Leçon 154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre linéaire de Mansuy et Mneimné
2. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi
3. Algèbre de Xavier Gourdon
4. Algèbre linéaire de Joseph Grifone

Développements.

1. Décomposition de Dunford-Jordan-Chevalley
2. Réduction de Jordan
3. Réduction dans $O_n(\mathbb{R})$

Table des matières

1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

1.1 Définition et endomorphismes induits

(Chapitre II.2 et II.3 d'Algèbre linéaire de Mansuy et Mneimné)
On considère E un K-espace vectoriel et $f \in End(E)$.

1. Définition : Soit F sous-espace de E, alors on dit que F est f-stable si $f(F) \subset F$
2. Exemple : $ker(f)$ et $Im(f)$ sont f-stables
3. Proposition : Soit F sous-espace de E f-stable et g-stable avec $g \in End(E)$, alors F est $f+g$-stable et $f \circ g$-stable, de plus si $g \in GL(E)$ alors $g(F)$ est $g \circ f \circ g^{-1}$-stable
4. Exemple : Si f rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe $Vect(u)$ et d'angle θ alors $g \circ f \circ g^{-1}$ est une rotation d'axe $Vect(f(u))$ et d'angle θ
5. Définition : Soit F sous-espace de E f-stable, alors $f_F := f_{|F}^{|F}$ est l'endomorphisme induit par la restriction de f à F
6. Proposition : Dans ce cas $\mu_{f_F} \mid \mu_f$ et $\chi_{f_F} \mid \chi_f$
7. Corollaire : Soit F, G deux sous-espaces f-stables tels que $E = F \oplus G$, alors $\pi_f = ppcm(\pi_{f_F}, \pi_{f_G})$

1.2 Noyaux stables et décomposition de Dunford-Jordan-Chevalley

(Chapitres 19.4 et 19.5 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Lemme : Soit $P_1, ..., P_p \in K[X]$ non nuls deux à deux premiers entre eux et $Q_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} P_k$, alors $Q_1, ..., Q_p$ sont premiers entre eux dans leur ensemble
2. Théorème de décomposition des noyaux : Dans ce cas, soit $P := \prod_{k=1}^{p} ker(P_k(f))$, alors $ker(P(f)) = \bigoplus_{k=1}^{p} ker(P_k(f))$ et les projecteurs $\pi_k \in K[f]$
3. Application : f est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de f scindé à racines simples si et seulement si π_f est scindé à racines simples
4. Définition : Si $\pi_f = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\beta_k}$ est scindé alors $\chi_f = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ et les $N_k := ker((f - \lambda_k)^{\alpha_k})$ sont appelés les sous-espaces caractéristiques de f
5. Proposition : Dans ce cas $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$, $N_k = ker((f - \lambda_k id_E)^{\beta_k})$, N_k est f-stable et $Sp(f_k) = \{\lambda_k\}$, $dim(N_k) = \alpha_k$ et $(f - \lambda_k id_E)_{|N_k}$ est nilpotent d'indice β_k
6. Théorème de décomposition de Dunford-Jordan-Chevalley : Si χ_f est scindé alors il existe une unique couple $(d, n) \in End(E)^2$ tel que d diagonalisable, n nilpotent, $d \circ n = n \circ d$ et $f = d + n$, de plus $d, n \in K[f]$
7. Exemple : Ce théorème est toujours vérifié si $K = \mathbb{C}$

8. Corollaire : Soit $A \in M_n(K)$ de polynôme caractéristique scindé, alors il existe un unique couple $(D, N) \in M_n(K)^2$ tel que D diagonalisable, N nilpotent, $DN = ND$ et $A = D + N$, de plus $D, N \in K[A]$
9. Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, alors la décomposition de Dunford de A est $D = \begin{pmatrix} a & 1 & -\frac{1}{b-a} \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{b-a} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
10. Application : Une décomposition de Dunford permet de calculer les puissances successives ou l'exponentielle de f car d et n commutent

1.3 Codiagonalisation et cotrigonalisation

(Chapitres VIII.2 et IX.1 d'Algèbre linéaire de Mansuy et Mneimné et 21.6 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

On considère $(f_i)_{i \in I} \in End(E)^I$.

1. Proposition : Si f_1 et f_2 commutent, soit F sous-espace stable par u_1, alors F est stable par f_2
2. Définition : On dit que les f_i sont codiagonalisables s'il existe une base de E composée de vecteurs propres communs à tous les f_i
3. Proposition : Si $|I| = n$ alors les f_i sont codiagonalisables si et seulement si les f_i sont diagonalisables et commutent deux à deux
4. Exemple : Soit $A, B \in M_n(K)$ diagonalisables, alors $T(M) = AMB$ est diagonalisable car $G_A(M) = AM$ et $D_B(M) = MB$ sont codiagonalisables
5. Théorème : Les f_i sont codiagonalisables si et seulement si les f_i commutant deux à deux et sont diagonalisables
6. Corollaire : Soit $(A_i)_{i \in I} \in M_n(K)^I$, alors les A_i sont codiagonalisables, ie il existe $P \in GL_n(K)$ tel que tout $P^{-1} A_i P$ soit diagonale, si et seulement si les A_i sont diagonalisables et commutent deux à deux
7. Définition : On dit les f_i sont cotrigonalisables s'il existe une base b de E tel que toute les matrices $Mat_b(f_i)$ soient triangulaires supérieures
8. Théorème : Les f_i sont cotrigonalisables si et seulement si les f_i sont trigonalisables et commutent deux à deux

2 Sous-espaces stables par la transposée d'un endomorphisme

2.1 Tansposée d'une application linéaire

(Chapitre 14.5 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

On considère E, F deux espaces vectoriels.

1. Définition : Soit $u \in L(E,F)$, alors ${}^t u : \varphi \in F^* \longmapsto \varphi \circ u$ est appelé transposée de u
2. Proposition : Dans ce cas ${}^t u \in L(F^*, E^*)$
3. Théorème : L'application transposition est linéaire et injective de $L(E,F)$ dans $L(F^*, E^*)$
4. Corollaire : $L(E,F)$ et $L(F^*, E^*)$ sont isomorphes de même dimension
5. Théorème : Soit $u \in L(E,F), v \in L(F,G)$ avec G un espace vectoriel, alors :
   - ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$
   - Si $F = E$ alors ${}^t id_E = id_{E^*}$
   - Si u est un isomorphisme alors ${}^t u$ également et $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$
   - $ker({}^t u) = Im(u)^\perp, Im({}^t u) = ker(u)^\perp, rg(u) = rg({}^t u)$
   - u est surjective (respectivement injective) si et seulement si ${}^t u$ est injective (respectivement surjective)
6. Théorème : Soit $u \in L(E,F)$ et A sa matrice dans les bases b, b', alors la matrice de ${}^t u$ dans les bases b'^* et b^* est ${}^t A$
7. Théorème : Soit F sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par ${}^t u$, et pour G sous-espace vectoriel de E^* stable par ${}^t u$, alors ${}^\perp G$ est stable par u

2.2 Application à la réduction de Jordan

(Chapitres 21.3 et 21.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : Soit $u \in L(E)$, alors on dit que u est nilpotent s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^q = 0$ et $u^{q-1} \neq 0$, dans ce cas q est l'indice de nilpotence de q
2. Lemme : Soit $u \in L(E)$ nilpotent d'indice q, alors ${}^t u \in L(E^*)$ est nilpotent d'indice q
3. Lemme : Soit $u \in L(E)$ nilpotent d'indice q et $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, alors la famille $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ soit libre et l'espace engendré F soit stable par u
4. Lemme : Soit $u \in L(E)$ nilpotent d'indice q, alors il existe $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ tels que $F = Vect(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ et $G = {}^\perp Vect(\varphi, {}^t u(\varphi), ..., ({}^t u)^{q-1}(\varphi))$ soit stables par u et $E = F \oplus G$
5. Proposition : Soit $u \in L(E)$ nilpotent d'indice q, alors il existe une base $b = b_1 \cup ... \cup b_r$ une base de E telle que $E_i = Vect(b_i)$ soit u-stable et $Mat_{b_i}(u_{|E_i}) = J_i \in M_{q_i}(K)$ avec $q_i = dim(E_i)$
6. Théorème : Soit $u \in L(E)$ tel que χ_u soit scindé, alors il existe une base b de E telle que $Mat_b(u)$ soit diagonale par blocs de Jordan
7. Remarque : L'hypothèse est toujours vérifiée dans un corps algébriquement clos, comme par exemple $\mathbb{C}$
8. Application : Soit $A \in M_n(K)$, alors A et ${}^t A$ sont sembables
9. Applcation : Le calcul d'une exponentielle de matrice devient plus simple

3 Sous-espaces cycliques

3.1 Matrice compagnon et endomorphismes cycliques

(Chapitre B.1 d'Algèbre de Xavier Gourdon)

1. Définition : Soit $x \in E$, alors π_x est le polynôme unitaire tel que $(\pi_x) = \{P \in K[X], P(u)(x) = 0\}$ et $E_x = \{P(u)(x), P \in K[X]$
2. Proposition : Soit $x \in E$, alors E_x est sous-espace de E de dimension $deg(\pi_x)$ et de base $(x, ..., u^{deg(\pi_x)-1})$
3. Théorème : Il existe $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_u$
4. Définition : On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$
5. Définition : Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + ... + a_0 \in K[X]$, alors on note $C(P)$ sa matrice compagnon
6. Proposition : Soit $P \in K[X]$, alors $\pi_{C(P)} = \chi_{C(P)} = P$
7. Théorème : Si u cyclique alors il existe une base b de E tel que $Mat_b(u) = C(\pi_u)$

3.2 Invariants de similitude et réduction de Frobenius

(Chapitre B.2 d'Algèbre de Xavier Gourdon)

1. Théorème : Il existe $F_1, ..., F_r$ sous-espaces de E stables par u tels que $E = F_1 \oplus ... \oplus F_r$, $u_i := u_{|F_i}$ cyclique et $P_i := \pi_{u_i} \mid P_{i-1}$
2. Remarque : La suite des polynômes P_i ne dépend que de u
3. Définition : La suite des polynômes P_i est appelée les invariants de similitude de u
4. Théorème de réduction de Frobenius : Il existe une base b de E telle que $Mat_b(u) = diag(C(P_1), ..., C(P_r))$
5. Corollaire : Deux endomorphismes sont semblables si et seulement s'ils ont les mêmes invariants de similitude
6. Application : A partir de la réduction de Frobenius on peut retrouver le réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent
7. Application : Soit $A, B \in M_n(K)$ et L une extension de corps de K tels que A et B soient semblables sur L alors A et B sont semblables sur K

4 Sous-espaces stables par l'adjoint d'un endomorphisme

4.1 Définition et propriétés

(Chapitre 22.2 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

On considère E un espace vectoriel euclidien, ie un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

1. Théorème : Soit $u \in End(E)$, alors il existe un unique $u^* \in End(E)$ tel que $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$, u^* est appelé adjoint de u
2. Exemple : Si $u(x) = \lambda x$ alors $u^*(y) = \lambda y$
3. Théorème : Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de $E, G = (\langle e_i, e_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de Gram associéé et $u \in End(E)$ de matrice A dans la base e, alors la matrice de u^* dans la base e est $G^{-1}\ {}^tAG$

4. Corollaire : Dans ce cas, si e orthonormale alors la matrice de u^* dans la base e est ${}^tA$
5. Corollaire : Soit $u \in End(E)$, alors $det(u) = det(u^*)$
6. Proposition : Soit $\lambda \in \mathbb{R}, u, v \in End(E)$, alors $(\lambda u+v)^* = \lambda u^*+v^*, (u^*)^* = u, (u\circ v)^* = v^* \circ u^*$
7. Corollaire : Soit $u \in GL(E)$, alors $u^* \in GL(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$
8. Proposition : Soit $u \in End(E)$, alors $ker(u^*) = Im(u)^\perp, Im(u^*) = ker(u)^\perp$
9. Corollaire : Soit $u \in End(E)$, alors $rg(u^*) = rg(u)$
10. Théorème : Soit $u \in End(E)$ et F sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*

4.2 Réduction des endomorphismes orthogonaux et symétriques

(Chapitres 22.3, 22.4n 22.6, 22.7 et 22.9.2 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et 7.13 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Définition : Soit $u \in End(E)$, alors on dit que u est orthogonal si $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, et on note $O(E)$ leur ensemble
2. Exemple : Les seules homothéties dans $O(E)$ sont id_E et $-id_E$, si $dim(E) = 2$, soit $u \in End(E)$ rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors $u \in O(E)$
3. Théorème : Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ base orthonormée de E et $u \in End(E)$ tel que $Mat_e(u) = A$, alors $u \in O(E)$ si et seulement si $A^tA = {}^tAA = I_n$
4. Lemme : Soit $u \in O(E)$, alors il existe des sous-espaces vectoriels $F_1, ..., F_r$ de E deux à deux orthogonaux de dimension 1 ou 2 et stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$
5. Proposition : Soit $u \in O(E)$ et F sous-espace vectoriel de E stable par F, alors $F^\perp$ est stable par u
6. Théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux : Soit $u \in O(E)$, alors il existe une base orthonormée e de E telle que $Mat_e(u) = diag(I_p, I_q, R_1, ..., R_r)$ avec $p, q \in [\![1, n]\!], R_i = R(\theta_i), \theta_i \in \,]0, 2\pi[\, \setminus\{\pi\}$
7. Définition : Soit $u \in End(E)$, alors on dit que u est symétrique si $\langle u(x), y\rangle x, u(x)\rangle$, ie $u^* = u$, et on note $S(E)$ leur ensemble
8. Lemme : Soit $u \in S(E)$, alors $Sp(u) \subset \mathbb{R}$
9. Lemme : Soit $u \in S(E)$ et $\lambda, \mu \in Sp(u)$ distincts, alors $E_\lambda = ker(u - \lambda id_E)$ et $E_\mu = ker(u - \mu id_E)$ sont orthogonaux
10. Théorème spectral : Soit $u \in S(E)$, alors u est diagonalisable dans une base orthonormée de E
11. Remarque : Ce théorème est faux en dimension infinie (on a besoin d'un opérateur compact) et est faux sur $\mathbb{C}$
12. Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ est symétrique non diagonalisable

13. Corollaire : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale tels que $A = PD^tP$
14. Corollaire : Soit $(u_i)_{i\in I} \in S(E)^I$, alors il existe une base orthonormale de diagonalisation commune aux u_i si et seulement si les u_i commutent entre eux deux à deux

5 Représentations linéaires de groupes finis

5.1 Représentations et sous-représentations

(Chapitres 6.1 et 6.2 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère G un groupe fini.

1. Définition : Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\rho : G \longrightarrow GL(V)$, alors on dit que (ρ, V) est une représentation linéaire si ρ est un morphisme de groupes, dans ce cas on dit que V est un G-module
2. Exemple : $\rho(g) = id_V$ définit une représentation dite triviale
3. Définition : Soit (ρ, V) une représentation de V, alors le degré de (ρ, V) est $dim(V)$
4. Remarque : Si $dim(V) < +\infty$ et b base de V alors une représentation $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ revient à se donner un morphisme de groupes $G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$
5. Remarque : Se donner une représentation $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ revient à se donner une action à gauche $(g, x) \in G \times V \longrightarrow g * x \in V$
6. Définition : On dit qu'un sous-espace F de V est G-invariant si $\forall g \in G, \rho(g)(F) \subset F$
7. Exemple : $\{0\}$ et V sont G-invariants
8. Exemple : Soit (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux représentations de G et $u \in L_G(V_1, V_2)$ ie $u \in L(V_1, V_2)$ et $\forall g \in G, u \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ u$, alors $ker(u)$ et $Im(u)$ sont G-invariants dans V_1 et V_2

5.2 Représentations irréductibles et décomposition

1. Définition : On dit que (ρ, V) est irréductible (ou simple) si $E \neq \{0\}$ et les seuls sous-espaces G-invariants sont $\{0\}$ et V
2. Exemple : Si $|G| = dim(V) = n < +\infty$ alors la représentation régulière n'est pas irréductible car $Vect\left(\sum\limits_{k\in G} e_k\right)$ est G-invariant
3. Lemme de Schur : Soit (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) sont irréductibles, alors :
   (a) Si V_1 et V_2 ne sont pas G-isomorphes alors $L_G(V_1, V_2) = \{0\}$
   (b) Si V_1 et V_2 sont G-isomorphes et de dimension finie alors $dim(L_G(V_1, V_2)) = 1$, en particulier $L_G(V_1, V_2)$ est un corps
4. Théorème : Soit (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux représentations de G, $u \in L(V_1, V_2)$ et $\hat{u} = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} \rho_2(g) \circ u \circ \rho_1(g^{-1})$, alors :
   — $\hat{u} \in L_G(V_1, V_2)$

— Si (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) sont irréductibles non G-isomorphes alors $\hat{u} = 0$

— Si $(\rho_1, V_1) = (\rho_2, V_2)$ irréductible de degré fini alors $\hat{u} = \frac{tr(u)}{dim(V_1)} id_{V_1}$, ie $\hat{u}$ est l'homothétie de rapport $\frac{tr(u)}{dim(V_1)}$

5. Lemme : Soit (ρ, V) représentation de G, W un sous-espace vectoriel G-invariant de V et $\pi \in End(V)$ le projecteur d'image W, alors $\hat{\pi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ \pi \circ \rho(g^{-1}) \in L_G(V, V)$ est un projecteur d'image F et il existe W' un sous-espace vectoriel G-invariant de V tel que $V = W \oplus W'$
6. Théorème de Machske : Soit (ρ, V) représentation de degré fini de G, alors (ρ, V) est somme directe de sous-représentations irréducitbles, ie il existe des sous-espaces vectoriels V_i G-invariants de V tel que $V = \bigoplus_{i=1}^{p} V_i$