Leçon 207 Prolongements de fonctions, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi
2. Topologie générale et espace vectoriel normé de Nawfal El Hage Hassan
3. Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li
4. Equations différentielles de Florent Berthelin
5. Suites et séries de Mohammed El Amrani
6. Analyse de Xavier Gourdon
7. Analyse complexe d'Amar et Matheron
8. Analyse de Queffélec et Zuily
9. L'algèbre discrète de la transformée de Fourier de Gabriel Peyré
10. Eléments d'analyse et d'algèbre de Pierre Colmez

Développements.

1. Transformation de Fourier sur L^2 et théorème de Plancherel
2. Prolongement holomorphe de la fonction Γ d'Euler

Table des matières

1 Aspect continu

1.1 Prolongement par continuité

(Chapitres 6.1 des Eléments d'analys réelle de Jean-Etienne Rombaldi, 2.6 et 6.3 de Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan)

1. Théorème : Soit $a \in \partial I \backslash I$ et $f \underset{a}{\longrightarrow} l$, alors il existe un unique prolongement de f à $I \cup \{a\}$ continue en a
2. Exemple : Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = x^\alpha sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$, alors f se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0
3. Théorème de prolongement : Soit X espace métrique, Y espace complet, A dense dans X et $f : A \longrightarrow Y$ uniformément continue alors f se prolonge de manière unique et uniformément continue à X
4. Remarque : L'uniforme continuité est nécessaire
5. Exemple : $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ sur $[0, 1[$ ne se prolonge pas par continuité à $[0, 1]$
6. Corollaire : Soit $f \in \mathcal{L}(V, F)$ avec F espace de Banach et V sous-espace vectoriel dense de E alors f se prolonge de manière unique en $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\|f\| = \|g\|$
7. Remarque : La continuité n'est pas nécessaire pour prolonger f en une application linéaire, mais la complétude de F l'est
8. Exemple : Soit F dense dans E tel que $F \neq E$, alors $id : x \in F \longmapsto E$ ne peut se prolonger en une application continue sur E (Exercice 7.26 de Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan)

1.2 Applications à la transformation de Fourier dans L^2

(Chapitre III.2.3 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : $A(\mathbb{R}) = \{f \in L^1(\mathbb{R}), \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})\}$
2. Théorème : $L^2(\mathbb{R})$ est complet
3. Proposition : $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$
4. Théorème de Plancherel : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ se prolonge de façon unique en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui même
5. Remarque : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f)$ ne peut pas se calculer directement a priori
6. Proposition : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\varphi_A(y) = \int_{-A}^{A} f(x) e^{-2i\pi xy} dx$ alors, $\varphi_A \xrightarrow[A \to +\infty]{L^2} \mathcal{F}(f)$
7. Proposition : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \mathcal{F}(y) e^{2i\pi xy} dy$, alors $\psi_A \xrightarrow[A \to +\infty]{L^2} f$
8. Corollaire : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(y) e^{2i\pi xy} dy$
9. Exemple : Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\mathcal{F}\left(\frac{sin(2\pi\lambda x)}{2\pi\lambda x}\right)(y) = \frac{1}{2\lambda}\mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]}(y)$ (Exercice III.3.14 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

2 Aspect différentiel

2.1 Prolongement de classe C^k

(Chapitres 9.4.2 des Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi et III.1.5.2 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Proposition : Soit f continue sur I, dérivable sur $I\backslash\{a\}$ et $f' \underset{a}{\to} l$ alors f se prolonge en une fonction dérivable sur I
2. Exemple : $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ se prolonge une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$
3. Théorème : Soit E, F deux espaces de Banach, U ouvert non vide de E, $a \in U$ et $f : U \longrightarrow F$ continue sur U et différentiable sur $U\backslash\{a\}$, si $df \underset{x\to a}{\longrightarrow} L \in \mathcal{L}(E, F)$ alors f est différentiable en a et $df(a) = L$
4. Proposition : Il existe $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\varphi_{|[-1,1]} = 1, \varphi_{|\mathbb{R}\backslash[-2,2]} = 0$
5. Théorème : Soit K compact de $\mathbb{R}^d$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel que $K \subset \Omega$ alors il existe $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $\varphi_{|K} = 1$ et $\varphi_{|\Omega^c} = 0$

2.2 Prolongement de solutions d'équations différentielles

(Chapitres 1.3 et 3.8 de Equations différentielles de Florent Berthelin)
On considère I intervalle de $\mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : I \times U \longrightarrow U$.

1. Définition : Soit $y_1, y_2 : J_1, J_2 \longrightarrow \mathbb{R}^N$ solutions de $y' = f(t, y)$, alors on dit que y_2 est un prolongement de y_1 si $J_1 \subset J_2$ et $y_2 = y_1$ sur J_1
2. Exemple : Si $y_2(t) = e^t$ sur $]1, 3[$ alors y_2 est solution de $y' = y$ qui prolonge $y_1 :]1, 2[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pareil
3. Définition : On dit que (y, J) est une solution maximale (respectivement globale) si elle n'admet pas de prolongements stricts (respectivment $J = I$)
4. Proposition : Une solution globale est maximale
5. Remarque : La réciproque est fausse, $y(t) = \frac{y_0}{1-y_0 t}$ est solution maximale de $y' = y^2$ sur $\left]-\infty, \frac{1}{y_0}\right[$ mais elle ne peut pas être définie sur $\mathbb{R}$
6. Théorème de Cauchy-Lipschitz (admis) : Si f continue localement lipschizienne par rapport à la variable d'état alors il existe une unique solution maximale de $y' = f(t, y)$
7. Corollaire : Dans ce cas, si y_1 et y_2 deux solutions sur I qui coïncident en un point alors $y_1 = y_2$
8. Théorème de sortie de tout compact : Dans ce cas, si $I =]a, b[$, soit $y :]c, d[\longrightarrow \mathbb{R}^N$ solution maximale de $y' = f(t, y)$, si $d < b$ alors y sort de tout compact de U
9. Corollaire : Théorème des bouts : Dans ce cas, si $d < b$ alors $\|y(t)\| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
10. Corollaire : Si de plus f bornée alors les solutions sont globales

3 Aspect analytique

3.1 Prolongements de séries entières sur le cercle d'incertitude

(Chapitre 5.1 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)
On considère $\sum a_n z^n$ une série entière.

1. Définition : La rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est R la borne supérieure des $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée
2. Exemple : $R\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right) = +\infty$
3. Lemme d'Abel : Si $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $z \in B(0, |z_0|)$ alors $\sum a_n z^n$ converge absolument
4. Théorème : Si $z \in B(0, R)$ alors $\sum a_n z^n$ converge absolument
5. Remarque : Le cercle $C(0, R)$ est appelé le cercle d'incertitude car tout peut s'y passer
6. Exemple : $\sum z^n$ diverge en tout point du disque, $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge en tout point du disque, $\sum \frac{z^n}{n}$ diverge en 1 mais converge en tout autre point du disque
7. Théorème d'Abel angulaire : Si $R = 1$ et $\sum a_n$ converge, soit $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, Δ_{θ_0} défini en annexe, alors $S(z) \underset{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}}{\longrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ (Exercice 4.10 d'Analyse de Xavier Gourdon)
8. Remarque : La réciproque est fausse : $\sum(-1)^n$ diverge mais $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n \underset{\substack{z\to+\infty\\ |z|<1}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$
9. Théorème taubérien faible : Si $R = 1$, il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) \underset{\substack{z\to+\infty\\ |z|<1}}{\longrightarrow} S$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $\sum a_n$ converge et $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ (Exercice 4.11 d'Analyse de Xavier Gourdon)

3.2 Prolongements holomorphes de fonctions spéciales

(Chapitres 3.4.1 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron, II.I.2, II.III.1, IX.II.1 d'Analyse de Queffélec et Zuily)

1. Théorème : Si Ω ouvert connexe et $f \in H(\Omega)$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z_0) = 0$ alors $f = 0$
2. Remarque : Faux si seulement $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, par exemple $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$
3. Corollaire : Principe du prolongement analytique : Si Ω connexe et $(f, g) \in H(\Omega)^2$ coïncidant sur un ouvert non vide $V \subset \Omega$ alors $f = g$
4. Corollaire : $H(\Omega)$ est un anneau intègre
5. Définition : Fonction $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$
6. Proposition : ζ se prrolonge de façon holomorphe sur $\mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R}$
7. Théorème : ζ se prolonge de façon holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$
8. Définition : Fonction $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

9. Théorème : Γ se prolonge une fonction holomorphe sur $\mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R}$
10. Proposition : Soit $z \in \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R}$, alors $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
11. Théorème : Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$ et les $-n$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont des pôles simples de ce prolongement

4 Aspect linéaire

4.1 Prolongement de formes linéaires

(Chapitres VI.1 et VI.2 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
On considère E espace vectoriel normé.

1. Définition : On dit que $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une semi norme si $\forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}_+, p(\lambda x) \leq \lambda p(x), p(x+y) \leq p(x) + p(y)$
2. Théorème de Hahn-Banach (version analytique réelle) (admis) : Soit G sous-espace vectoriel de E et $\varphi_0 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ forme linéaire telle que $|\varphi_0(x)| \leq p(x)$ alors il existe une forme linéaire $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ prolongeant φ_0 tel que $|\varphi| \leq p(x)$
3. Lemme : Si $v : E \longrightarrow \mathbb{C}$ linéaire alors $Re(v), Im(v) : E_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont linéaires et inversement si $u : E_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire alors $v(x) = u(x) - iu(ix)$ est une forme linéaire sur E
4. Théorème de Hahn-Banach (version analytique complexe) : Soit G sous-espace vectoriel de E et $\varphi_0 : E \longrightarrow \mathbb{C}$ forme linéaire telle que $|\varphi_0(x)| \leq p(x)$ alors il existe une forme linéaire $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ prolongeant φ_0 tel que $|\varphi| \leq p(x)$
5. Théorème : Soit $\varphi_0 \in G'$ avec G sous-espace vectoriel de E alors φ_0 se prolonge en $\varphi \in E'$ avec $\|\varphi_0\| = \|\varphi\|$
6. Corollaire : Si $x \in E\backslash\{0\}$ alors il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(x) = \|x\|$

4.2 Prolongement de caractères linéaires

(Chapitres I.1.1 et I.2.1 de L'algèbre discrète de la transformée de Fourier de Gabriel Peyré et 1.2.5 des Eléments d'analyse et d'algèbre de Pierre Colmez)
On considère G un groupe abélien fini.

1. Définition : On appelle caractère χ de G tout morphisme de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$, et on note $\hat{G}$ l'ensemble des caractères de G
2. Proposition : Si $|G| = n$ et $\chi \in \hat{G}$ alors χ est à valeurs dans $\mathbb{U}_n$
3. Théorème de prolongement de caractères : Soit H sous-groupe de G et χ caractère de H, alors χ peut être prolongé en un caractère de G
4. Lemme : On a la suite exacte $\{1\} \longrightarrow \widehat{G/H} \longrightarrow \hat{G} \longrightarrow \hat{H} \longrightarrow \{1\}$
5. Corollaire : $\hat{G}$ et G ont le même ordre
6. Définition : On appelle exposant $N(G)$ le plus petit multiple commun des ordre des $g \in G$

7. Proposition : G et $\hat{G}$ ont le même exposant
8. Proposition : Il existe $g \in G$ tel que $o(G) = N(G)$
9. Théorème de structure des groupes abéliens : Il existe $n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_k \mid n_{k+1}$ et $G \sim \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$