Leçon 209 Approximation d'une fonction par des fonctions régulières, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi
2. Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li
3. Analyse de Queffélec et Zuily
4. Objectif agrégation
5. Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly
6. Théorie de l'intégration de Briane et Pagès

Développements.

1. Théorème de Weierstrass par les polynomes de Bernstein
2. Théorème de convergence de Féjer

Table des matières

1 Approximation par des fonctions polynomiales

1.1 Approximation locale et formules de Taylor

(Chapitres 10.1, 10.2, 10.3, 10.4 et 11.1 d'Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Théorème de Taylor-Lagrange : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$
2. Corollaire : Inégalité de Taylor-Lagrange : Soit $f : [a,b] \longrightarrow E$ de classe C^n, $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$ et $f^{(n+1)}$ majorée par $M \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\left\| f(b) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\| \leq \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$
3. Théorème de Taylor avec reste intégral : Soit $f : [a,b] \longrightarrow E$ de classe C^{n+1} avec E de Banach, alors $f(b) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1}(t)}{n!}(b-t)^n dt$
4. Théorème de Taylor-Young : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivable en $a \in \overset{\circ}{I}$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$
5. Application : $e^x \underset{x\to 0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$, $cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$, $sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$, $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$

1.2 Densité dans les fonctions continues

(Chapitre II.4.1 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : Soit K compact et A sous–algèbre de l'algèbre de Banach $C(K,\mathbb{R})$, alors on dit que A sépare les points de K si $\forall (x,y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \exists f \in A, f(x) \neq f(y)$
2. Théorème de Stone-Weierstrass (cas réel) (admis) : Soit K compact et A sous-algèbre de l'algébre de Banach $C(K,\mathbb{R})$ tel que A contienne les constantes et sépare les points de K, alors A est dense dans $C(K,\mathbb{R})$ pour la norme uniforme
3. Remarque : A contient les constantes si et seulement si $1 \in A$
4. Corollaire : Soit K compact de $\mathbb{R}^d$ alors l'algèbre des fonctions polynomiales sur K à d variables est dense dans $C(K,\mathbb{R})$
5. Remarque : On retrouve le théorème de Weierstrass qui peut se démontrer par le théorème de Bernstein
6. Théorème de Weierstrass : Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ alors l'espace des fonctions polynomiales sur $[a,b]$ est dense dans $C([a,b],\mathbb{R})$ pour la norme infini
7. Théorème de Bernstein : Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, ω son module de continuité, $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \in \mathbb{C}[X]$, alors$B_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{CVU}} f$, $\|f - B_n\|_\infty \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et l'inégalité est optimale (Chapitre XIII.II.1.c d'Analyse de Queffélec et Zuily)

8. Application : si $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(t)t^n dt = 0$ alors $f = 0$
9. Théorème de Stone-Weierstrass (cas complexe) : Soit K compact et A sous-algèbre de $C(K,\mathbb{C})$ tel que A contienne les constantes, sépare les points de K et soit stable par conjugaison complexe, alors A est dense dans $C(K,\mathbb{C})$
10. Exemple : L'ensemble des fonctions polynômiales sur K à coefficients complexes en les variables z et $\overline{z}$ est dense dans $C(K,\mathbb{C})$

1.3 Densité dans $L^2(I,\rho)$ et polynômes orthogonaux

(Chapitres 3.1.5 d'Objectif agrégation et II.5 d'Analyse numérique et équations différentielles de Florent Berthelin)

1. Définition : Soit $\rho : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurable, alors on dit que ρ est une fonction poids si $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x)dx < +\infty$
2. Exemple : $\rho(x) = e^{-x^2}$ est une fonction poids
3. Proposition : $L^2(I,\rho) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{C}, \int_I |f(x)|^2\rho(x)dx < +\infty\}$ est un espace de Hilbert pour $\langle f,g\rangle = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$
4. Théorème : Il existe une unique suite de polynômes unitaires $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de degrés respectifs n, deux à deux orthogonaux, appelés polynômes orthogonaux pour ρ
5. Remarque : Ils s'obtiennent par procédé d'othogonalisation de Gram-Schmidt de la famille libre $(1, x, ...x^n, ...)$
6. Exemple : Si $I = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \rho(x) = e^{-x^2}$ alors il s'agit des polynômes de Hermite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, x, x^2 - \frac{1}{2}, x^3 - \frac{3}{2}x, ...\right), H_n = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d(e^{-\frac{x^2}{2}})}{dx}$
7. Lemme : Soit $f \in L^2(I,\rho)$, alors il existe un unique polynôme $r_n \in \mathcal{P}_n$, appelé polynôme de meilleur approximation quadratique de f à l'ordre n, tel que $\|f - r_n\| = d(f,\mathcal{P}_n)$ et r_n
8. Théorème : Si I est borné et $f \in L^2(I,\rho)$ alors $\|f - r_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
9. Application : Si les P_n sont connus alors on peut calculer les p_n grâce aux $\langle f, P_n\rangle$
10. Théorème : S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$ alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$
11. Corollaire : Les polynômes de Hermite forment une base hilbertienne de $L^2(I, e^{-x^2})$

2 Approximation des fonctions périodiques par des polynômes trigonométriques

2.1 Polynômes trigonométriques et coefficients de Fourier

(Chapitres IV.I et IV.IV.2 d'Analyse de Queffélec et Zuily)

1. Définitions : On note $C_{2\pi}$ l'espace des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$,$L^p_{2\pi}$ l'espace des fonctions mesurables 2π-périodiques telles que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt < +\infty$, $\mathcal{P}$ le sous-espace de $C_{2\pi}$ engendré par les $e_n(t) = e^{int}$ et $c_0 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$

2. Remarque : $C_{2\pi} \subset L^p_{2\pi}$
3. Définition : Soit $f \in L^1_{2\pi}$, alors $c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$
4. Remarque : Soit $f \in L^2_{2\pi}$ alors $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$
5. Lemme : Soit $f \in L^p_{2\pi}$ et $\forall a \in \mathbb{R}, \tau_a(f) := f \circ (\cdot + a)$, alors $\|\tau_a(f) - f\|_p \underset{a\to 0}{\longrightarrow} 0$
6. Proposition : Soit $f \in L^2_{2\pi}, a \in \mathbb{R}, (k,n) \in \mathbb{Z}^2$, alors :
   — $c_n(f \circ (-id_{\mathbb{R}})) = c_{-n}(f)$
   — $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$
   — $c_n(\tau_a(f)) = e^{ina}c_n(f)$
   — $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)$
   — $f * e_n = c_n(f)e_n$
   — Si $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et C^1 par morceaux alors $c_n(f') = inc_n(f)$
7. Proposition : Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tel que $\left(\sum\limits_{n=-N}^{N}\alpha_n e_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors $f \in C_{2\pi}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = c_n(f)$
8. Lemme de Riemann-Lebesgue : Soit $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors $c_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
9. Exemple : Soit $\varepsilon \in]0,\pi[$ et $\sigma_\varepsilon \in L^\infty_{2\pi}$ tel que $\sigma_\varepsilon(t) = 1$ sur $[-\varepsilon,\varepsilon]$ et $\sigma_\varepsilon(t) = 0$ sur $[-\pi,\pi]\backslash[-\varepsilon,\varepsilon]$, alors $c_n(f_\varepsilon) = \frac{sin(n\varepsilon)}{n\pi}$ si $n \neq 0$ et $c_0(\sigma_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi}$, donc $S_N(\sigma_\varepsilon,t) = \frac{\varepsilon}{\pi} + 2\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{sin(n\pi\varepsilon}{n\pi}cos(nt)$

2.2 Introduction de noyaux pour approcher les fonctions

(Chapitre IV.II d'Analyse de Queffélec et Zuily)

1. Définition : Soit $N \in \mathbb{N}$, alors le noyau de Dirichlet est $D_N = \sum\limits_{n=-N}^{N} e_n$
2. Proposition : D_N est pair, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t)dt = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, D_N(x) = \frac{sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$
3. Proposition : Soit $N \in \mathbb{N}$ et $f \in L^1_{2\pi}$, alors $S_N(f) = f * D_N$
4. Définition : Soit $N \in \mathbb{N}^*$, alors le noyau de Féjer est $K_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} D_n$
5. Remarque : $(K_N)_{N\in\mathbb{N})*}$ est la suite des moyennes de Cesàro de $(D_N)_{N\in\mathbb{N}}$
6. Proposition : Soit $N \in \mathbb{N}^*$, alors $K_N = \sum\limits_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right)e_n, \forall x \in \mathbb{R}, K_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 \geq 0$ et $\forall \delta \in]0,\pi], \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|x|\leq\pi} K_N(x)dx \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
7. Définition : Soit $f \in L^1_{2\pi}$, alors la somme de Féjer de f est $\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} S_n(f)$
8. Remarque : $(\sigma_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des moyennes de Cesàro de $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$
9. Proposition : Soit $f \in L^1_{2\pi}$, alors $\sigma_N(f) = f * K_N = \sum\limits_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right)c_n(f)e_n$

2.3 Résultats de convergence

(Chapitres IV.III et IV.IV.2 d'Analyse de Queffélec et Zuily)

1. Théorème de convergence de Féjer :
   — Soit $f \in C_{2\pi}$, alors $\forall N \in \mathbb{N}^*, \|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\sigma_N(f) \underset{N\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$
   — Soit $f \in L^p_{2\pi}$, alors $\forall N \in \mathbb{N}^*, \|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\sigma_N(f) \underset{N\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_p}{\longrightarrow}} f$
2. Corollaire : $\mathcal{P}$ dense dans $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$
3. Corollaire : Soit $f \in C_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $S_N(f)(x_0) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{C}$, alors $f(x_0) = l$
4. Corollaire : Soit $f \in C_{2\pi}$ tel que $S_N(f) \underset{N\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$, alors $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n := \underset{N\to+\infty}{lim} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$
5. Corollaire : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de $L^2_{2\pi}$, en particulier pour $f \in L^2_{2\pi}$, $\sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2$ et $S_N(f) \underset{N\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_2}{\longrightarrow}} f$
6. Proposition : Soit $f \in C_{2\pi}$ de classe C^1 par morceaux, alors $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge normalement vers f et $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$
7. Théorème de Dirichlet : Soit $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
   — $f(x_0+t) \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\longrightarrow} f^+(x_0) \in \mathbb{C}, f(x_0+t) \underset{\substack{t\to 0\\ t<0}}{\longrightarrow} f^-(x_0) \in \mathbb{C}$
   — $\int_0^\delta \left|\frac{f(x_0+t)-f^+(x_0)}{t}\right| dt < +\infty, \int_0^\delta \left|\frac{f(x_0-t)-f^-(x_0)}{t}\right| dt < +\infty$
   Alors $S_N(f)(x_0) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f^+(x_0)+f^-(x_0)}{2}$
8. Remarque : En pratique on a souvent :
   — $f(x_0+t) \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\longrightarrow} f^+(x_0) \in \mathbb{C}, f(x_0+t) \underset{\substack{t\to 0\\ t<0}}{\longrightarrow} f^-(x_0) \in \mathbb{C}$
   — $\underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{lim} \frac{f(x_0+t)-f^+(x_0)}{t} \in \mathbb{C}, \underset{\substack{t\to 0\\ t<0}}{lim} \frac{f(x_0-t)-f^-(x_0)}{t} \in \mathbb{C}$
9. Remarque : La continuité de f ne suffit pas pour que f coïncide avec sa série de Fourier, le théorme de Banach-Steinhaus permet d'établir l'existence d'un contre-exemple
10. Exemple : $S_N(\sigma_\varepsilon, \varepsilon) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, ainsi pour $a = \frac{\varepsilon}{2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sin(na)}{n} = \frac{\pi-a}{2}$

3 Approximation par des fonctions régulières

3.1 Approximation de l'unité

(Chapitre IV.14.4 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

1. Remarque : Il n'existe pas d'unité pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$
2. Définition : Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (L^1(\mathbb{R}^d))^{\mathbb{N}}$, alors on dit que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si :

— $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(x)dx = 1$
— $\underset{n\in\mathbb{N}}{sup} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n(x)|dx < +\infty$
— $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \int_{|x|>\varepsilon} |\alpha_n(x)|dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

3. Exemple : Soit $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha(x)dx = 1$, alors $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \big(n^d(\alpha \circ nid_{\mathbb{R}^d})\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité
4. Théorème : Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ app roximation de l'unité, $p \in [1, +\infty|$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f * \alpha_n \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $f * \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_p}{\longrightarrow}} f$
5. Théorème : Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ approximation de l'unité et $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors :
   — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f*\alpha_n$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et bornée par $\|f\|_\infty \|\alpha_n\|_1$
   — Si f est uniformément continue sur B alors $f * \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU(B)}{\longrightarrow}} f$
6. Corollaire : Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors :
   — Si f continue en $x_0 \in \mathbb{R}^d$ alors $f * \alpha_n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$
   — Si f uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ alors $f * \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$
   — Si f continue sur $K \subset \mathbb{R}^d$ compact alors $f * \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU(K)}{\longrightarrow}} f$

3.2 Régularisation par convolution

(Chapitre IV.14.5 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

1. Théorème : Soit $\varphi \in C_c^n(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f*\varphi \in C^n(\mathbb{R}^d)$ et $\forall i \in [\![1, d]\!]$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(f * \varphi) = f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$
2. Définition : Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (L^1(\mathbb{R}^d))^{\mathbb{N}}$, alors on dit que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité et $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$
3. Exemple : $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $\alpha = \frac{\varphi}{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = n^d(\alpha \circ nid_{\mathbb{R}^d})$ et $\forall x \in \mathbb{R}^d, \varphi(x) = e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} \mathbb{1}_{B(0,1)}(x)$
4. Théorème : $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $C_c(\mathbb{R}^d)$ pour la norme infini
5. Théorème : $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|\cdot\|_p$

3.3 Applications multiples

(Chapitre III.1.5 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Proposition : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^d$ et K compact de U alors il existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\varphi = 1$ sur un voisinage de K dans U
2. Corollaire : Soit K compact de $\mathbb{R}^d$ tel que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ avec $U_1, ..., U_n$ ouverts de $\mathbb{R}^n$, alors il existe $\varphi_1, ..., \varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $Supp(\varphi_k) \subset U_k$, $\sum_{k=1}^{n}\varphi_k \leq 1$ et $\forall x \in K$, $\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x) = 1$

3. Théorème : Soit U ouvert de $\mathbb{R}$, alors $f \in L^1_{loc}(U) \longmapsto \left[\varphi \in C_c^\infty(U) \longmapsto \int_U f(x)\varphi(x)dx\right] \in \mathcal{D}'(U)$ est une application linéaire injective (Chapitre X.2.1 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
4. Théorème : La transformation de Fourier de L^1 dans C_0 est continue de norme 1 (Chapitre III.2.1 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)