Leçon 191 Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre linéaire de Joseph Grifone
2. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi
3. Algèbre de Xavier Gourdon

Développements.

1. Déterminant de Gram et inégalité de Hadamard
2. Déterminant circulant et suite de polygones
3. Réduction dans $O_n(\mathbb{R})$
4. Table des caractères de S4

Table des matières

1 Utilisation du déterminant en géométrie

1.1 Orientation de l'espace

(Chapitres 4.10 et 4.11 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone, Exercice 7.19 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Définition : Soit b, b' deux bases de $\mathbb{R}^n$, alors on dit que b et b' ont même orientation si $det_b(b') > 0$, dans le cas contraire on dit qu'elles ont une orientation opposée
2. Proposition : L'ensemble B des bases de $\mathbb{R}^n$ se partage en deux sous-ensembles disjoints non vides B_1, B_2, appelés classes d'orientation, tels que toutes les bases de B_1 aient la même orientation et pareil pour B_2
3. Définition : On dit que l'on a fixé une orientation de $\mathbb{R}^n$ si l'on choisit une classe d'orientation
4. Exemple : En choisissant la base canonique $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ comme orientation positive, alors la base $(-e_1, e_2, ..., e_n)$ est orienté négativement

1.2 Aires et volumes

(Chapitres 4.10 et 4.11 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone, Exercice 7.19 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Théorème : Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^2)^2$, alors l'aire du parallélogramme engendré par u et v est $A(u, v) = |det(u, v)|$
2. Théorème : Si $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^3)^3$ alors le volume du parallélépipède engendré par u, v, w est $Vol(u, v, w) = |det(u, v, w)|$

1.3 Distances

(Chapitres 4.10 et 4.11 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone, Exercice 7.19 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Définition : On suppose E euclidien, soit $v_1, ..., v_n \in E$, alors la matrice de Gram de la famille $(v_1, ..., v_n)$ est $Gram(\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$ et on note $G(v_1, ..., v_n)$ son déterminant
2. Proposition : Dans ce cas, $G(v_1, ..., v_n) \neq 0$ si et seulement si la famille $(v_1, ..., v_n)$ est libre
3. Théorème : Dans ce cas, avec $F = Vect(v_1, ..., v_n), x \in E$, on a $d(x, F)^2 = \frac{G(x, v_1, ..., v_n)}{G(v_1, ..., v_n)}$
4. Application : Inéglité de Hadamard : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(x_1, ..., x_n) \in E^n$, alors :
   — $G(x_1, ..., x_n) \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$
   — Si $E = \mathbb{C}^n$ alors $|det(x_1, ..., x_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$
   On a égalité si et seulement si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonale ou si l'un des vecteurs est nul.
5. Application : Géométriquement dans $\mathbb{R}^3$ le volume du parallélépipède engendré par $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ est majoré par le volume du pavé droit $\|u\| \|v\| \|w\|$

1.4 Approche d'isobarycentres

(Chapitres 17.4.3 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et Exercice 17.5.7 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi, Exercice 3.5.12 d'Algèbre de Xavier Gourdon)

1. Définition : Soit $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$, alors $det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ est appelé déterminant circulant des a_i
2. Proposition : $det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix} = \prod\limits_{k=0}^{n-1} P(e^{\frac{2ki\pi}{n}})$ avec $P = \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_{j+1}X^j$
3. Application : Soit $(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$, $P^0 = (z_1, ..., z_n)$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P^{k+1} = \left(\frac{P_1^k + P_2^k}{2}, ..., \frac{P_n^k + P_1^k}{2}\right)$, alors $P^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} (g, ..., g)$ avec $g = Isobar(z_1, ..., z_n)$ (à connaître)

2 Classification des isométries du plan et de l'espace

2.1 Réduction dans $O_n(\mathbb{R})$

(Chapitres 22.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Lemme : Soit $u \in O(E)$, alors $Sp(u) \subset \{-1, 1\}$
2. Lemme : Soit $u \in O(E)$, alors il existe des sous-espaces vectoriels $F_1, ..., F_r$ de E deux à deux orthogonaux de dimension 1 ou 2 et stables par u tels que $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} F_i$
3. Proposition : Soit $u \in O(E)$ et F sous-espace vectoriel de E stable par F, alors $F^\perp$ est stable par u
4. Théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux : Soit $u \in O(E)$, alors il existe une base orthonormée e de E telle que $Mat_e(u) = diag(I_p, I_q, R_1, ..., R_r)$ avec $p, q \in [\![1, n]\!], R_i = R(\theta_i), \theta_i \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$

2.2 Eléments de $Isom(\mathbb{R}^2)$

(Chapitres 7.10 et A.8 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)
On considère $\mathcal{E}$ le plan affine euclidien.

1. Théorème : Soit $u \in O(\mathbb{R}^2)$ alors :
   — Soit $u \in SO(\mathbb{R}^2)$ et dans ce cas il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $Mat(u) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$, ie u est la rotation d'angle θ

— Soit $u \notin SO(\mathbb{R}^2)$ et dans ce cas il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $Mat(u) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & -cos(\theta) \end{pmatrix}$, ie u symétrie d'axe la droite d'angle $\frac{\theta}{2}$

2. Corollaire : Soit $f \in Isom(\mathbb{R}^2)$, alors f est l'identitée, une translation, une rotation, une réflexion ou une composée
3. Lemme : Soit $f \in Aff(\mathcal{E})$ et $Fix(f)$ l'ensemble des points fixes de f, alors :
   — Soit 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, dans ce cas f admet un unique point fixe
   — Soit 1 est valeur propre de $\vec{f}$ et $Fix(f) = \varnothing$
   — Soit 1 est valeur propre de $\vec{f}$ et $Fix(f)$ est un sous-espace affine dont la direction est le sous-espace propre $E_1(\vec{f})$
4. Proposition : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ R_{\Omega,\theta}$, alors, en vectorialisant en Ω, $\vec{f} = R_{\Omega,\theta}$, donc 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, d'où f est une rotation
5. Proposition : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ s_{\mathcal{D}}$, alors $\vec{f} = \vec{s}_{\mathcal{D}}$, donc 1 est valeur propre de $\vec{f}$, donc :
   — Si f admet une droite de points fixes alors f est une réflexion par rapport à une droite
   — Si f n'admet pas de points fixes alors f est un glissement, ie la composée d'une translation et d'une réflexion
6. Théorème : $Isom(\mathcal{E})$ est composé de l'identité, des rotations, des réflexions, des glissements et des translations
7. Exemple : En considérant un répère affine, si $f(A) = f(x, y) = (y, x)$ alors f est une réflexion d'axe d'équation $y = x$, si $f(A) = f(x, y) = (x + 1, y + 1)$ alors f est un glissement d'axe d'équation $y = x$ et de vecteur de translation $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.3 Eléments de $Isom(\mathbb{R}^3)$

(Chapitres 7.10 et A.8 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

1. Théorème : Soit $u \in O(\mathbb{R}^3)$ alors il existe une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ et $(\theta, \varepsilon) \in [0, 2\pi[\times \{-1, 1\}$ tel que $Mat(u) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ et :
   — Si $\varepsilon = 1$ alors $u \in SO(\mathbb{R}^3)$ et
      — Si $\theta = 0$ alors $u = id_{\mathbb{R}^3}$
      — Si $\theta = \pi$ alors u est un renversement d'axe $Vect(e_3)$, ie rotation d'angle θ
      — Sinon u est une rotation d'angle θ et d'axe $Vect(e_3)$
   — Si $\varepsilon = -1$ alors $u \notin SO(\mathbb{R}^3)$ et
      — Si $\theta = 0$ alors u est une réflexion de plan $Vect(e_1, e_2)$
      — Si $\theta = \pi$ alors $u = -id_{\mathbb{R}^3}$
      — Sinon u est une anti-rotation d'angle θ et d'axe $Vect(e_3)$
2. Corollaire : Soit $f \in Isom(\mathbb{R}^3)$, alors f est l'identité, une translation, une rotation, une réflexion, une rotation-réflexion (ou anti-rotation) ou une composée
3. Proposition : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ R_{\mathcal{D},\theta}$, alors 1 est valeur propre de $\vec{f}$, donc :

— Si f admet une droite de points fixes alors f est une rotation
— Si f n'admet pas de points fixes alors f est un vissage, ie rotation suivie d'une translation

4. Proposition : Soit $f = t_{\vec{(v)}} \circ s_{\mathcal{P}}$, alors 1 est valeur propre de $\vec{f}$, donc :
   — Si f admet un point fixe (un plan de points fixes plus précisément) alors f est une réflexion
   — Si f n'admet pas de point fixe alors f est glissement
5. Proposition : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ (s_{\mathcal{P}} \circ R_{\mathcal{D}})$, alors 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, donc f admet un unique point fixe, d'où f est une rotation-réflexion (ou anti-rotation)
6. Théorème : $Isom(\mathbb{R}^3)$ est composé de l'identité, des rotations, des réflexions, des glissements, des translations, des rotations-réflexions et des vissages

3 Isométries préservant une partie

3.1 Groupes diédraux et des isométries des polygônes réguliers

(Chapitre 3.4.3 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : On dit que G est un groupe de type D_{2n} s'il est dicyclique engendré par r d'ordre n et s d'ordre 2 tels que $rsrs = 1$
2. Théorème : Soit G un groupe de type D_{2n}, alors $G = \{1, r, ..., r^{n-1}\} \cup \{s, sr, ..., sr^{n-1}\}$
3. Corollaire : Les groupes de type D_{2n} sont isomorphes
4. Définition : On note Γ_n l'ensemble des sommets du polygone régulier à n côtés de $\mathbb{R}^2$ et $Isom(\Gamma_n)$ le groupe des isométries conservant Γ_n
5. Exemple : La rotation r d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et la réflexion s d'axe une des "diagonales" sont dans $Isom(\Gamma^n)$
6. Théorème : $Isom(\Gamma_n) = \langle r, s\rangle$
7. Exemple : $D_6 \simeq S_3 \simeq Isom(\Gamma_3)$

3.2 Isométries du tetraèdre et du cube

(Chapitre 3.4.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi et Exercice 3.6.6 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : On considère T est le tétraèdre régulier et C le cube de $\mathbb{R}^3$, et $Isom(T)$ et $Isom(C)$ les groupes d'isométries les conservant
2. Théorème : $Isom(T) \simeq S_4$
3. Corollaire : $Isom^+(T) \simeq A_4$
4. Théorème : $Isom(C) = Isom(S)$ avec S l'ensemble des sommets du cube, de même $Isom^+(C) = Isom^+(S)$
5. Remarque : En vectorialisant $\mathbb{R}^3$ en fixant l'origine en l'isobarycentre du cube, on se ramène au cas vectoriel

6. Remarque : Une application affine qui conserve le cube est une isométrie
7. Théorème : $Isom^+(S) \simeq S_4$
8. Corollaire : $Isom(S) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
9. Application : On obtient la table de caractères de S_4 en annexe

4 Formes quadratiques et coniques

4.1 Réduction et signature des formes quadratiques réelles

(Chapitres 15.3 d'Algèbre et géoémtrie de Jean-Etienne Rombaldi et 7.3, 7.5 et 9.5 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

On considère q une forme quadratique sur E de forme polaire φ.

1. Définition : Une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E est dite orthogonale (respectivement orthonormé) pour φ si $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}\varphi(e_i, e_i)$ (respectivement δ_{ij})
2. Proposition : Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ base de E, alors e est une base orthogonale pour φ si et seulement si $Mat_e(q) = diag(q(e_1), ..., q(e_n))$
3. Remarque : Dans ce cas le rang de q est le nombre de $q(e_i)$ non nuls
4. Proposition : S'il existe une base orthonormée alors q est de rang n
5. Théorème de Gauss : Il existe une base orthogonale de E pour q, autrement dit il existe une base e de E telle que $q(x) = a_1x_1^2 + ... + a_rx_r^2$ avec $a_i = q(e_i)$ et $r = rg(q)$, autrement dit $Mat_e(q) = diag(a_{11}, ..., a_{rr}, 0, ..., 0)$
6. Corollaire : Théorème spectral : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tPAP$ soit diagonale
7. Théorème : Si E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors il existe une base e de E tel que $q(x) = x_1^2 + ... + x_r^2$ avec $r = rg(q)$, autrement dit $Mat_e(q) = diag(I_r, 0_{n-r})$
8. Corollaire : Dans ce cas il existe une base orthonormée pour q si et seulement si $rg(q) = n$ ie q non dégénérée
9. Théorème de Sylvester : Si E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, alors il existe une base e de E tel que $q(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2$, ie $Mat_e(q) = diag(I_p, I_{r-p}, I_{n-r})$
10. Définition : Dans ce cas le couple $sign(q) = (p, r-p)$ est appelé signature de q
11. Corollaire : Dans ce cas q est définie négative si et seulement si $sign(q) = (n, 0)$ si et seulement il existe une base orthonormée pour q, définie négative si et seulement si $sign(q) = (0, n)$, et non dégénéré si et seulement si $sign(q) = (p, n-p)$
12. Exemple : Si $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$ alors $sign(q) = (2, 1)$

4.2 Définition d'une conique à partir d'une forme quadratique et d'une forme linéaire

(Chapitre A.12 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)

On considère $q \in Q(\mathbb{R}^2)\backslash\{0\}, \varphi \in (\mathbb{R}^2)^*$ et $k \in \mathbb{R}$,

1. Définition : Une conique C est l'ensemble des $v \in \mathbb{R}^2$ tels que $q(v) + \varphi(v) = k$
2. Remarque : Quitte à échanger les signes on peut supposer $sign(q) = (2,0), (1,1), (1,0)$
3. Proposition : Soit e la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors dans cette base l'équation de C est $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \lambda x + \mu y = k$
4. Exemple : Si $\alpha = \gamma = k = 1, \beta = \lambda = \mu = 0$ alors on retrouve l'équation du cercle unité
5. Théorème : D'après l'orthodiagonalisation simultanée, il existe une base b de $\mathbb{R}^2$ orthogonale pour q et $\langle , \rangle$, ainsi dans cette base l'équation de la conique est $ax^2 + by^2 - 2rx - 2ry = k$
6. Proposition : Si q est non dégénérée alors $a, b \neq 0$, donc l'équation de la canonique dans une base de $\mathbb{R}^2$ $ax^2 + bx^2 = h$ avec $h \in \mathbb{R}$
7. Corollaire : Dans ce cas, si $sign(q) = (2,0)$ alors :
   — Si $h < 0$ alors $C = \varnothing$
   — Si $h = 0$ alors $C = \{0\}$
   — Si $h > 0$ alors C est une ellipse d'équation $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$
8. Corollaire : Dans ce cas, si $sign(q) = (1,1)$ alors $ab < 0$:
   — Si $h = 0$ alors C est l'ensemble des deux droites d'équations $y = \sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|}x$ et $y = -\sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|}x$
   — Si $h \neq 0$ et $a < 0 < b$ alors C est une hyperbole d'équation $-\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$
   — Si $h \neq 0$ et $b < 0 < a$ alors C est une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$
9. Proposition : Si q est dégénérée alors $ab = 0$ et $sign(q) = (1,0)$, alors l'équation de C est de la forme $a\left(x - \frac{r}{a}\right)^2 - 2sy = h$
10. Corollaire : Dans ce cas, si $s \neq 0$ alors C est une parabole d'équation $y = ax^2$
11. Corollaire : Dans ce cas, si $s = 0$ alors l'équation de C est de la forme $x^2 = \frac{h}{a}$, ainsi :
    — Si $h < 0$ alors $C = \varnothing$
    — Si $h = 0$ alors C est la droite d'équation $x = 0$
    — Si $h > 0$ alors C est l'ensemble des droites d'équations $x = \sqrt{\frac{h}{a}}$ et $x = -\sqrt{\frac{h}{a}}$
12. Remarque : Les différentes coniques sont représentées en annexe