# Leçon 170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie, orthogonalité, isotropie, applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

**Références.**

1. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi
2. Algèbre linéaire de Joseph Grifone
3. Cours d'algèbre de Daniel Perrin
4. Histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 1 de Caldero et Germoni
5. Théorie des nombres de Daniel Duverney
6. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière

**Développements.**

1. Formes de Hankel
2. Loi de réciprocité quadratique
3. Lemme de Morse

## Table des matières

# 1 Formes quadratiques et algèbre bilinéaire

## 1.1 Lien entre formes bilinéaires et formes quadratiques

(Chapitre 15.1 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Définition : On dit que $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ est une forme bilinéaire si $\varphi(x,\cdot)$ et $\varphi(\cdot,y)$ sont linéaires, symétrique si $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$, anti-symétrique si $\varphi(x,y)=-\varphi(y,x)$
2. Exemple : Si $l_1, l_2 : E \longrightarrow K$ formes linéaires alors $(x,y) \in E^2 \longmapsto \varphi_1(x)\varphi_2(y) \in K$ est une forme bilinéaire sur $E$
3. Définition : On note $L_2(E), S_2(E), A_2$ les espaces vectoriels respectifs
4. Définition : On dit que $q : E \longrightarrow K$ est une forme quadratique s'il existe $\varphi \in L_2(E)$ tel que $\forall x \in E, q(x)=\varphi(x,x)$, et on note $Q(E)$ leur espace vectoriel
5. Remarque : Il n'y a pas unicité de la forme bilinéaire associée
6. Exemple : Les formes bilinéaires $\varphi_1(x,y)=x_1y_1+x_2y_2$ et $\varphi_2(x,y)=x_1y_1+x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2$ définissent la même forme quadratique
7. Théorème : Soit $q \in Q(E)$, alors il existe une unique $\varphi \in S_2(E)$, appelé forme polaire, tel que $\forall x \in E, q(x)=\varphi(x,x)$
8. Corollaire : $Q(E) \simeq S_2(E)$
9. Proposition : Soit $q \in Q(E)$ et $\varphi$ sa forme polaire, alors on a $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y)) = \frac{1}{4}(q(x+y)-q(x-y))$ et $\forall (\lambda,x) \in K \times E, q(\lambda x)=\lambda^2 q(x)$
10. Corollaire : Soit $(\varphi_1,\varphi_2) \in S_2(E)$, alors $\varphi_1=\varphi_2$ si et seulement si $\varphi_1(x,x)=\varphi_2(x,x)$

## 1.2 Matrice associée à une forme quadratique

(Chapitre 15.1 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : Soit $b=(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ base de $E$ et $\varphi \in L_2(E)$, alors la matrice de $\varphi$ dans la base $b$ est $Mat_b(\varphi)=(\varphi(e_i,e_j))_{1\leq i,j\leq n}$
2. Théorème : Soit $\varphi \in L_2(E)$ et $b$ base de $E$, alors $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(x,y) = {}^tXAY$
3. Corollaire : Dans ce cas, $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(x,y) = \sum\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_iy_j$
4. Théorème : Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow K$, alors $\varphi \in L_2(E)$ si et seulement s'il existe $A \in M_n(K)$ et $l_1,...,l_n \in E^*$ linéairement indépendantes telles que $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(x,y) = \sum\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}l_i(x)l_j(y)$
5. Théorème : Si $\varphi \in L_2(E)$ alors $\varphi$ est symétrique (respectivement anti-symétrique) si et seulement si pour tout base $b$ de $E$, $Mat_b(\varphi)$ est symétrique (respectivement anti-symétrique)
6. Corollaire : $Q(E) \simeq S_2(E) \simeq S_n(K)$ et $A_2(E) \simeq A_n(K)$, donc $dim(Q(E)) = dim(S_2(E)) = dim(S_n(K)) = \frac{n(n+1)}{2}$
7. Proposition : Soit $b_1$ et $b_2$ deux bases de $E$, $P$ la matrice de passage, $\varphi \in L_2(E)$ et $A_1, A_2$ les matrices de $\varphi$ dans les bases $b_1, b_2$, alors $A_2 = {}^tPA_1P$

8. Définition : Soit $\varphi \in L_2(E)$ et $b$ base de $E$, alors le discriminant de $\varphi$ dans la base $b$ est $\Delta_b(\varphi) = det(Mat_b(\varphi))$
9. Proposition : Soit $\varphi \in L_2(E)$ et $b_1, b_2$ des bases de $E$, alors $\Delta_{b_2}(\varphi) = (det(P))^2 \Delta_{b_1}(\varphi)$
10. Définition : Soit $q \in Q(E)$ de forme polaire $\varphi$ et $b$ base de $E$, alors $Mat_b(q) = Mat_b(\varphi)$ et $\Delta_b(q) = \Delta_b(\varphi)$
11. Proposition : Soit $q \in Q(E)$ de forme polaire $\varphi$, $b$ base de $E$ et $A = Mat_b(q)$, alors $\forall x \in E, q(x) = {}^tXMat_b(q)X = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}x_ix_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j$ et $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \langle AX, Y \rangle$

# 2 Outils pour étudier les formes quadratiques

## 2.1 Orthogonalité et isotropie

(Chapitres 15.2 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et 9.4 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

On considère $q \in Q(E)$ de forme polaire $\varphi$.

1. Définition : On dit que $(x, y) \in E^2$ sont orthogonaux relativement à $\varphi$ si $\varphi(x, y) = 0$
2. Définition : $X^\perp = \{y \in E, \forall x \in E, \varphi(x, y) = 0\}$
3. Exemple : $\{0\}^\perp = E$
4. Théorème : Soit $X \subset Y \subset E$, alors $X^\perp$ sous-espace de $E$, $X \subset (X^\perp)^\perp$ et $Y^\perp \subset X^\perp$
5. Remarque : En général $E^\perp \neq \{0\}$
6. Exemple : Pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$, $(\mathbb{R}^2)^\perp = \{0\}$ mais pour la forme bilinéaire $\varphi(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ alors $(\mathbb{R}^2)^\perp = \{(x_1, -x_1), x_1 \in \mathbb{R}\}$
7. Définition : On dit que $x \in E$ est isotrope relativement à $\varphi$ s'il est orthogonal à lui même, ie $q(x) = \varphi(x, x) = 0$
8. Définition : Le cône isotrope de $\varphi$ est $C_\varphi = \{x \in E, q(x) = 0\}$
9. Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, si $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ alors $C_\varphi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_3 = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ dont le dessin est en annexe

## 2.2 Noyau et rang

(Chapitres 15.2 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et 9.4 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Définition : $ker(\varphi) = E^\perp$
2. Lemme : $ker(\varphi) \subset C_\varphi$
3. Théorème : Soit $b$ base de $E$, $A = Mat_b(\varphi)$ et $u \in End(A)$ tel que $Mat_b(u) = A$ alors $ker(\varphi) = ker(u)$
4. Définition : On dit que $\varphi \in S_2(E)$ est non dégénérée si $ker(\varphi) = \{0\}$

5. Remarque : $\varphi$ est non dégénérée si et seulement si pour toute base $b$ de $E$, $Mat_b(\varphi) \in GL_n(K)$ ie $\Delta_b(\varphi) \neq 0$
6. Définition : On dit que $q \in Q(E)$ est définie si $\forall x \in E \backslash \{0\}, q(x) \neq 0$
7. Remarque : $q$ est définie si $C_\varphi = \{0\}$
8. Proposition : Si $q$ définie alors $q$ non dégénérée car $ker(\varphi) \subset C_\varphi$
9. Définition : Le rang de $q$ est $rg(q) = n - dim(ker(q))$
10. Remarque : Soit $b$ base de $E$ et $A = Mat_b(q)$, alors $rg(q) = rg(A)$
11. Proposition : $q$ est non dégénérée si et seulement si $rg(q) = n$
12. Théorème : Soit $F$ sous-espace vectoriel de $E$, alors $dim(F) + dim(F^\perp) \geq dim(E)$ avec égalité si et seulement si $q$ est non dégénérée
13. Corollaire : Dans ce cas $E = F \oplus F^\perp$ si et seulement si $q_{|F}$ est non dégénérée
14. Théorème : Soit $q$ non dégénérée, si $C_\varphi \neq \{0\}$ alors il existe une base de $E$ formée de vecteurs isotropes

# 3 Réduction et classification des formes quadratiques

## 3.1 Réduction et méthode de Gauss

(Chapitres 7.3 et 9.5 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Définition : Une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $E$ est dite orthogonale (respectivement orthonormé) pour $\varphi$ si $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}\varphi(e_i, e_i)$ (respectivement $\delta_{ij}$
2. Proposition : Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ base de $E$, alors $e$ est une base orthogonale pour $\varphi$ si et seulement si $Mat_e(q) = diag(q(e_1), ..., q(e_n))$
3. Remarque : Dans ce cas le rang de $q$ est le nombre de $q(e_i)$ non nuls
4. Proposition : S'il existe une base orthonormée alors $q$ est de rang $n$
5. Théorème : Il existe une base orthogonale de $E$ pour $q$, autrement dit il existe une base $e$ de $E$ telle que $q(x) = a_1 x_1^2 + ... + a_r x_r^2$ avec $a_i = q(e_i)$ et $r = rg(q)$, autrement dit $Mat_e(q) = diag(a_{11}, ..., a_{rr}, 0, ..., 0)$
6. Corollaire : Théorème spectral : Soit $A \in S_n(K)$, alors il existe $P \in GL_n(K)$ tel que ${}^tPAP$ soit diagonale
7. Proposition : Méthode de réduction de Gauss avec un terme carré : Soit $e$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, si $q(x) = a_{11}x_1^2 + ... + a_{nn}x_n^2 + ... + a_{ij}x_ix_j + ...$ avec $a_{i_0i_0} \neq 0$, alors :
   - On ordonne suivant la variable $x_{i_0}$
   - On écrit les termes contenant $x_{i_0}$ comme le début d'un carré
   - On obtient le carré d'une forme linéaire plus des termes sans $x_1$
   - On recommence l'opération sur les termes qui ne contiennent pas de $x_1$ jusqu'à obtenir une somme de carrés de formes linéaires
8. Exemple : Si $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ alors $a_{11} = 1 \neq 0$, donc on écrit $q(x) = (x_1 + x_2)^2 - x_2^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3$, puis $q(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$

9. Proposition : Méthode de réduction de Gauss avec que des termes rectangles : Soit $e$ base de $E$, si $q(x) = a_{12}x_1x_2 + ... + a_{ik}x_ix_k + ... + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$ alors :
   - On choisit un terme rectangle à coefficient non nul $kx_ix_j$ avec $k \neq 0$
   - On calcule les dérivées partielles $\frac{\partial q}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial q}{\partial x_j}$ pour écrire $q(x) = \frac{1}{k}\frac{\partial q}{\partial x_i}\frac{\partial q}{\partial x_j} + ...$
   - On obtient $q(x) = \frac{1}{k}\varphi_1(x)\varphi_2(x) + ...$ avec ... sans termes en $x_i$ ou en $x_j$, et avec $\varphi_1, \varphi_2$ des formes linéaires
   - On écrit $\varphi_1\varphi_2 = \frac{1}{4}((\varphi_1^2 + \varphi_2)^2 - (\varphi_1 - \varphi_2)^2)$
   - Si dans les termes correctifs on a un terme carré alors on procède comme dans la proposition précédente
   - S'il n'y a que des termes rectangle alors on recommence
10. Exemple : Si $q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3$, on a $\frac{\partial q}{\partial x_1} = 5x_2 + 6x_3$, $\frac{\partial q}{\partial x_2} = 5x_1 + 3x_3$, donc $q(x) = \frac{1}{5}(5x_2 + 6x_3)(5x_1 + 3x_3) - \frac{18}{5}x_3^2$, puis $q(x) = \frac{1}{20}(5x_1 + 5x_2 + 9x_3)^2 - \frac{1}{20}(5x_1 + 5x_2 - 3x_3)^2 - \frac{18}{5}x_3^2$
11. Théorème : A partir de la réduction de Gauss, on peut déterminer une base orthogonale pour $q$ en résolvant $\left\{\begin{array}{ccc} x'_1 & = & \varphi_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_n & = & \varphi_n(x) \end{array}\right.$ avec $\varphi_i$ obtenus grâce à la réduction de Gauss, on obtient $x = Px'$ avec $P \in GL_n(K)$ dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs de la base orthogonale pour $q$
12. Exemple : Si $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$ alors la réduction de Gauss donne $q(x) = (x_1+x_2)^2 + 2(x_2+2x_3)^2 - x_3^2$, ainsi le système à résoudre est $\left\{\begin{array}{ccc} x'_1 & = & x_1 + x_2 \\ x'_2 & = & x_2 + 2x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{array}\right.$ ce qui donne $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ comme base de vecteurs orthogonaux

## 3.2 Classification et signature

(Chapitres 15.3 d'Algèbre et géoémtrie de Jean-Etienne Rombaldi, 9.5 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone et Exercice 5.D.26 de Histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 1 de Caldero et Germoni)

1. Théorème : Si $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors il existe une base $e$ de $E$ tel que $q(x) = x_1^2 + ... + x_r^2$ avec $r = rg(q)$, autrement dit $Mat_e(q) = diag(I_r, 0_{n-r})$
2. Corollaire : Dans ce cas il existe une base orthonormée pour $q$ si et seulement si $rg(q) = n$ ie $q$ non dégénérée
3. Théorème : Si $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, alors il existe une base $e$ de $E$ tel que $q(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2$, ie $Mat_e(q) = diag(I_p, I_{r-p}, I_{n-r})$
4. Définition : Dans ce cas le couple $sign(q) = (p, r-p)$ est appelé signature de $q$
5. Corollaire : Dans ce cas $q$ est définie négative si et seulement si $sign(q) = (n, 0)$ si et seulement il existe une base orthonormée pour $q$, définie négative si et seulement si $sign(q) = (0, n)$, et non dégénéré si et seulement si $sign(q) = (p, n-p)$

6. Exemple : Si $q(x)=x_1^2+2x_2^2+15x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3-8x_2x_3$ alors $sign(q)=(2,1)$
7. Application : Formes de Hankel : Si $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré $n$ et de racines complexes distinctes $x_1,...,x_t$ $(t\leq n)$ de multiplicités respectives $m_1,...,m_t$ et $s_k=m_1x_1^k+...m_tx_t^k$, alors $\sigma_{\mathbb{R}}:=\sum\limits_{0\leq i,j\leq n-1} s_{i+j}x_ix_j$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, de plus si on note $(p,q)=sign(\sigma_{\mathbb{R}})$ alors le nombre de racines de $P$ est $t=p+q$ et et le nombre de racines réelles

# 4 Utilisations en arithmétique et en calcul différentiel

## 4.1 Formes quadratiques sur un corps fini et loi de réciprocité quadratique

(Chapitres 15.6 et 13.6 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi, III.2.d du Cours d'algèbre de Daniel Perrin et V.C de Histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 1 de Caldero et Germoni)

On considère $p$ nombre premier impair, $q=p^m$, $K=\mathbb{F}_q$, $q\in Q(E)$ et $\varphi$ sa forme polaire.

1. Lemme : Il y a $\frac{q+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{F}_q$
2. Lemme : Soit $a,b,c\in\mathbb{F}_q^*$, alors $ax^2+by^2=c$ admet une solution dans $\mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q$
3. Théorème : Si $rg(q)=r$, soit $\alpha\in\mathbb{F}_q\backslash\mathbb{F}_q^2$, alors il existe une base $b$ de $E$ telle que $Mat_b(q)=diag(I_{r-1},\delta,0_{n-r})$ avec $\delta\in\{1,\alpha\}$
4. Corollaire : Soit $q,q'\in Q(E)$ non dégénérées, alors $q$ et $q'$ sont dégénérées si et seulement si, pour toute base $b$ de $E$, $\frac{\Delta_b(q')}{\Delta_b(q)}$ est un carré dans $\mathbb{F}_q^*$
5. Définition : Soit $a\in\mathbb{F}_p$, alors le symbole de Legendre de $a$ est $\left(\frac{a}{p}\right)$ défini par 1 si $a$ est un carré dans $\mathbb{F}_p^*$ et $-1$ sinon
6. Exemple : Pour $p$ impair, $\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{4}}$
7. Proposition : Soit $a\in\mathbb{F}_p^*$, alors $\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{\frac{p-1}{2}}[p]$ et $a\longmapsto\left(\frac{a}{p}\right)$ est un morphisme de groupes de $\mathbb{F}_p^*$ dans $\{-1,1\}$
8. Lemme : Soit $a\in\mathbb{Z}^*$ non divisible par $q$ premier impair, alors $|\{x\in\mathbb{F}_q,ax^2=1\}|=1+\left(\frac{a}{q}\right)$
9. Théorème : Soit $(p,q)\in(\mathcal{P}\backslash\{2\})^2$ distincts, alors $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$
10. Exemple : $\left(\frac{219}{383}\right)=1$ donc 219 est un résidu quadratique modulo 383

## 4.2 Représentation d'entiers par des formes quadratiques entières

(Chapitre 6.5 de Théorie des nombres de Daniel Duverney)

1. Définition : Un forme quadratique binaire à coefficients entiers est $\varphi(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ avec $a,b,c\in\mathbb{Z}^3$, de plus $\Delta:=b^2-4ac$ est le discriminant de $\varphi$

2. Remarque : $\Delta \equiv b^2[4]$ donc $\Delta$ est un multiple de 4 si $b$ pair et $\Delta \equiv 1$ si $b$ impair
3. Proposition : $\varphi$ est définie positive si $\Delta < 0$ et $a > 0$, dans ce cas $c > 0$ et $\varphi(x, y) > 0$ si $(x, y) \neq (0, 0)$
4. Exemple : $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ est définie positive
5. Définition : Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors on dit que $n$ est représenté par $\varphi$ s'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $n = \varphi(x) = ax^2 + bxy + cy^2$
6. Exemple : Soit $p$ premier, alors $p$ représenté par $\varphi = (1, 0, 1)$ si et seulement si $p \equiv 1[4]$
7. Définition : Deux formes quadratiques $\varphi_1, \varphi_2$ sont dites équivalentes s'il existe $f(x, y) = (px + qy, rx + sy) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ps - qr = 1$ et $\varphi_1 = \varphi_2 \circ f$
8. Exemple : $f(x, y) = (y, -x), f(x, y) = (x + y, y), f(x, y) = x - y, y)$ sont de telles applications appelées transformations unimodulaires
9. Exemple : $(a, b, c) \sim (c, -b, a), (a, b, c) \sim (a, b+2a, a+b+c), (a, b, c) \sim (a, b-2a, a-b+c)$
10. Proposition : Deux formes équivalentes représentenant les même entiers
11. Théorème : Si $\varphi$ définie positive alors $\varphi \sim (a, b, c)$ avec $-a < b \leq a < c$ ou $0 \leq b \leq a = c$, on dit que $(a, b, c)$ est une forme réduite
12. Exemple : $(10, 34, 29) \sim (1, 0, 1)$
13. Corollaire : Il existe un nombre fini de classes d'équivalence de formes quadratiques de discriminant $\Delta < 0$ donné
14. Exemple : Si $\Delta = -4$ alors il existe une unique forme quadratique réduite de discriminant $-4$, il s'agit de $\varphi = (1, 0, 1)$

## 4.3 Applications deux fois différentiables et matrice hessienne

(Chapitre 6 du Petit guide de calcul de différentiel de François Rouvière)
On considère $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Proposition : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable, alors sa différentielle ou plutôt son gradient définit une application $\nabla f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$
2. Définition : On dit que $f$ est deux fois différentiables si $\nabla f$ est différentiable, dans ce cas on note $d^2 f = d(df)$ et $H_f = J_{\nabla f}$, ie $H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$
3. Remarque : Dans ce cas, pour $a \in U$, $h \longmapsto \langle \nabla f(a), h \rangle$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et $(h, k) \longmapsto^t hH_f(a)k$ une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$
4. Théorème de Schwartz : Dans ce cas, $H_f(a)$ est une matrice symétrique
5. Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral : Dans ce cas, si $[a, a + h] \subset U$ alors $f(a+h) = f(a)+df(a)(h)+\int_0^1 (1-t)d^2 f(a+th)(h, h)dt = f(a)+\langle \nabla f(a), h\rangle + \int_0^1 (1-t)^t hH_f(a + th)hdt$
6. Lemme : Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tMA_0M \end{array}$, alors $d\varphi(I_n)$ : $M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ est surjective et il existe un voisinage $V$ de $A_0$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\chi : V \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe $C^1$ tels que $\forall A \in V, A = \varphi(\chi(A)) = {}^t\chi(A)A_0\chi(A) = {}^tMA_0M$

7. Théorème de Morse : Si $0 \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ tel que 0 soit un point critique quadratique non dégénéré de $f$ (ie $df(0) = 0$ et la matrice symétrique $H_f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$), alors il existe $V, W$ voisinages de 0 et un $C^1$-difféomorphisme $\varphi : V \longrightarrow W$ tel que $\varphi(0) = 0$ *et* $\forall x \in V, \quad f(x) - f(0) = \varphi(x)_1^2 + ... + \varphi(x)_p^2 - \varphi(x)_{p+1}^2 - ... - \varphi(x)_n^2$