Leçon 204 Connexité, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan
2. Analyse de Xavier Gourdon
3. Oraux X-ENS analyse 1
4. Analyse complexe de Patrice Tauvel
5. H2G2 tome 1 de Caldero et Germoni

Développements.

1. Connexité des valeurs d'adhérence et critère de convergence
2. Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$ par le connexité de $SO_n(\mathbb{R})$

Table des matières

1 Espaces et parties connexes

On considère X un espace topologique.

1.1 Caractérisations de la connexité

(Chapitre 4.1 de Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan)

1. Définition : On dit que X est connexe s'il n'existe pas de partition en deux ouverts non vides de X
2. Exemple : $\mathbb{R}$ est connexe
3. Proposition : X est connexe si et seulement s'il n'existe pas de partition en deux fermés non vides de X
4. Corollaire : X est connexe si et seulement s'il n'existe pas de partie ouverte et fermé dans X
5. Théorème : X est connexe si et seulement si pour toute fonction continue $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ est constante (avec δ la distance usuelle sur $\{0,1\}$)
6. Corollaire : X est connexe si et seulement si pour toute fonction continue $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ est constante
7. Définition : On dit qu'une partie A de X est connexe si A munie de la topologie induite est connexe
8. Exemple : Si X est séparé (ie pour tout couple de points disjoints, il existe des voisinages disjoints) alors toute partie fini de X est connexe
9. Exemple : $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe dans $\mathbb{R}$

1.2 Propriétés topologiques

(Chapitre 4.1 de Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan)

1. Proposition : Soit A partie connexe de $X = U \cup V$ avec U et V deux ouverts (ou fermés) disjoints, alors $A \subset U$ ou $A \subset V$
2. Corollaire : Soit A partie connexe de X et U ouvert fermé de X tels que $A \cap U \neq \varnothing$, alors $A \subset U$
3. Proposition : Soit A connexe de X et $B \subset X$ tels que $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B connexe
4. Corollaire : Soit A connexe de X, alors $\overline{A}$ est connexe
5. Théorème : Soit $(A_i)_{i \in I}$ connexes de X deux à deux non disjoints, alors $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ est connexe
6. Remarque : On a besoin du caractère non disjoints, par exemple : $]0,1[\cup]1,2[$ n'est pas connexe
7. Proposition : Soit Y un espace topologique $f : X \longrightarrow Y$ continue, si X est connexe alors $f(X)$ est connexe

8. Proposition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, si X est un espace métrique compact et $d(u_n, u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors l'ensemble Γ des valeurs d'adhérence de u est un connexe compact de X (Exercice 7 du chapitre 4 d'Analyse de Xavier Gourdon)
9. Application : Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue, $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (Exercice 2.19 des Oraux X-ENS Analyse 1)

1.3 Composantes connexes

(Chapitre 4.2 de Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan)

1. Proposition : Pour $(x, y) \in X^2$, la relation xRy, définie par l'existence d'un connexe A de E tel que $x \in A$ et $y \in A$, est une relation d'équivalence sur X
2. Définition : Une classe d'équivalence pour cette relation est appelée composante connexe et, pour $x \in X$, on note $C(x)$ la composante connexe contenant x
3. Théorème : Soit $x \in X$, alors $C(x)$ est la réunion des connexes de X contenant x, ie la plus grande partie connexe de X contenant x
4. Proposition : Soit $x \in X$, alors $C(x)$ est un convexe fermé de X
5. Théorème : Soit A connexe de X et C composante connexe de X tels que $A \cap C \neq \varnothing$, alors $A \subset C$
6. Remarque : Les composantes connexes ne sont en général pas des ouverts
7. Exemple : Les composantes de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ sont réduites à un point, donc des fermés non ouverts

1.4 Connexité par arcs

(Chapitre 4.4 Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan)

1. Définition : Un chemin de X est une application $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ continue
2. Exemple : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, alors $\gamma : t \in [0,1] \longmapsto (1-t)a + tb$ est un chemin de $\mathbb{R}$ entre a et b
3. Exemple : Soit $(z, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^*$, alors $\gamma : t \in [0,1] \longmapsto z + re^{2i\pi t}$ est un chemin parcourant $C(z, r) \subset \mathbb{C}$
4. Proposition : Pour $(x, y) \in X^2$, xRy, définie par l'existence d'un chemin entre x et y, définit une relation d'équivalence sur X
5. Définition : On dit que X est connexe par arcs si X possède une unique classe d'équivalence
6. Théorème : Si X est connexe par arcs alors X est connexe
7. Remarque : La réciproque est fausse
8. Exemple : $X = \{(0, y), -1 \leq y \leq 1\} \cup \left\{\left(x, sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), x \in \left]0,1\right]\right\}$ est connexe mais pas connexe par arcs (faire un dessin en annexe)

2 Utilisation de la connexité par les fonctions

2.1 Fonctions à variables réelles

(Chapitre 4.1 de Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan)

1. Théorème : Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$
2. Corollaire : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont connexes
3. Corollaire : Théorème des valeurs intermédiaires : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue alors $f(I)$ est un intervalle, autrement dit si $f(a) \leq f(b)$ alors $\forall z \in [f(a), f(b)], \exists c \in [a, b], f(c) = z$
4. Théorème de Darboux : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable alors $f'(I)$ est un intervalle (Exercice 8 du chapitre 5 d'Analyse de Xavier Gourdon) U
5. Application : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$, alors si F ne vérifie pas le TVI sur un intervalle $J \subset I$ alors F n'admet pas de primitive sur I (à connaître)
6. Exemple : La fonction $Ent : x \in \mathbb{R} \longmapsto Ent(x) \in \mathbb{R}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$ (à connaître)

2.2 Fonctions à variable complexe

(Chapitres 5.2 et 4.2 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)
On consière U ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

1. Théorème : Soit $f \in H(U)$ tel que $f' = 0$ alors f est constante
2. Corollaire : Les assertions suivantes sont équivalentes :
   — f constante sur U
   — $Re(f)$ constante sur U
   — $Im(f)$ constante sur U
   — $|f|$ constante sur U
   — $\overline{f} \in H(U)$
3. Application : Si $f \in H(U)$ alors $Im(f) = (Re(f))^2$ si et seulement si $f = \lambda^2 + i\lambda$ (Exercice 5.4 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)
4. Théorème : Principe de prolongement analytique : Soit $a \in U$ et $f \in H(U)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :
   — $f = 0$
   — Il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f_{|V} = 0$
   — $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$
5. Corollaire : Soit $(f, g) \in H(U)^2$ tel qu'il existe $x \in U$ et $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $f_{|V} = g_{|V}$ alors $f = g$
6. Théorème : Principe des zéros isolés : Soit $f \in H(U)\backslash\{0\}$, alors $Z(f)$ est une partie discrète

2.3 Intégration complexe et indice d'un chemin

(Chapitres 6.2 et 6.3 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)

1. Définition : Soit γ chemin et $f : Im(\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}$ continue alors $\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$
2. Exemple : Soit $(z, r, n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}\backslash\{-1\}$, alors $\int_{C(z,r)} z^n dz = 0$
3. Définition : Soit γ chemin fermé, Ω complémentaire de $\gamma([0,1])$ et $z \in \Omega$, alors $Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$ est l'indice de z pour γ
4. Remarque : En pratique l'indice correspond au nombre de "tours" (compté algébriquement) effectués par le chemin autour du point
5. Exemple : Soit $(z, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^*$, alors $\forall w \in B(z, r), Ind_{C(z,r)}(w) = 1$
6. Théorème : Ind_γ est à valeurs entières sur Ω constante sur chaque composante connexe de Ω et nulle sur la composante connexe non bornée de Ω
7. Théorème : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ continue alors f possède une primitive dans U si et seulement si pour tout chemin fermé γ dans U, $\int_\gamma f(z)dz = 0$

3 Utilisation de la connexité en théorie des groupes

3.1 Groupes topologiques matricielles

(Chapitres II.1 et II.2 de H2G2 de Caldero et Germoni)
On considère G un groupe et K le corps des réels ou des complexes.

1. Définition : On dit que G est un groupe topologique si G est muni d'une topologie telle que la multiplication et l'inversion soient continues
2. Remarque : Comme l'inversion est involutive, c'est un homéomorphisme
3. Lemme : Les translations à gauche et à droite sont des homéomorphismes
4. Proposition : $GL_n(K)$ est un groupe topologique muni de la topologie induite par une norme sur $M_n(K)$
5. Théorème : $GL_n(K)$ est un ouvert dense dans $M_n(K)$
6. Théorème : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, donc connexe
7. Remarque : $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe

3.2 Théorème d'homéomorphisme et applications

(Chapitres II.3 et II.4 de H2G2 de Caldero et Germoni)

1. Définition : Soit X espace topologique, si G groupe topologique alors une action continue de G sur X est une action $\alpha : G \times X \longrightarrow X$ continue pour la topologie produit sur $G \times X$
2. Exemple : L'action de $GL_n(K)$ sur $M_n(K)$ est une action continue

3. Définition : Soit H sous-groupe de G groupe topologique, alors la topologie quotient sur G/H est la topologie dont les ouverts sont les parties de G/H d'images réciproques par la projection canonique ouvertes
4. Théorème : Soit X espace topologique et $\alpha : G \times X \longrightarrow X$ une action continue et transitive, si G est compact alors pour tout $x \in X$, $\overline{\alpha}_x : gStab_G(x) \in G/Stab_G(x) \longmapsto \alpha(g,x) \in Orb_G(x)$ est un homéomorphisme
5. Proposition : Si H et G/H sont connexes alors G est connexe
6. Application : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe (sans passer par la connexité par arcs)
7. Proposition : Les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$ sont $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$
8. Théorème : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe et compact
9. Remarque : $O_n(\mathbb{R})$ est un compact non connexe, ses composantes connexes sont $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$
10. Lemme : $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les renversements orthogonaux, ie les symétries orthogonales parallèlement à plan
11. Application : $SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple