Leçon 201 Espaces de fonctions, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan
2. Analyse de Xavier Gourdon
3. Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li
4. Théorie de l'intégration de Briane et Pagès
5. Calcul intégral de Jacques Faraut
6. Analyse complexe d'Amar et Matheron
7. Analyse complexe de Patrice Tauvel
8. Analyse de Queffélec et Zuily

Développements.

1. Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein
2. Théorème de Riesz-Fischer
3. Théorèmes des familles normales de Montel

Table des matières

1 Espace des fonctions continues

1.1 Continuité, uniforme continuité

(Chapitres 1.3, 2.3 et 3.2 de Topologie générale et espaces normes de Nawfal Hassan)
On considère X, Y deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$.

1. Définition : On dit que f est continue si $\forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in X, d(x,y) \leq \delta \longrightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$, et on note $C(X,Y)$ leur ensemble
2. Remarque : On peut définir la continuité entre deux espaces topologiques par l'image réciproque de tout ouvert (respectivement fermé) est ouvert (respectivement fermé)
3. Exemple : Les applications constantes sont continues
4. Proposition : Si Y est un espace vectoriel alors $C(X,Y)$ est un espace vectoriel
5. Théorème : Caractérisation séquentielle de la continuité : f continue en $x \in X$ si et seulement pour toute suite $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$, $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$
6. Application : Pour savoir si une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y alors on peut essayer d'écrire $y_n = f(x_n)$ avec f continue et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant
7. Définition : On dit que f est uniformément continue si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x, y \in X, d(x,y) \leq \delta \longrightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$
8. Exemple : Les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues
9. Remarque : Une application uniformément continue est continue mais la réciproque est fausse en générale
10. Exemple : La fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ continue non uniformément continue sur $\mathbb{R}$

1.2 Espaces normés des fonctions continue sur un compact

(Chapitres 3.2 et 3.6 de Topologie générale et espaces normés de Nawfal Hassan et 1.3 d'Analyse de Xavier Gourdon)

1. Théorème de Heine : Si X compact et f continue alors f uniformément continue
2. Théorème : Si X compact et f continue alors $f(X)$ est compact donc bornée
3. Corollaire : Si X compact, f continue et $Y = R$, alors f est bornée et atteint ses bornes
4. Application : Dans les espaces vectoriels de dimension finie les normes sont équivalentes
5. Application : Si X compact et $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ alors f admet un unique point fixe et on peut l'approcher par $x_{n+1} = f(x_n)$
6. Corollaire : On peut considérer la distance $d_\infty(f,g) = \underset{x \in X}{sup}(d(f(x), g(x)))$ sur $C(X,Y)$
7. Proposition : Cette métrique caractérise la convergence uniforme des suites des fonctions, de plus si f_n continue et $f_n \underset{n \to +\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ avec f continue
8. Remarque : Le convergence simple ne suffit pas
9. Exemple : Soit $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$, alors $f_n \underset{n \to +\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} \delta_1$ non continue
10. Théorème : Si Y est complet alors $C(X,Y)$ muni de d_∞ est complet

1.3 Parties denses

(Chapitre II.4.1 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : Soit K compact et A sous–algèbre de l'algèbre de Banach $C(K, \mathbb{R})$, alors on dit que A sépare les points de K si $\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \exists f \in A, f(x) \neq f(y)$
2. Théorème de Stone-Weierstrass (cas réel) (admis) : Soit K compact et A sous-algèbre de l'algébre de Banach $C(K, \mathbb{R})$ tel que A contienne les constantes et sépare les points de K, alors A est dense dans $C(K, \mathbb{R})$ pour la norme uniforme
3. Remarque : A contient les constantes si et seulement si $1 \in A$
4. Exemple : Soit K compact de $\mathbb{R}^d$ alors l'algèbre des fonctions polynomiales sur K à d variables est dense dans $C(K, \mathbb{R})$
5. Remarque : On retrouve le théorème de Weierstrass qui peut se démontrer par le théorème de Bernstein
6. Théorème de Weierstrass : Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ alors l'espace des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ est dense dans $C([a, b], \mathbb{R})$ pour la norme infini
7. Théorème de Bernstein : Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, ω son module de continuité, $B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \in \mathbb{C}[X]$, alors $B_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CVU} f, \|f - B_n\|_\infty \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et l'inégalité est optimale (Chapitre XIII.II.1.c d'Analyse de Queffélec et Zuily)
8. Application : si $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(t)t^n dt = 0$ alors $f = 0$
9. Théorème de Stone-Weierstrass (cas complexe) : Soit K compact et A sous-algèbre de $C(K, \mathbb{C})$ tel que A contienne les constantes, sépare les points de K et soit stable par conjugaison complexe, alors A est dense dans $C(K, \mathbb{C})$
10. Exemple : L'ensemble des fonctions polynômiales sur K à coefficients complexes en les variables z et $\overline{z}$ est dense dans $C(K, \mathbb{C})$

2 Espaces de Lebesgue $L^p(\mu)$

2.1 Espace vectoriel $\mathcal{L}^p(\mu)$ et espace normé $L^p(\mu)$

(Chapitres 9.1 et 9.3 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès et III.2 de Calcul intégral de Jacques Faraut)

On considère $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Définition : Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que $\|f\|_p^p := \int_X |f|^p d\mu < +\infty$
2. Exemple : Si $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ alors $\mathcal{L}^p(\mu) = l^p(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N}, \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty \right\}$
3. Proposition : $\mathcal{L}^p(\mu)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
4. Proposition : Si $\mu(X) < +\infty$ alors $p \leq q \Longrightarrow \mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$, de plus $p \leq q \Longrightarrow l^p(\mathbb{N}) \subset l^q(\mathbb{N})$

5. Application : Si $0 < p \leq q$ alors la convergence L^q de variables aléatoires implique la convergence L^p
6. Lemme : Inégalité de Young : Si $\alpha \in]0,1[$ et $(u,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ alors $u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha)v$ avec égalité si et seulement si $u = v$
7. Théorème de Hölder : Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec $(p,q) \in [1,+\infty[^2$ et $(f,g) \in \mathcal{L}^p(\mu) \times \mathcal{L}^q(\mu)$ alors $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ avec égalité si et seulement si $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ μ-presque partout
8. Corollaire : Inégalité de Minkowki : Si $p \in [1,+\infty[$ et $(f,g) \in (\mathcal{L}^p(\mu))^2$ alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$
9. Remarque : $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p(\mu)$
10. Définition : $L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/\sim$ avec $f \sim g$ si $\|f-g\|_p = 0$
11. Proposition : $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé
12. Lemme : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^p(\mu)^{\mathbb{N}}$ tel que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_p < +\infty$ alors $\sum f_n$ converge μ-presque partout et sa fonction somme $F \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_p}{\longrightarrow}} F$
13. Théorème de Riesz-Fischer : $L^p(\mu)$ est complet, ie toute suite de Cauchy est convergente
14. Corollaire : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{L}^p(\mu))^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ tel que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_p}{\longrightarrow}} f$, alors il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_{\varphi(n)}| \leq g$ μ-presque partout et $f_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ μ-presque partout

2.2 Densité avec les fonctions continues

(Chapitres 5.3, 9.4 et 9.5 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

1. Lemme : Si f mesurable alors il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étagées tel que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$, de plus si $f \geq 0$ alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et positives, et si f est bornée alors $\underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$
2. Proposition : Si $p \in [1,+\infty[$ alors l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\mu)$
3. Lemme : Soit $C \subset D \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ tel que C est dense dans D et D dense dans $L^p(\mu)$ alors C est dense dans $L^p(\mu)$
4. Théorème : L'ensemble des fonctions étagées à support compact est dense dans $L^p(\mu)$
5. Corollaire : L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mu)$
6. Application : Soit $f \in L^p(\lambda)$ et $\tau_a(f) = f(\cdot + a)$, alors $\|\tau_a(f) - f\|_p \underset{a\to 0}{\longrightarrow} 0$ (Exercice 9.12.b de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)
7. Théorème : L'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(\mu)$
8. Proposition : $L^p(\mu)$ est séparable si et seulement si $p \in [1,+\infty[$

2.3 Densité avec les fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

(Chapitres 14.4 et 14.5 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès et III.1.5 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : On dit que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1(\lambda)^{\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n d\lambda = 1, \underset{n\in\mathbb{N}}{sup} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n| d\lambda < +\infty, \underset{n\to+\infty}{lim} \int_{(|x|>\varepsilon)} |\alpha_n| d\lambda = 0$
2. Exemple : Si $\alpha \in L^1(\lambda)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha d\lambda = 1$ alors $\alpha_n(x) = n^d\alpha(nx)$ est une approximation de l'unité
3. Théorème : Si $f \in L^p(\lambda)$ alors $f * \alpha_n \in L^p$ et $f * \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_p}{\longrightarrow}} f$
4. Lemme : Si $\varphi \in C_c^n(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\lambda)$ alors $f * \varphi \in C^n(\mathbb{R}^d)$ et $\frac{\partial(f*\varphi)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$
5. Définition : On dit que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité et $\alpha_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$
6. Exemple : Si $\alpha(x) = \frac{\varphi(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)dy}$ avec $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante
7. Théorème : $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\lambda)$
8. Proposition : Soit K compact et U ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel que $K \subset U$, alors il existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $0 \leq \varphi \leq 1, \varphi_{|K} = 1, \varphi_{|U^c} = 0$
9. Corollaire : Soit K compact de $\mathbb{R}^d$ tel que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ avec $U_1, ..., U_n$ ouverts de $\mathbb{R}^n$, alors il existe $\varphi_1, ..., \varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $Supp(\varphi_k) \subset U_k, \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \leq 1$ et $\forall x \in K, \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) = 1$
10. Théorème : Soit U ouvert de $\mathbb{R}$, alors $f \in L^1_{loc}(U) \longmapsto \left[\varphi \in C_c^\infty(U) \longmapsto \int_U f(x)\varphi(x)dx\right] \in \mathcal{D}'(U)$ est une application linéaire injective (Chapitre X.2.1 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
11. Théorème : La transformation de Fourier de L^1 dans C_0 est continue de norme 1 (Chapitre III.2.1 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

3 Espaces des fonctions holomorphes

3.1 Holomorphie et intégration

(Chapitres 3.1 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron et 6.2 et 6.3 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)

On considère Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

1. Définition : On dit que f est holomorphe sur Ω si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω, on note $H(\Omega)$ leur ensemble
2. Exemple : Les fonctions polynomiales sont holomorphes, les séries entières sont holomorphes sur le disque ouvert de convergence
3. Théorème : Equations de Cauchy-Riemann : f est holomorphe si et seulement si $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ avec $u = Re(f), v = Im(f)$

4. Définition : Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ un chemin, alors $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$
5. Exemple : Soit γ chemin fermé et f polynomiale, alors $\int_\gamma f(z)dz = 0$
6. Théorème : Soit γ chemin fermé dans Ω, si f holomorphe alors $\int_\gamma f(z)dz = 0$
7. Définition : Soit γ chemin fermé et $z \in \mathbb{C}\backslash Im(\gamma)$, alors $Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}d\zeta$ est appelé l'indice de z par rapport à γ
8. Théorème : Soit γ chemin fermé et $U = \mathbb{C}\backslash Im(\gamma)$, alors l'application Ind_γ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ constante sur chaque composante connexe de U et nulle sur la composante connexe non bornée de U
9. Exemple : $Ind_{C(0,1)}(0) = 1$

3.2 Proporiétés des fonctions de l'espace $H(\Omega)$

(Chapitres 3.3, 3.4 et 4.4 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron et 6.4 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)

1. Théorème de Cauchy : Si f holomorphe, soit K compact de Ω à bord régulier et $z \in \overset{\circ}{K}$, alors $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$
2. Corollaire : Si f holomorphe alors f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable et $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{\partial K}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$
3. Théorème : Si f holomorphe sur $D(z_0, R)$ alors $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ avec convergence normale sur tout compact de $D(z_0, R)$
4. Corollaire : Si f holomorphe alors f développable en série entière au voisinage de chaque point
5. Exemple : $exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$
6. Théorème : Principe du prolongement analytique : Si Ω connexe, soit $f, g \in H(\Omega)$ coïncidant sur un ouvert non vide de Ω, alors $f = g$
7. Application : $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ est l'unique prolongement holomorphe de la fonction Γ d'Euler sur $\mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R}$
8. Corollaire : $H(\Omega)$ est un anneau intègre contrairement à $C(\Omega)$
9. Théorème : Principe des zéros isolés : Si Ω connexe et f holomorphe non nul, soit $a \in \Omega$ tel que $f(a) = 0$, alors a possède un voisinage sur lequel f ne s'annule pas

3.3 Espace métrique des fonctions holomorphes

(Chapitres VII.4 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li, 3.1 et 5.4 de Topologie générale et espaces normés de Nawfal Hassan, V.III.2.a d'Analyse de Queffélec et Zuily et 3.5.2 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron)

1. Définition : Soit $A \subset C(X, Y)$, alors on dit que A est équicontinue si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x, y \in X, \forall f \in A, d(x,y) \leq \delta \Longrightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$

2. Théorème d'Ascoli : Si X compact, soit $A \subset C(X,Y)$, alors A est relativement compact si et seulement si A est équicontinue et pour tout $x \in X, A(x)$ est relativement compact
3. Corollaire : Si X compact et Y vectoriel normé de dimension finie, soit $A \subset C(X,Y)$, A équicontinue bornée si et seulement si A relativement compact
4. Définition : On considère $K_n = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z| \leq n, d(z,\Omega^c) \geq \frac{1}{n} \right\}$ compacts de Ω tels que $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n, p_n(f) = \sup\limits_{z\in K_n} |f(z)|$, et $\delta(f,g) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$
5. Théorème : $(H(\Omega),\delta)$ est un espace métrique complet
6. Proposition : Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \in H(\Omega)^{\mathbb{N}}$ et $f \in H(\Omega)$, alors $f_p \underset{p\to+\infty}{\overset{CVUSTC}{\longrightarrow}} f$ si et seulement si $\delta(f_p,f) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
7. Théorème de convergence de Weierstrass : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H(\Omega)^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur tout compact de Ω, alors la limite f est holomorphe et $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sur tout compact vers f'
8. Exemple : La fonction $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ définit une fonction holomorphe sur $]1,+\infty[\ +i\mathbb{R}$
9. Lemme : Si X complet, soit $A \subset X$, alors A relativement compact si et seulement si A précompact
10. Définition : Soit $A \subset H(\Omega)$, alors on dit que A est localement bornée si pour tout compact K de Ω, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall z \in K, \forall f \in A, |f(z)| \leq M$
11. Lemme : Soit $A \subset H(\Omega)$ localement bornée, alors pour tout compact K de Ω, il existe $\lambda(K) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall f \in A, \forall (z_1,z_2) \in K^2, |f(z_1) - f(z_2)| \leq \lambda(K)|z_1 - z_2|$
12. Théorème de Montel : Soit $A \subset H(\Omega)$, alors A est localement bornée si et seulement si A est relativement compacte
13. Exemple : Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ tel que $sup(|P_n(z)|, |z| = 1, n \in \mathbb{N}) < +\infty$, alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille normale, ainsi il n'existe pas de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(0) = 1, \forall z \in \mathbb{C}^*, P_n(z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $sup(|P_n(z)|, |z| = 1, n \in \mathbb{N}) < +\infty$ (Exercice 13.1 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)
14. Application : La distance δ ne peut pas être issue d'une norme
15. Remarque : En pratique on se sert de la formulation suivante : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H(\Omega)^{\mathbb{N}}$ localement bornée admettant une unique valeur d'adhérence $f \in H(\Omega)$ (pour la convergence uniforme sur tout compact), alors $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVUSTC}{\longrightarrow}} f$