Leçon 181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité, applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Géométrie de Patrice Tauvel
2. Géométrie de Michel Audin
3. Algèbre de Xavier Gourdon
4. Algèbre linéaire de Joseph Grifone
5. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi
6. Algèbre d'Aviva Szpirglas
7. Elémens d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi

Développements.

1. Déterminant circulant et suite de polygones
2. Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

Table des matières

1 Barycentres dans un espace affine

1.1 Définitions

(Chapitres 2.2 de Géométrie de Patrice Tauvel et I.5 de Géométrie de Michèle Audin)

On considère $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de direction E et $\mathbb{R}_\sigma^{(I)} = \left\{(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^{(I)}, \sum\limits_{i\in I}\lambda_i = \sigma\right\}$ avec $\sigma \in \mathbb{R}^*$.

1. Proposition : Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_\sigma^{(I)}$, $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{E}^I$, alors il existe un unique $G \in \mathcal{E}$ tel que $\sum\limits_{i\in I}\lambda i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$, de plus pour tout $P \in \mathcal{E}$, $\sigma\overrightarrow{PG} = \sum\limits_{i\in I}\lambda_i\overrightarrow{PA_i}$
2. Définition : Dans ce cas, on dit que G est la barycentre de la famille $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$, en particulier si $I = [\![1, n]\!]$ et $\lambda_i = \frac{1}{n}$, alors G est appelé isobarycentre de la famille $(A_i)_{1\leq i\leq n}$
3. Exemple : Si $n = 2$ alors l'isobarycentre de (A_1, A_2) est le milieu du segment $[A_1, A_2]$
4. Théorème : Associativité du barycentre : Soit G le barycentre de $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$, $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I, $\sigma_j = \sum\limits_{i\in I_j}\lambda_i$ et G_j le barycentre de $(A_i, \lambda_i)_{i\in I_j}$, alors G est le barycentre des $(G_j, \sigma_j)_{j\in J}$
5. Corollaire : Si I fini, soit $(I_1, ..., I_n)$ une partition de I, $\alpha_k, \lambda_i \in \mathbb{R}$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k = 1$ et $\sum\limits_{i\in I_k}\lambda_i$, G_k le barycentre de $(A_i, \lambda_i)_{i\in I_k}$ et G celui de $(G_k, \alpha_k)_{1\leq k\leq n}$, alors G est le barycentre de $(A_i, \beta_i)_{i\in I}$ avec $\beta_i = \alpha_k\lambda_i$ pour $i \in I_k$
6. Proposition : Soit G barycentre de $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ et $\theta_i = \sigma^{-1}\lambda_i$, alors, pour $P \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{PG} = \sum\limits_{i\in I}\theta_i\overrightarrow{PA_i}$
7. Proposition : Soit $P, Q \in \mathcal{E}$ et $(\mu_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_1^{(I)}$, alors on peut chercher $G \in \mathcal{E}$ par $\overrightarrow{PG} = \sum\limits_{i\in I}\mu_i\overrightarrow{PA_i}$ ou par $\overrightarrow{QG} = \sum\limits_{i\in I}\mu_i\overrightarrow{QA_i}$, on obtient le même point G barycentre des $(A_i, \mu_i)_{i\in I}$ que l'on note $\sum\limits_{i\in I}\mu_i A_i$
8. Proposition : Soit G le barycentre de $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$ dans $\mathcal{E}$ tel que $\beta + \gamma \neq 0$, alors le point d'intersection A' de AG et BC est le barycentre de $((B, \beta), (C, \gamma))$
9. Application : Les trois médianes d'un triangle se coupent sont concourantes au centre de gravité du triangle

1.2 Sous-espaces affines, applications affines et polygones

(Exercice 3.5.12 d'Algèbre de Xavier Gourdon, Chapitres 2.3 et 2.5 de Géométrie de Patrice Tauvel, A.7 d'Algèbre linéaire de Joseph Grfione, I.3 de Géométrie de Michèle Audin et Développement 62 de L'oral à l'agrégation de mathématique de Isenmann et Pecatte)

1. Théorème : Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, alors $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si tout barycentre de points de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$

2. Corollaire : Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, alors $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si pour tout $P, Q \in \mathcal{F}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda + \mu = 1$, le barycentre $\lambda P + \mu Q \in \mathcal{F}$
3. Exemple : Soit $A, B \in \mathcal{E}$, alors le milieu de $[A, B]$ appartient à la droite affine entre A et B
4. Théorème : Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ avec $\mathcal{E}'$ un espace affine, alors φ est affine si et seulement si pour tout $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$, $f\left(\sum\limits_{i \in I} \lambda_i A_i\right) = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i f(A_i)$
5. Lemme : Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$, alors $det(A) = det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix} = \prod\limits_{i=0}^{n-1} Q(\omega^i)$

   avec $Q = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_{i+1} X^i$ et $\omega = exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$
6. Théorème : On considère la suite $(P^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^n)^{\mathbb{N}}$ définie par $P^{(0)} = {}^t(z_1^{(0)}, ..., z_n^{(0)}) \in \mathbb{C}^n$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P^{(k+1)} = {}^t\left(\frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2}, ..., \frac{z_{n-1}^{(k)} + z_n^{(k)}}{2}, \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2}\right)$, alors $P^{(k)} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} {}^t(g, ..., g)$ avec $g = Isobar(z_1^{(0)}, ..., z_n^{(0)}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{z_0^{(0)}}{n}$

1.3 Coordonnées barycentriques

(Chapitres 2.8 de Géométrie de Patrice Tauvel et V.2 de Géométrie de Michèle Audin)

1. Théorème : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une base affine de $\mathcal{E}$ et $M \in \mathcal{E}$, alors il existe $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^{(I)}$ tel que $M = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i A_i$
2. Corollaire : Dans ce cas $(\lambda_i)_{i \in I}$ est unique si $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i = 1$, on appelle alore $(\lambda_i)_{i \in I}$ le système de coordonnées barycentriques de M dans la base affine $(A_i)_{i \in I}$
3. Proposition : Soit ABC un triangle de $\mathcal{E}$ et $M \in ABC$, alors les coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (A, B, C) du triangle sont $(\mathcal{A}(MBC), \mathcal{A}(MCA), \mathcal{A}(MAB))$, autrement dit $\mathcal{A}(MBC)\overrightarrow{MA} + \mathcal{A}(MCA)\overrightarrow{MB} + \mathcal{A}(MAB)\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$
4. Corollaire : Soit G le centre de gravité du triangle ABC, alors $\mathcal{A}(GBC) = \mathcal{A}(GCA) = \mathcal{A}(GAB)$

2 Convexité dans un espace affine

2.1 Définitions

(Chapitre 4.2 de Géométrie de Patrice Tauvel)
On suppose $\mathcal{E}$ euclidien.

1. Définition : Soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{E}^I$ et $B \in \mathcal{E}$, alors on dit que B est combinaison convexe des A_i s'il existe $(\lambda_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)_1^{(I)}$ tel que $B = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i A_i$

2. Exemple : Soit $A, B \in \mathcal{E}$, alors le segment $[A, B]$ est l'ensemble des combinaisons convexes de A et B
3. Définition : Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$, alors on dit que $\mathcal{A}$ étoilée en un de ses points $M \in \mathcal{A}$ si $\forall N \in \mathcal{A}, [M, N] \subset \mathcal{A}$, de plus on dit que $\mathcal{A}$ est convexe si $\mathcal{A}$ est étoilée en tous ses points
4. Exemple : Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles
5. Proposition : Les sous-espaces affines, les boules et les intersections de convexes de $\mathcal{E}$ sont convexes
6. Proposition : Les convexes sont connexes par arcs, mais la réciproque est fausse en général
7. Exemple : Une réunion de deux droites affines concourantes est connexe par arcs mais pas convexe
8. Théorème : Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$, alors $\mathcal{A}$ est convexe si et seulement si toute combinaison de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$
9. Proposition : L'image et l'image réciproque d'un convexe par une application affine est convexe
10. Corollaire : L'adhérence d'un convexe est convexe

2.2 Enveloppe convexe

(Chapitre 4.3 de Géométrie de Patrice Tauvel)
On considère $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$.

1. Définition : L'enveloppe convexe $Conv(A)$ de $\mathcal{A}$ est l'intersection de tous les convexes contenant $\mathcal{A}$, autrement dit il s'agit du plus petit convexe de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{A}$
2. Exemple : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, alors toute racine de P' est dans l'enveloppe convexe des racines de P
3. Proposition : $Conv(\mathcal{A})$ est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{A}$ et $\overline{Conv(A)}$ est l'intersection des convexes fermés de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{A}$
4. Proposition : Si $\mathcal{A}$ est convexe compact alors $\mathcal{A} = Conv(\partial\mathcal{A})$, et si $\mathcal{A}$ est ouvert alors $Conv(\mathcal{A})$ également
5. Théorème de Carathéodory : Tout élément de $Conv(\mathcal{A})$ s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $1 + dim(\mathcal{E})$ points
6. Corollaire : Si $\mathcal{A}$ est compacte alors $Conv(\mathcal{A})$ également, et si $\mathcal{A}$ est bornée alors $Conv(\mathcal{A})$ également et il y a égalité des diamètres $\delta(\mathcal{A}) = \delta(Conv(\mathcal{A}))$

2.3 Points extremaux d'un convexe

(Chapitre 4.8 de Géométrie de Patrice Tauvel)
On considère $\mathcal{A}$ un convexe de $\mathcal{E}$.

1. Définition : Soit $M \in \mathcal{A}$, alors on dit que M est un point extrémal de $\mathcal{A}$ si $\forall t \in [0, 1], \forall P, Q \in \mathcal{A}, M = (1-t)P + tQ \implies M \in \{P, Q\}$, et on note $Extr(\mathcal{A})$ leur ensemble

2. Exemple : Soit $O \in \mathcal{E}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, alors $Extr(B(0,r)) = S(0,r)$
3. Proposition : Soit $M \in \mathcal{A}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
   — $M \in Extr(\mathcal{A})$
   — $\mathcal{A} \backslash \{M\}$ est convexe
   — Si M est combinaison convexe d'éléments de $\mathcal{A}$, alors M est égal à l'un de ces éléments
4. Théorème de Krein-Milman : Si A compact alors $\mathcal{A} = Conv(Extr(\mathcal{A}))$

3 Utilisations des barycentres et de la convexité

3.1 Etudes d'isométries préservant une partie convexe

(Chapitre 3.4.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et Exercice 3.6.6 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : On note Γ_n l'ensemble des sommets du polygone régulier à n côtés de $\mathbb{R}^2$ et $Isom(\Gamma_n)$ le groupe des isométries conservant Γ_n
2. Exemple : La rotation r d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et la réflexion s d'axe une des "diagonales" sont dans $Isom(\Gamma^n)$
3. Théorème : $Isom(\Gamma_n) = \langle r, s \rangle$
4. Exemple : $D_6 \simeq S_3 \simeq Isom(\Gamma_3)$
5. Définition : On considère T est le tétraèdre régulier et C le cube de $\mathbb{R}^3$, et $Isom(T)$ et $Isom(C)$ les groupes d'isométries les conservant
6. Théorème : $Isom(T) \simeq S_4$
7. Corollaire : $Isom^+(T) \simeq A_4$
8. Théorème : $Isom(C) = Isom(S)$ avec S l'ensemble des sommets du cube, de même $Isom^+(C) = Isom^+(S)$
9. Remarque : En vectorialisant $\mathbb{R}^3$ en fixant l'origine en l'isobarycentre du cube, on se ramène au cas vectoriel
10. Remarque : Une application affine qui conserve le cube est une isométrie
11. Théorème : $Isom^+(S) \simeq S_4$
12. Corollaire : $Isom(S) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
13. Application : On obtient la table de caractères de S_4 en annexe

3.2 Séparation avec un convexe

(Chapitre 4.6 de Géométrie de Patrice Tauvel et 7.IV.2 d'Algèbre d'Aviva Szpirglas)

1. Théorème de Hahn-Banach version géométrique : Soit $\mathcal{A}$ un ouvert convexe non vide et $\mathcal{L}$ un sous-espace de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{A} \cap \mathcal{L} = \varnothing$, alors il existe un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ et $\mathcal{A} \cap \mathcal{L} = \varnothing$
2. Remarque : Le résultat n'est plus si $\mathcal{A}$ n'est pas ouvert

3. Exemple : Dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$, le point $\mathcal{L} = \{(2,0)\}$ et le convexe ouvert $\mathcal{A} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \cup ([0,1] \times \{0\})$ ne vérifient pas le théorème précédent
4. Théorème de Hahn-Banach version linéaire : Soit C convexe fermée non vide de E et K convexe compacte non vide de E disjoints, alors il existe une forme linéaire continue $\varphi \in E^*$ telle $\underset{x\in C}{sup}\varphi(x) \leq \underset{y\in K}{inf}\varphi(y)$
5. Définition : Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ hyperplan de $\mathcal{E}$, alors on dit que $\mathcal{H}$ sépare (respectivement sépare strictment) $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ si $\mathcal{A}$ est contenu dans l'un et $\mathcal{B}$ dans l'autre des demi-espaces fermés déterminés par $\mathcal{H}$ (respectivement ouverts)
6. Théorème : Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des convexes non vides disjoints de $\mathcal{E}$, alors :
   — Si $\mathcal{A}$ est ouvert ou $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ fermés alors il existe un hyperplan séparant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$
   — Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des ouverts ou $\mathcal{A}$ compact et $\mathcal{B}$ fermé alors il existe un hyperplan séparant strictement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$
7. Exemple : Dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $\mathcal{B} = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, xy \geq 1\}$ ne peuvent pas être séparé strictement par un hyperplan
8. Lemme : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'espace dual de $M_n(\mathbb{R})$ est $(M_n(\mathbb{R}))' = \{tr(A \times id_{M_n(\mathbb{R})}), A \in M_n(\mathbb{R})\}$
9. Lemme : Soit C un convexe fermé non vide de $M_n(\mathbb{R})$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall \varphi \in (M_n(\mathbb{R}))', \varphi(M) \leq \underset{N\in C}{sup}(\varphi(N))$, alors $M \in C$
10. Théorème : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermé pour la norme $\|\cdot\|_2$, ie $Conv(O_n(\mathbb{R})) = \overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0,1)$

3.3 Fonctions convexes

(Chapitre 8.1 de Elémens d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ convexe et $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Définition : On dit que f est convexe (respectivement strictement convexe) si $\forall A, B \in \mathcal{A}, \forall t \in [0,1], f((1-t)A + tB) \leq (1-t)f(A) + tf(B)$ (respectivement $<$)
2. Définition : L'épigraphe de f est $Epi(f) = \{(A,y) \in \mathcal{A} \times \mathbb{R}, y \geq f(A)\}$
3. Théorème : f est convexe si et seulement si $Epi(f)$ est un convexe de $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$
4. Corollaire : Si $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ alors I est un intervalle et f est convexe si et seulement si pour tout $A, B = (a, f(a)), (b, f(b)) \in Epi(f)$ tels que $a < b$, la courbe de f restreinte à $[a,b]$ est au dessous de sugment $[A,B]$
5. Exemple : Une fonction affine à valeurs réelles est convexe (et concave)