Leçon 203 Utilisation de la notion de compacité

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Analyse de Xavier Gourdon
2. Oraux X-ENS Analyse 1
3. Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi
4. Equations différentielles de Florent Berthelin
5. Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li
6. Topologie générale et espaces normes de Nawfal El Hage Hassan
7. Analyse de Queffélec et Zuily
8. Analyse complexe de Patrice Tauvel

Développements.

1. Connexité des valeurs d'adhérence et critère de convergence
2. Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein
3. Théorèmes des familles normales de Montel

Table des matières

1 Caractérisation de la compacité de propriétés

1.1 Propriété de Borel-Lesbesgue

(Chapitres 1.3.1 d'Analyse de Xavier Gourdon)
On considère E un espace métrique.

1. Définition : On dit que E est compact si $E = \bigcup_{i \in I} O_i$ avec O_i ouverts alors il existe $J \subset I$ fini tel que $E = \bigcup_{i \in J} O_i$
2. Exemple : Si E est fini alors E est compact
3. Exemple : $\mathbb{R}$ n'est pas compact
4. Proposition : E est compact si et seulement si pour tout F_i fermés tels que $\bigcap_{i \in I} F_i = \varnothing$, il existe $J \subset I$ fini tel que $\bigcap_{i \in J} F_i = \varnothing$
5. Corollaire : Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite décroissante de fermés non vides de E compact alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$
6. Remarque : La propriété est encore si E complet et $\delta(F_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
7. Proposition : Si E compact alors E borné
8. Définition : Soit $A \subset E$, alors on dit que A est compact si A est compact pour la topologie induite, autrement dit si $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ avec O_i ouverts de E alors il existe $J \subset I$ fini tel que $A \subset \bigcup_{i \in J} O_i$, et une intersection de compactes est compacte
9. Exemple : Les parties compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés
10. Proposition : Une réunion finie de compactes est compacte mais une réunion infinie de compactes n'est pas nécessairement compact
11. Exemple : $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$
12. Proposition : Si A fermé inclus dans E compact alors A compact et si A compacte alors A fermés et bornée

1.2 Propriété de Bolzano-Weierstrass

(Chapitre 1.3.2 d'Analyse de Xavier Gourdon)

1. Définition : On dit que E est précompact si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $E = \bigcup_{i \in I} B(x_i, \varepsilon)$ avec $x_i \in E$ et I fini
2. Lemme : Si E vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass, ie de toute suite on peut en extraire une suite convergente, alors E est précompact
3. Lemme : Si E vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass et $E = \bigcup_{i \in I} O_i$ avec O_i ouverts alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \exists i \in I, B(x, \alpha) \subset O_i$

4. Théorème de Bolzano-Weierstrass : E compact si et seulement si de toute suite de E il existe une sous-suite convergente dans E
5. Corollaire : E est compact si et seulement si toute suite de E admet une valeur d'adhérence dans E si et seulement si toute partie infinie de E admet un point d'accumulation
6. Application : Si E compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ admettant une unique valeur d'adhérence alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette valeur d'adhérence
7. Proposition : Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ convergent vers l alors $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compacte
8. Théorème : E compact si et seulement si E est complet et précompact
9. Théorème : Si E compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tel que $d(x_n, x_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de x est compact et connexe
10. Application : Si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$, alors u converge si et seulement si $x_{n+1} - x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (Exercice 2.19 de Oraux X-ENS Analyse 1)

2 Fonctions continues sur un compact

2.1 Compacité et extrema

(Chapitres 3.4 d'Analyse de Xavier Gourdon et 9 de Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi)

On considère E et F deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$.

1. Théorème : Si E compact et f continue alors $f(E)$ compact
2. Corollaire : Si E compact et f continue alors f fermée ie l'image de tout fermé est fermée
3. Remarque : Il existe des applications continues non fermé
4. Exemple : exp est continue mais $exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ n'est pas fermé
5. Corollaire : Si E compact et $f : E \longrightarrow F$ continue bijective alors f^{-1} continue
6. Corollaire : Si E compact et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue alors f bornée et atteint ses bornes
7. Application : Dans un espace vectoriel de dimension finie les normes sont équivalentes
8. Application : Théorème de Rolle : Soit K compact de E et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur $\overset{\circ}{K}$ et constante sur ∂K, alors il existe $c \in \overset{\circ}{K}$ tel que $df(c) = 0$
9. Exemple : Le polynôme de Hermite H_n, définis par $(e^{-x^2})^{(n)} = H_n(x)e^{-x^2}$, admet n racines réelles distinctes

2.2 Uniformé continuité et théorème de Heine

(Chapitre 1.4 de Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : On dit que f est k-lipschizienne si $\forall (x,y) \in E^2, d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y)$
2. Exemple : Soit $x \in E$, si $f : a \in E \longmapsto d(a,x) \in \mathbb{R}$ alors f est 1-lipschitienne

3. Définition : On dit que f est uniformément continue si $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall(x, y) \in E, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$
4. Remarque : Si f uniformément continue alors f continue
5. Exemple : Les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues
6. Application : L'application norme est 1-lipschitzienne donc uniformément continue donc continue
7. Théorème de Heine : Soit K compact de E, si f continue sur K alors f uniformément continue sur K
8. Corollaire : Si $f : [a, b] \longrightarrow X$ continue alors f uniformément continue
9. Application : Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique alors f uniformément continue

2.3 Utilisation pour les points fixes et les équations différentielles

(Chapitre 1.2.3, Exercice 1.3.5.4 d'Analyse de Xavier Gourdon et Chapitres 3.2 et 3.8 de Equations différentielles de Florent Berthelin)

1. Définition : On dit que f est contractante si f est k-lipschitzienne avec $k < 1$
2. Théorème du point fixe : Si E complet et $f : E \longrightarrow E$ contractante alors f admet un unique point fixe $l \in E$ et pour $x_0 \in E$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, on a $d(x_n, l) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$
3. Corollaire : Théorème du point fixe itéré : Si f^p est contractante alors f admet un unique point fixe
4. Application : Théorème de Cauchy-Lispchitz globalement lipschitzien : Si f continue et globalement lipschitzien par rapport à la variable d'état alors il existe une unique solution globale de $y' = f(t, y), y(t_0) = t_0$
5. Corollaire : Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire : Si $\forall(t, y) \in I \times U, f(t, y) = A(t)y + B(t)$ avec $A \in C(I, M_N(\mathbb{C}))$ et $B \in C(I, \mathbb{C}^N)$ alors il existe une unique solution globale de $y' = Ay + B, y(t_0) = y_0$
6. Théorème : Si E compact et $f : E \longrightarrow E$ tel que $\forall(x, y) \in E, d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ alors f admet un unique point fixe
7. Remarque : Si E n'est pas compact alors le théorème ne reste pas vrai
8. Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = x + \frac{1}{1+x}$ continue sans point fixe
9. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani : Soit E un espace vectoriel normé, K un convexe compact non vide de E et $f_i : K \longrightarrow K$ commutant deux à deux, alors les f_i admettent un point fixe commun (Exercice VI.4.4 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
10. Application : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur un espace d'état fini de cardinal n, alors il existe une mesure invariante $\mu \in \mathbb{R}^n$ (vue comme un vecteur ligne) pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ie si on note P la matrice de transition, $\forall k \in \mathbb{N}, \nu P^k = \nu$
11. Théorème : Si $f :]a, b[\times U \longrightarrow K^N$ continue localement lipschizienne par rapport à la variable d'état, soit $y :]c, d[\subset]a, b[\longrightarrow K^N$ la solution maximale de $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$, alors $(t, y(t))$ sort de tout compact de U
12. Application : Dans ce cas, si f est bornée alors les solutions sont globales.
13. Exemple : La solution de $y' = sin(y), y(1) = 1$ est globale car sin est bornée

3 Compacité dans des espaces vectoriels de dimension infinie

3.1 Théorème de Riesz

(Chapitre I.2.2 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
On considère E espace vectoriel normé.

1. Proposition : Si $dim(E) = +\infty$ alors $\overline{B}(0,1)$ ne peut pas être incluse dans une réunion finie de boules ouvertes de rayon 1
2. Lemme de Riesz : Soit F sous-espace vectoriel fermé de E tel que $F \neq E$, alors pour tout $\delta \in]0,1[$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1, d(x,F) \geq 1-\delta$
3. Théorème de Riesz : S'il existe $\overline{B}(x_0, r) \subset E$ compacte alors $dim(E) < +\infty$
4. Corollaire : $dim(E) < +\infty$ si et seulement si $\overline{B}(0,1)$ est compacte
5. Corollaire : Si $dim(E) = +\infty$ alors tout compact de E est d'intérieur vide
6. Corollaire : Soit $A \subset E$, si $dim(E) < +\infty$ alors A compact si et seulement si A fermé borné
7. Application : En dimension finie, les normes sont équivalentes
8. Exemple : Si E est l'ensemble des applications lipschiziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $N(f) = \underset{x \neq y}{sup} \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right|$, alors $\overline{B}(0,2)$ n'est pas bornée, donc $dim(E) = +\infty$ (Exercice 6.26 de Topologie générale et espaces normes de Nawfal El Hage Hassan)

3.2 Théorème de Stone-Weierstrass

(Chapitre II.4.1 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
On considère K espace vectoriel normé compact.

1. Lemme : Théorème de Dini : Si E compact, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite croissante de fonctions telle que $f_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ continue, alors $f_n \underset{n \to +\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$
2. Définition : Soit $A \subset C(K, \mathbb{K})$, alors on dit que A est séparante si $\forall (x,y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \exists f \in A, f(x) \neq f(y)$
3. Théorème de Stone-Weierstrass réel (admis) : Soit A sous-algèbre de $C(K,\mathbb{R})$ tel que A sépare les points de K et contienne les constantes, alors A est dense dans $C(K,\mathbb{R})$
4. Application : Soit C partie compacte de $\mathbb{R}^d$, alors les polynômes réels à d variables restreints à C sont dense dans $C(C,\mathbb{R})$
5. Remarque : Le résultat précédent pour $d = 1$ peut être démontré autrement en utilisant les polynômes de Bernstein $B_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour $f \in C([0,1],\mathbb{R})$
6. Théorème de Weierstrass : Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$, alors les fonctions polynomiales restreintes à $[a,b]$ sont denses dans $C([a,b],\mathbb{R})$ pour la norme infini
7. Corollaire : $L^2(]0,1[,\mathbb{R})$ est séparable

8. Application : Soit $g \in L^2(]0,a[,\mathbb{R})$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^a g(t)e^{int}dt = 0$, alors $g = 0$ (Exercice II.5.20 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
9. Théorème de Stone-Weierstrass complexe : Soit A sous-algèbre de $C(K,\mathbb{C})$ tel que A sépare les points de K, contienne les constantes et soit stable par conjugaison, alors A est dense dans $C(K,\mathbb{C})$
10. Exemple : Soit C compact de $\mathbb{C}$, alors les polynômes en $id_{\mathbb{C}}$ et $\overline{id_{\mathbb{C}}}$ sont denses dans $C(C,\mathbb{C})$

3.3 Théorème d'Ascoli et métrique des fonctions holomorphes

(Chapitres V.III.1 et V.III.2 d'Analyse de Queffélec et Zuily et VII.A du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

On considère X espace métrique compact, $A \subset C(X)$ que l'on munit $C(X)$ de la distance uniforme $d(f,g) = \underset{x\in X}{sup} d(f(x),g(x))$.

1. Définition : On dit que A est équicontinue si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x,y) \in X^2, \forall f \in A, d(x,y) \leq \delta \Rightarrow d(f(x),f(y)) \leq \varepsilon$, et on appelle le plus grand δ possible le module d'équicontinuité de A
2. Définition : On dit que A est relativement compact si $\overline{A}$ est compacte
3. Théorème d'Ascoli : A est relativement compacte si et seulement si A est bornée et équicontinue
4. Proposition : Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$, $K_n = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq n, d(z,\Omega^c) \geq \frac{1}{n}\}, p_n(f) = \underset{z\in K_n}{sup}|f(z)|$ et $\delta(f,g) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$, alors $(H(\Omega),\delta)$ est un espace métrique complet et pour $f_p, f \in H(\Omega)$, $f_p \underset{p\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ si et seulement si $\delta(f_p,f) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
5. Définition : Soit $A \subset H(\Omega)$, alors on dit que A est localement bornée si pour tout compact K de Ω, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall z \in K, \forall f \in A, |f(z)| \leq M(K)$
6. Lemme : Soit $A \subset H(\Omega)$ localement bornée, alors pour tout compact K de Ω, il existe $\lambda(K) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall (z_1,z_2) \in K^2, \forall f \in A, |f(z_1) - f(z_2)| \leq \lambda(K)|z_1 - z_2|$
7. Théorème des familles normales de Montel : Soit $A \subset H(\Omega)$, alors A localement bornée si et seulement si A relativement compacte dans $(H(\Omega),\delta)$
8. Application : $H(\Omega)$ n'est pas normable pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (Exercice V.VII.14 d'Analyse de Queffélec et Zuily)
9. Application : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H(\Omega)^{\mathbb{N}}$ uniformément bornée sur tout compact de Ω, alors il existe une sous-suite converge uniformément sur tout compact vers une fonction holomorphe
10. Exemple : Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ tel que $sup(|P_n(z)|, |z| = 1, n \in \mathbb{N}) < +\infty$, alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille normale, ainsi il n'existe pas de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(0) = 1, \forall z \in \mathbb{C}^*, P_n(z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $sup(|P_n(z)|, |z| = 1, n \in \mathbb{N}) < +\infty$ (Exercice 13.1 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)

3.4 Compacité dans les espaces L^p

(Exercice I.3.22 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
On considère A partie bornée de $L^p(\mathbb{R})$

1. Proposition : Si A est précompacte alors :
   — (1) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists R_\varepsilon, \int_{|x|>R_\varepsilon} |f(x)|^p dx \leq \varepsilon^p$
   — (2) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall f \in A, \forall t \in \mathbb{R}, |t| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f \circ (id_\mathbb{R} - t) - f\|_p \leq \varepsilon$
2. Lemme : Si A vérifie (1) et (2) alors, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\delta_\varepsilon} \int_x^{x+\delta} f(u)du$ est continue et $\{\varphi_\varepsilon(f)_{[-R,R]}, f \in\}$ est précompact dans $C([-R, R])$
3. Proposition : Si A vérifie (1) et (2) alors A est précompacte dans $L^p(\mathbb{R})$
4. Théorème : $L^p(\mathbb{R})$ est complet
5. Corollaire : A est relativement compact si et seulement si A vérifie (1) et (2)
6. Exemple : Si $p = 2$ et $\underset{R\to+\infty}{lim} \left(\underset{f\in A}{sup} \int_{|x|>R} |f(x)|^2 dx \right) = 0 = \underset{R\to+\infty}{lim} \left(\underset{f\in A}{sup} \int_{|x|>R} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi \right)$ alors A est compact (à connaitre)