A \in M_n(K)$, alors $exp(A) \in K[A]$
2. Proposition : Soit $A \in M_n(K)$ diagonalisable $A = PDP^{-1}$, alors $exp(A) = Pexp(D)P^{-1}$ avec $exp(D) = diag(exp(D_{11}), ..., exp(D_{nn}))$
3. Exemple : Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, alors A diagonalisable puis après calculs $exp(A) = \begin{pmatrix} -6e^2+3e^3 & -4e^2+4e^3 & 10e^2-6e^3 \\ -6e^2+3e^3 & -3e^2+4e^3 & 9e^2-6e^3 \\ -7e^2+3e^3 & -4e^2+4e^3 & 11e^2-6e^3 \end{pmatrix}$
4. Proposition : Soit $A \in M_n(K)$ de décomposition de Dunford $A = D+N$, alors $exp(A) = exp(D)exp(N)$ avec $exp(D), exp(N)$ facilement calculables car D diagonalisable et N nilpotente

3.3 Résolution d'équations différentielles linéaires (pas adaptée à la dimension finie)

(Chapitres 19.8 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et 6.2 d'Analyse de Xavier Gourdon)

On considère une équation différentielle $y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y$ et $D : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ l'application linéaire de dérivation.

1. Définition : Le polynôme $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_x X^k$ est appelé polynôme caractéristique de l'équation
2. Remarque : L'ensemble des solutions est $S = ker(P(D))$ un espace vectoriel
3. Lemme : Si $P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$ alors $S = \bigoplus_{k=1}^{p} ker((D - \lambda_k id)^{m_k})$
4. Lemme : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, alors les solutions de $(D - \lambda id)^m(y) = 0$ forment un espace vectoriel de dimension m engendré par les $y_k(x) = x^k e^{\lambda x}$
5. Théorème : Les solutions de l'équation sont de la forme $\sum_{k=1}^{p} e^{\lambda_k x} P_k(x)$ avec P_k polynomiale de degré inférieur à $m_k - 1$
6. Corollaire : S est de dimension n engendré par les $y_{j,k}(x) = x^j e^{\lambda_k x}$
7. Corollaire : Si $a_k \in \mathbb{R}$ alors les solutions à valeurs réelles sont de la forme $y(x) = \sum_{k=1}^{r} e^{\alpha_k x} P_k(x) + \sum_{k=r+1}^{s} e^{\beta_k x} cos(\gamma_k x) P_k(x) + \sum_{k=r+1}^{s} e^{\beta_k x} sin(\gamma_k x) Q_k(x)$
8. Exemple : Si l'équation est $y'' + 2y' + y = 0$ alors le polynôme caractéristique est $X^2 + 2X + 1$ et les solutions sont de la forme $(\lambda t + \mu)e^{-t}$