Leçon 213 Espaces de Hilbert, bases hilbertiennes, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li
2. Analyse de Queffélec et Zuily
3. Objectif agrégation
4. Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly

Développements.

1. Théorème de projection sur un convexe fermé non vide
2. Théorème de convergence de Féjer

Table des matières

1 Du préhilbertien à l'hilbertien

1.1 Espace vectoriel muni d'un produit scalaire

(Chapitre II.1 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
On considère H un espace vectoriel réel ou complexe.

1. Définition : Un produit scalaire sur H est une forme bilinéaire symétrique (respectivement hermitienne) définie positive dans le cas réel (respectivement complexe), dans ce cas on dit que H est préhilbertien
2. Exemple : $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$
3. Remarque : Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur H, alors $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ définit une norme sur H
4. Proposition : Soit $(x, y) \in H^2$, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$ dans le cas réel et $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re(\langle x, y\rangle)$ dans le cas complexe
5. Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz : Soit $(x, y) \in H^2$, alors $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont linéairement liés
6. Corollaire : Soit $y \in H$, alors $\phi_y : x \in H \longmapsto \langle x, y\rangle$ est une forme linéaire continue de norme $\|\phi_y\| = \|y\|$
7. Définition : Soit $(x, y) \in H^2$, alors on dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$, ce qu'on note $x \perp y$
8. Théorème : Soit $(x, y) \in H^2$, alors $x \perp y \Longleftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (dans le cas réel)
9. Définition : Soit $A \subset H$, alors l'othogonal de A est $A^\perp := \{y \in H, \forall x \in A, x \perp y\rangle\}$
10. Proposition : Soit $A \subset H$, alors $A^\perp$ est la plus grande partie orthogonale à A et est un sous-espace vectoriel fermé de H
11. Définition : Si H est complet alors on dit que H est de Hilbert
12. Exemple : Si H est de dimension finie alors H est de Hilbert, $L^2(\mathbb{R})$ est de Hilbert

1.2 Existence d'un projeté orthogonal

(Chapitres II.2.1 et II.2.2 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
On considère H un espace de Hilbert.

1. Théorème de projection sur un convexe fermé non vide : Soit C convexe fermé non vide de H, alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $p_C(x) \in C$ (appelé projeté de x sur C) tel que $\|x - y\| = d(x, C)$, de plus on a la caractérisation, pour $y \in H$, $y = p_C(x)$ si et seulement si $y \in C$ et $\forall z \in C, Re(\langle x - y, z - y\rangle) \leq 0$
2. Corollaire : Soit C convexe fermé non vide de H, alors l'application $p_C : H \longrightarrow C$ est 1-lipschitzienne, donc continue
3. Théorème : Soit F sous-espace vectoriel fermé de H, alors $p_F : H \longrightarrow F$ est linéaire continue et pour $x \in H$, on a la caractérisation, pour $y \in H$, $y = p_F(x)$ si et seulement si $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$

4. Corollaire : Soit F sous-espace vectoriel de H, alors F est dense dans H si et seulement $F^{\perp} = \{0\}$
5. Application : Les fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$ sont denses dans $L^2(\mathbb{R})$

1.3 Conséquences sur le dual et l'existence d'un adjoint

(Chapitre II.2.3 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : H^* est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur H
2. Théorème de représentation de Riesz : Soit $\phi \in H^*$, alors il existe un unique $y \in H$ tel que $\forall x \in H, \phi(x) = \langle x, y \rangle$
3. Corollaire : Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, alors il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\forall (x, y) \in H^2, \langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(x) \rangle$
4. Application : Théorème de Lax-Milgram : Si H espace Hilbertien réel, soit a forme bilinéaire symétrique continue et coercive sur H et $\phi \in H^*$, alors il existe un unique $x \in H$ tel que $\forall y \in H, a(x, y) = \phi(y)$, de plus x est caractérisé par $\frac{1}{2}a(x, x) - \phi(x) = min \left(\frac{1}{2}a(y, y) - \phi(y), y \in H \right)$ (Application 3.33 d'Objectif agrégation)
5. Définition : Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, alors on dit que que T est auto-adjoint si $T^* = T$
6. Exemple : La transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ est un opérateur auto-adjoint de $L^2(\mathbb{R})$

2 Bases hilbertiennes

2.1 Familles orthonormales et série de vecteurs convergentes

(Chapitre II.3.2 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : Soit $(u_i)_{i \in I} \in H^I$, alors on dit que $(u_i)_{i \in I}$ est une famille orthonormée si $\forall i \in I, \|u_i\| = 1$ et $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow u_i \perp u_j$
2. Exemple : Dans $L^2_{2\pi}$, la famille $(e^{inid_{\mathbb{R}}})_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$
3. Proposition : Soit $(u_1, ..., u_n)$ famille orthonormée de H et $(a_1, ..., a_n) \in K^n$, alors $\left\| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k u_k \right\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2$
4. Corollaire : Toute famille orthonormée est libre
5. Proposition : Inégalité de Bessel : Soit $(u_i)_{i \in I}$ famille orthonormée de H et $x \in H$, alors $\sum\limits_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$
6. Proposition : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ famille orthonormale de H et $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \langle x, u_n \rangle$

7. Application : Formule du projeté sur un sous-espace vectoriel de dimension finie : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille orthonormale de H, $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$ et $F_n = Vect(u_0, ..., u_n)$, alors $p_{F_n}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k u_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \langle x, u_k\rangle u_k$
8. Théorème : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille orthonormée de H et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$ converge dans H
9. Remarque : Autrement dit $S : x \in H \longmapsto (\langle x, u_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ est surjective

2.2 Existence de bases orthonormées

(Chapitres II.3.3 et II.3.4 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$, alors on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale et totale (ie $Vect(u_n, n \in \mathbb{N})$ est dense dans H)
2. Remarque : Une base hilbertienne n'est pas en général une base algébrique, ie tout vecteur ne s'écrit pas comme combinaison linéaire finie de vecteurs de la base
3. Théorème : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne de H et $x \in H$, alors $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \langle x, u_n\rangle u_n$
4. Corollaire : Formule de Parseval : Dans ce cas $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |\langle x, u_n\rangle|^2$
5. Corollaire : Dans ce cas $S : x \in H \longmapsto (\langle x, u_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est un isomorphisme conservant le produit scalaire
6. Théorème : Si H séparable alors H possède une base hilbertienne
7. Corollaire : Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie est isomorphe à l^2

2.3 Application à la convergence faible

(Chapitre VIII.1.2 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
On considère $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne de H de Hilbert séparable.

1. Définition : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ et $x \in H$, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{faible}{\longrightarrow}} x$ si $\forall \varphi \in H^*, \varphi(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$
2. Théorème : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ et $x \in H$, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{faible}{\longrightarrow}} x$ si et seulement si $\forall y \in H, \langle x_n, y\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle x, y\rangle$
3. Corollaire : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ et $x \in H$ tels que $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{faible}{\longrightarrow}} x$ et $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|x\|$, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} xx$
4. Remarque : Cette propriété est vraie dans les espaces L^p, pour $p \in]1, +\infty[$ mais plus difficile, cependant ce résultat est faux dans $C([0,1])$
5. Exemple : Soit $f_n \in C([0,1])$ tel que $f_n = 1$ sur $\left[0, \frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{3}{n}, 1\right]$, $f_n\left(\frac{2}{n}\right) = 0$ et f_n affine sur $\left[\frac{1}{n}\right]$ et sur $\left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right]$, alors $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{faible}{\longrightarrow}} 1$, $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ mais $\|f_n - 1\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

3 Etupe de l'espace L^2

3.1 Avec les séries de Fourier dans $L^2_{2\pi}$

(Chapitres IV.I.2, IV.I.3, IV.III.1 et IV.III.2 d'Analye de Queffélec et Zuily et II.4.2 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors $e_n := e^{inid_\mathbb{R}} \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ et, pour $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$
2. Remarque : Pour $N \in \mathbb{N}$, on note $D_N := \sum\limits_{k=-N}^{N} e_n$
3. Exemple : Soit $\varepsilon \in]0, \pi[$ et $\sigma_\varepsilon \in L^\infty_{2\pi}$ tel que $\sigma_\varepsilon(t) = 1$ sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ et $\sigma_\varepsilon(t) = 0$ sur $[-\pi, \pi] \backslash [-\varepsilon, \varepsilon]$, alors $c_n(f_\varepsilon) = \frac{sin(n\varepsilon)}{n\pi}$ si $n \neq 0$ et $c_0(\sigma_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi}$, donc $S_N(\sigma_\varepsilon, t) = \frac{\varepsilon}{\pi} + 2\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{sin(n\pi\varepsilon}{n\pi} cos(nt)$
4. Théorème de convergence de Féjer (dans le cas $C_{2\pi}$) : Soit $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, alors $\sigma_N(f) := f * \frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} D_k \underset{N \to +\infty}{\overset{\infty}{\longrightarrow}} f$
5. Théorème de convergence de Féjer (dans le cas $L^2_{2\pi}$) : Soit $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, alors $\sigma_N(f) \underset{N \to +\infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} f$
6. Corollaire : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$
7. Application : Les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$
8. Application : Soit $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, alors $\|f\|_2^2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$
9. Exemple : Avec $f(t) = t$ sur $[0, 1]$ et $f \in L^2_1(\mathbb{R})$, on obtient $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

3.2 Avec les polynômes orthogonaux dans $L^2(I, \rho)$

(Chapitres 3.1.5 d'Objectif agrégation et II.5 d'Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly)

On considère I intervalle réel.

1. Définition : Soit $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$, alors on dit que ρ est une fonction poids si ρ est mesurable strictement positive et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)dx < +\infty$
2. Proposition : $L^2(I, \rho)$ muni du produit scalaire usuel est un espace de Hilbert
3. Théorème : Il existe une unique famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unitaires orthogonale deux à deux tels que $deg(P_n) = n$
4. Remarque : On appelle ces polynômes les polynômes orthogonaux et elles s'obtiennent par procédé d'orthogonalisation de Graam-Schmidt à $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$
5. Exemple : Si $\rho = e^{-id^2_\mathbb{R}}$ alors les polynômes obtenus sont les polynômes de Hermite
6. Corollaire : Soit $f \in L^2(I, \rho)$ et $n \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique polynôme P_n de degré n tel que $d_2(f, \mathcal{P}_n) = \|f - P_n\|_2$

7. Théorème : S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$, alors mes polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$
8. Application : Les fonctions de Hermite $h_n(x) = (2^n\sqrt{\pi}n!)^{-\frac{1}{2}}H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ constituées de vecteurs propres de $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$: $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{F}(h_n) = (-i)^n h_n$ (Exercice III.3.2.29 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

4 Etude de l'espace $H^1(I)$

4.1 Dérivation faible et définition de $H^1(I)$

(Chapitre IX.2 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
On considère $I =]a,b[\subset \mathbb{R}$ avec $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $a < b$.

1. Définition : Soit $u \in L^2(I)$, alors on dit que u admet une dérivée faible s'il existe $v \in L^2(I)$ tel que $\forall \varphi \in C_c^1(I), \int_I u(t)\varphi'(t)dt = -\int_I v(t)\varphi(t)$
2. Remarque : Il s'agit de généraliser la formule d'intégration par parties
3. Exemple : Soit $u : x \in]-1,1[\longmapsto x\mathbb{1}_{[0,1[}(x)$, alors $u' = \mathbb{1}_{[0,1[}(x)$
4. Lemme : Soit $(v_1,v_2) \in L^1_{loc}(I)^2$ tel que $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}), \int_I v_1(t)\varphi(t)dt = \int_I v_2(t)\varphi(t)dt$, alors $v_1 = v_2$ presque partout
5. Proposition : Soit $u \in L^2(I)$ admettant une dérivée faible, alors la dérivée faible est unique et on la note $u' \in L^2(I)$
6. Définition : $H^1(I)$ est l'espace vectoriel des $u \in L^2(I)$ admettant des dérivées faibles $u' \in L^2(I)$
7. Proposition : $H^1(I)$ est un espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire $\langle, u, v\rangle = \langle u,v\rangle_2 + \langle u',v'\rangle_2$
8. Théorème d'immersion : Soit $u \in H^1(I)$, alors il existe une unique fonction $\tilde{u} \in C(\overline{I})$ tel que $u_{|I}$ soit un représentant de u, de plus $\forall (x,y) \in I^2, \tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) = \int_x^y u'(t)$

4.2 Sous-espace H_0^1 et équations différentielles

(Chapitre IX.3 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
On se limite à $I =]0,1[$.

1. Définition : $H_0^1 = \{u \in H^1, u(0) = u(1) = 0\}$
2. Proposition : Soit $u \in H_0^1$, alors $\|u\| \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\,\|u'\|_2$
3. Corollaire : $u \longmapsto \|u'\|_2$ définit une norme équivalente de $\|\cdot\|$ sur H_0^1
4. Lemme : Soit $f \in L^2(0,1)$, alors il existe un unique $u \in H_0^1$ tel que $\forall v \in H_0^1, \int_0^1 (u_0(x)v(x) + u_0'(x)v'(x))dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$ (Exercice IX.6 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
5. Application : Problème de Dirichlet : Soit $f \in C([0,1])$, alors le u_0 précédent vérifie le problème $-u'' + u = f, u(0) = u(1) = 0$ (Exercice IX.6 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)