Leçon 162 Systèmes d'équations linéaires, opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre linéaire de Joseph Grifone
2. Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi
3. Oraux X-ENS Analyse 4

Développements.

1. Décompositions LU et de Cholesky
2. Méthode de gradient à pas optimal

Table des matières

1 Mise en place du problème

1.1 Systèmes d'équations linéaires

(Chapitre 5.1 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)
On considère K un corps.

1. Définition : Un système linéaire de p équations en n inconnues est de la forme $\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1+...+a_{pn}x_n & = & b_p \end{array}\right.$ avec $a_{ij}, b_i \in K$ et d'inconnues $x_j \in K$
2. Proposition : Le système précédent peut s'écrire matriciellement $AX = B$ avec $A \in M_{p,n}(K), B \in K^p$ et d'inconnue $X \in K^n$
3. Proposition : Le système précédent peut s'écrire vectoriellement $x_1c_1 + ... + x_nc_n = b$ avec $c_j \in K^p, b \in K^p$ et d'inconnues $x_i \in K$
4. Exemple : Le système $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 3 \\ 4x+5y & = & 6 \\ 7x+8y & = & 9 \end{array}\right.$ s'écrit s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ et vectoriellement $x\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

1.2 Systèmes de Cramer et cas triangulaire

(Chapitres 5.1, 5.3, 5.4 et 5.5 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi et 5.2 d'Algèbre linéaire de Grifone)
On considère $A \in GL_n(K)$.

1. Définition : On dit qu'un système est de Cramer si $A \in GL_n(K)$
2. Théorème : Un système de Cramer admet toujours une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$
3. Proposition : Si on note A_j la matrice obtenue de A en remplaçant sa j-ièmre colonne par b alors la solution de $Ax = b$ est donnée par les formes de Cramer $x_j = \frac{det(A_j)}{det(A)}$
4. Exemple : Le système $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-5y+2z & = & 7 \\ x+2y-4z & = & 3 \\ 3x-4y-6z & = & 5 \end{array}\right.$ est de Cramer et la solution est $x = 5, y = 1, z = 1$
5. Remarque : Cette méthode comporte $n^2n!$ opérations élémentaires ce qui est beaucoup trop grand
6. Proposition : Si A est triangulaire supérieure alors la résolution de $Ax = b$ se fait en remontant $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right)$
7. Remarque : Pour un système triangulaire inférieur, on procède de même en remontant

2 Méthode du pivot de Gauss

2.1 Opérations élémentaires

(Chapitres 5.1, 5.3, 5.4 et 5.5 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définitions : On appelle matrice de transvection (respectivement de dilatation) toute matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ (respectivement $D_i(\lambda) = I_n + \lambda E_{ii}$) avec $1 \leq i \neq j \leq n, \lambda \in \mathbb{K}^*$, et on appelle matrice élémentaire toute matrice de transvection ou de dilatation
2. Lemme : Une matrice élementaire est inversible et $\forall (i,j,\lambda) \in [\![1,n]\!]^n \times \mathbb{K}^*, T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda), D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$
3. Définition : On appelle matrice déduite de A par opérations élémentaires sur les lignes de A toute matrice de la forme $A_i(\lambda) = {}^t(L_1, ..., L_{i-1}, \lambda L_i, L_{i+1}, ..., L_n)$ ou de la forme $A_{ij}(\lambda) = {}^t(L_1, ..., L_{i-1}, L_i + \lambda L_j, L_{i+1}, ..., L_n)$
4. Remarque : On peut définir de même les matrices déduites de A par opérations élémentaires sur les colonnes $A'_i(\lambda)$ et $A'_{ij}(\lambda)$
5. Proposition : $A_i(\lambda) = D_i(\lambda)A, A_{ij}(\lambda) = T_{ij}(\lambda)A, A'_j(\lambda) = AD_j(\lambda), A'_{ji}(\lambda = AT_{ji}(\lambda)$
6. Corollaire : Pour permuter deux lignes i et j de la matrice A, on effectue le produit $D_j(-1)T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)A$ et pour permuter deux colonnes, on effectue le produit $AT_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)D_i(-1)$
7. Remarque : Les matrices élémentaires associées à ces opérations sont $P_{ij} = I_n - (E_{ii} + E_{jj}) + (E_{ij} + E_{ji})$
8. Théorème : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors il existe des matrices de transvections telles que $A = P_1 ... P_r D_n(det(A)) Q_1 ... Q_s$
9. Application : $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs et sont les connexes de $GL_n(\mathbb{R})$

2.2 Résolution du système

(Chapitre 5.5 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi et Exercice 5.1 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

On considère $(A, b) \in GL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$.

1. Proposition : Méthode des pivots de Gauss : On peut transformer $Ax = b$ en $Rx = c$ avec R triangulaire supérieure par opérations élémentaires sur les lignes, en particulier $det(A) = \pm det(R)$, la méthode consiste en les étapes suivantes :
   - On se ramène à $a_{11} \neq 0$ par $L_1 \longleftrightarrow L_i$ avec $a_{i1} \neq 0$
   - On élimine x_1 dans les équations $2, ..., n$ par $L_i^{(i)} \longleftarrow L_i^{(i)} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1^{(1)}$
   - On se ramène $a_{22} \neq 0$ par $L_2^{(2)} \longleftrightarrow L_i^{(2)}$ avec $a_{i2}^{(2)} \neq 0$
   - ...
   - On élimine x_k dans les équations $k+1, ..., n$ par $L_i^{(k)} \longleftarrow L_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)}$

   On a $det(A) = (-1)^p det(A^{(p)})$ avec p nombre de permutations effectuées

2. Exemple : La solution de $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-y+2z &=& a \\ -x+2y-3z &=& b \\ x+2y+z &=& x \end{array}\right.$ est $x=\frac{8a+5b-c}{18}, y=\frac{-2a+b+7c}{18}, z=\frac{-4a-7b+5c}{18}$
3. Remarque : Pour éviter de faire une division par un nombre trop petit, on permute les lignes pour avoir le plus grand pivot possible
4. Remarque : Le nombre d'opérations est en $O(n^3)$

2.3 Application aux familles libres et génératrices

(Chapitre 2.3 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Proposition : Soit $(v_1, ..., v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, alors la méthode du pivot de Gauss permet de savoir si la famille $(v_1, ..., v_n)$ est libre
2. Exemple : Si $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors la famille (v_1, v_2, v_3) est libre
3. Proposition : Soit $(v_1, ..., v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, alors la méthode du pivot de Gauss permet de savoir s'il existe des relations linéaires liant la famille $(v_1, ..., v_n)$
4. Exemple : Si $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ alors $v_1+v_2-v_3 = 0, 3v_1+2v_2-v_4 = 0$
5. Proposition : On peut vérifier si un vecteur appartient à un espace engendré par des vecteurs et le cas échéant son expression en fonction des vecteurs
6. Exemple : Si $v = {}^t(3,9,-4,-2), v_1 = {}^t(1,-2,0,3), v_2 = {}^t(2,-1,2,1)$ alors $v \in Vect(v_1, v_2, v_3)$ et $v = v_1 + 3v_2 - 2v_3$
7. Remarque : On peut également déterminer si une famille est génératrice, une base d'une intersection de sous-espaces et les équations d'un sous-espace

3 Autres méthodes de résolution

3.1 Décompositions LU et de Cholesky

(Chapitres 5.7 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi et A.4 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

On considère $(A, b) \in M_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$.

1. Définition : Les sous-matrices principales de A sont les $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ et les déterminants principaux sont les $\Delta_k = det(A_k)$

2. Lemme : Si $a_{11} \neq 0$ alors il existe des matrices de transvection $P_1, ..., P_r$ telles que $P_r...P_1 A = \begin{pmatrix} a_{11} & * \\ (0) & A' \end{pmatrix}$
3. Théorème : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors A peut être de réduite à la forme triangulaire supérieur en la multipliant par des matrices de transvection ou de dilatation de la forme $D_i(-1)$
4. Théorème : Décomposition LU : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors il existe L triangulaire inférieure de diagonale unité et R triangulaire supérieure telles que $A = LU$ si et seulement si tous les déterminants principaux de A sont non nuls
5. Remarque : Dans ce cas, une telle décomposition est unique et les coefficients diagonaux de R sont donnés par $r_{11} = a_{11}$ et $r_{kk} = \frac{det(A_k)}{det(A_{k-1})}$
6. Application : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors résoudre $Ax = b$ équivaut à résoudre $Ly = b, Rx = y$ avec $A = LU$ la décomposition précédente
7. Corollaire : Décomposition de Cholesky : Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors $A \in S_n(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe B triangulaire inférieure et inversible telle que $A = B^t B$
8. Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_2^{++}(\mathbb{R})$ alors $A = B\ {}^t B$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
9. Remarque : De plus une telle décomposition est unique si on impose la positivité des coefficients diagonaux de B, et $b_{ij} = \frac{1}{b_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} b_{jk} \right)$ et $b_{ii}^2 = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2$
10. Remarque : Le nombre d'opérations est en $O(n^3)$
11. Application : La résolution de $Ax = b$ se ramène à la résolution de deux systèmes triangulaires, et $det(A) = \prod_{i=1}^{n} b_{ii}^2$

3.2 Minimisation de fontionnelle quadratique

(Chapitre 5.15 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi et Exercice 1.21 de Oraux X-ENS Analyse 4)

On considère $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

1. Théorème : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $x_0 \in U$ tel que φ admette un extremum local en x_0, alors $d\varphi(x_0) = 0$
2. Définition : La fonctionnelle quadratique associée à A et b est $\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$
3. Lemme : La fonctionnelle quadratique précédente φ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $\nabla\varphi(x) = Ax - b$
4. Théorème : La solution de $Ax = b$ réalise le minimum global de la fonctionnelle φ
5. Lemme : Soit $0 < \lambda_1 \leq ...\lambda_n$ les valeurs propres de A, alors $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x\rangle \geq \lambda_1 \|x\|_2^2$
6. Théorème : Méthode de gradient à pas optimal : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \rho_n \nabla f(x_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, \rho_n = \underset{\rho\in\mathbb{R}_+^*}{argmin}(f(x_n - \rho\nabla f(x_n)))$, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_*$ avec $x_* \in \mathbb{R}^p$ unique minimum global de f

3.3 Méthode des moindres carrés

(Exercice 7.23 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)
On considère E et F deux espaces euclidiens et $f \in L(E,F)$.

1. Proposition : Il existe un unique $f^* \in L(F,E)$ tel que $\forall (x,y) \in E \times F, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$
2. Lemme : Si $q = dim(E) \leq dim(F) = n$ et f injective alors $det(f^* \circ f) \neq 0$
3. Proposition : Soit $p : F \longrightarrow F$ projection orthogonale sur $Im(f)$, alors $p = f \circ (f^* \circ f)^{-1}$
4. Définition : $f^- := (f^* \circ f)^{-1} \circ f^*$ est appelé l'inverse généralisé de f
5. Exemple : $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^- = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 18 & 15 & -1 \\ 2 & -10 & 14 \end{pmatrix}$
6. Remarque : $f^- \circ f = id_E, f \circ f^- = p$ et si f bijective alors $f^- = f^{-1}$
7. Définition : Soit $b \in F$, si f injective alors on appelle solution des moindres carrés de $f(x) = b$ le vecteur $x_0 \in E$ tel que $\|f(x_0) - b\| = \underset{x \in E}{inf} \|f(x) - b\|$
8. Théorème : La solution des moindres carrés de $f(x) = b$ est donnée par $x_0 = f^-(b)$
9. Exemple : La solution des moindres carrés de $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ est $x_0 = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 48 - a \\ -22 + 14a \end{pmatrix}$
10. Remarque : On retrouve la solution de $Ax = b$ si le système est compatible
11. Exemple : Dans l'exemple précédent si $a = -2$

3.4 Méthodes itératives

(Chapitres 5.11 et 1.1 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = M - N$ avec $(M,N) \in GL_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$.

1. Définition : La méthode itérative de la résolution de $Ax = b$ définit une suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ par $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n x^{(k+1)} = M^{-1} N x^{(k)} - M^{-1} b$
2. Remarque : Si cette suite converge alors la limite est la solution de $Ax = b$
3. Définition : On dit que la méthode itérative est convergente si pour tout $x^{(0)}$ la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ définie précédemment est convergente
4. Théorème : La méthode itérative converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$
5. Corollaire : S'il existe une norme matricielle $\|\cdot\|$ tel que $\|M^{-1}N\| < 1$ alors la méthode itérative est convergente
6. Exemple : La méthode de Jacobi est pour $M = D = diag(a_{11}, ..., a_{nn})$ et si A est à diagonale strictement dominante (ie $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$) alors la méthode de Jacobi converge