Leçon 214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites, exemples et applications en analyse et en géométrie

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Calcul différentiel de Mohammed El Amrani
2. Equations différentielles de Florent Berthelin
3. Les contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne
4. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière

Développements.

1. Résolution d'une équation aux dérivées partielles par changement de coordonnées
2. Lemme de Morse

Table des matières

1 Théorème des fonctions implicites

1.1 Par le théorème de point fixe de Picard

(Chapitre 6.1 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)

1. Théorème du point fixe de Picard : Soit F fermé d'un espace vectoriel E de dimension finie et $\phi : F \longrightarrow F$ contractante alors ϕ admet un unique point fixe
2. Exemple : Si $\phi = \frac{1}{2}arcsh$ sur $[-1,1]$ alors ϕ est contractante, donc ϕ admet un unique point fixe qui est 0
3. Corollaire : Théorème du point fixe à paramètre : Soit E et E' espaces vectoriels de dimension finie, $A \subset E$, F fermé de E' et $\phi : A \times F \longrightarrow F$ continue en la première variable et contractante par rapport à la seconde uniformément en la première alors $\forall \lambda \in A, \exists! y_\lambda \in F, \phi(\lambda, y_\lambda) = y_\lambda$ et $\lambda \in A \longmapsto y_\lambda \in F$ est continue
4. Remarque : Ces deux théorèmes sont vrais tout espace de Banach et même sur tout espace métrique complet
5. Application : Théorème de Cauchy-Lipschitz globalement lipschitzien : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et I intervalle réel, $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue et globalement lipschitzien par rapport à la variable d'état alors il existe une unique solution globale de $y' = f(t,y), y(t_0) = t_0$
6. Exemple : L'équation sur $\mathbb{R}$ $y'' - 2y' + y = e^t, y(-1) = 0, y'(-1) = 1$ admet une unique solution globale donnée par $y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + t(e+1) + e + \frac{1}{2}\right) e^t$

1.2 Approche d'une "courbe" par le graphe d'une fonction

(Chapitre 6.2 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)
On considère E, F des espaces vectoriels normés de dimension finie.

1. Remarque : Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, alors au voisinage $(a,b) \neq (0,-1),(0,1)$, $f(x,\varphi(x)) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$ mais pas au voisinage de $(0,-1)$ et $(0,1)$
2. Théorème des fonctions implicites : Soit Ω ouvert de $E \times F$ et $f : \Omega \longrightarrow F$ de classe C^1 tel qu'il existe $(x_0,y_0) \in \Omega$ tel que $f(x_0,y_0) = 0$ et $d(f(x_0,.))(y_0) \in GL(F)$ alors il existe $U \in \mathcal{V}(x_0), V \in \mathcal{V}(y_0)$ et $\varphi : U \longrightarrow V$ de classe C^1 tel que $[(x,y) \in U \times V, f(x,y) = 0] \Longleftrightarrow [x \in U, y = \varphi(x)]$
3. Corollaire : Dans ce cas, $d\varphi(x) = -(d(f(x,.))(\varphi(x)))^{-1} \circ d(f(.,\varphi(x)))(x)$
4. Exemple : Dans le cas du cercle, $d(f(x_0,\cdot))(y_0)(h) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h = 2y_0h$, d'où $d(f(x_0,\cdot))(y_0)$ est un isomorphisme si et seulement si $y_0 \neq 0$
5. Définition : Dans ce cas, φ est appelée la fonction implicite de f au voisinage de (x_0,y_0)
6. Remarque : Si de plus f est de classe C^k alors il existe φ de classe C^k
7. Théorème : Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tel qu'il existe $(a_1,...,a_n,b) \in \Omega$ tel que $f(a_1,...,a_n,b) = 0$ et $\frac{\partial y}{\partial f}(a_1,...,a_n,b) \neq 0$, alors il existe $U \in \mathcal{V}(x_0), V \in \mathcal{V}(y_0)$ et $\varphi : U \longrightarrow V$ de classe C^1 tel que $[(x,y) \in U \times V, f(x,y) = 0] \Longleftrightarrow [x \in U, y = \varphi(x)]$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1,...,x_n) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$

8. Exemple : Si $E = F = \mathbb{R}$ alors $f(x, y) = 0$ est l'équation implicite d'une courbe, cela peut s'écrire $y = \varphi(x)$ au voisinage d'un point (a, b) tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$
9. Remarque : $d(f(x_0, .))(y_0) \in GL(F)$ est une condition suffisante mais non nécessaire
10. Exemple : $f(x, y) = x - y^3$ avec $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$ non C^1 en 0
11. Remarque : Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ alors la condition revient à dire que la tangente n'est pas verticale

2 Théorèmes importants qui en découlent

2.1 Théorèmes d'extrema sous contraintes

(Chapitre 6.3 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)

1. Théorème des multiplicateurs de Lagrange (une seule contrainte) : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ tels que $f_{|\Gamma}$ admette un extremum local en $a \in \Gamma$ tel que $\nabla g(a) \neq 0$, alors il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla(f + \lambda g)(a) = 0$
2. Définition : λ est appelé multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $g = 0$
3. Exemple : Le minimum et le maximum de $f(x, y) = x + y$ restreinte à $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^4 + y^4 = 1\}$ sont atteints en $(-2^{-\frac{1}{4}}, -2^{-\frac{1}{4}})$ et $(2^{-\frac{1}{4}}, 2^{-\frac{1}{4}})$
4. Théorème des multiplicateurs de Lagrange (plusieurs contraintes) : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1 et $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ tels que $f_{|\Gamma}$ admette un extremum local en $a \in \Gamma$ tel que $dg(a)$ soit surjective, alors il existe un unique $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\nabla \left(f + \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i g_i \right)(a) = 0$
5. Remarque : $dg(a)$ surjective revient à supposer $dg_1(a), ..., dg_p(a)$ linéairement indépendants
6. Exemple : Si $f(x, y, z) = x + y$ et $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, z - y)$ alors f admet un unique maximum et un unique minimum atteints en $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

2.2 Théorèmes d'inversion

(Chapitre 6.4 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)

1. Définition : Soit U ouvert de E, V ouvert de F et $f : U \longrightarrow V$, alors on dit que f est un C^k-difféomorphisme si f est bijective, de classe C^k et de bijection réciproque de classe C^k
2. Remarque : Si $fU \longrightarrow V$ est un C^1-difféomorphimse alors $df(x) : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme et $df(x)^{-1} = d(f^{-1})(f(x))$
3. Théorème d'inversion locale : Soit Ω ouvert de E et $f : \Omega \longrightarrow F$ de classe C^k tel qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $df(x_0) : E \longrightarrow F$ isomorphisme, alors il existe $U \in \mathcal{V}(x_0)$ et $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ tel que $f : U \longrightarrow V$ soit un C^k-difféomorphisme
4. Corollaire : Dans ce cas, $d(f^{-1})(y) = (df(f^{-1}(y)))^{-1}$

5. Remarque : Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ alors $df(x) \in GL(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow Jac(f)(x) \neq 0$
6. Théorème d'inversion globale : Soit U ouvert de E et $f : U \longrightarrow F$ de classe C^k injective et pour tout $x \in U$, $df(x) : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme, alors $f(U)$ est un ouvert de F et f est un C^k-difféomorphisme de U dans $f(U)$
7. Exemple : Si $f(r,\theta) = (rcos(\theta), rsin(\theta))$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors f est un C^1-difféomorphisme et $f^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, arctan\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$
8. Corollaire : Soit I intervalle ouvert réel et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tel que f' ne s'annule pas sur I alors $f(I)$ est un intervalle ouvert réel et f est un C^k-difféomorphisme de I sur $f(I)$
9. Exemple : $exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est un C^∞-difféomorphisme et $ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ également
10. Remarque : Il existe f C^1-difféomorphisme local au voisinage de tout point mais pas un C^1-difféomorphisme global
11. Exemple : $f(x,y) = (x^3 - y^2, 2xy)$ (Exemple 14.11 des Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne)

3 Utilisation pour caractériser les sous-variétés

3.1 Définition de sous-variétés

(Chapitre 6.5 et Exercice 6.19 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)

1. Définition : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^k, alors on dit que f est une submersion (respectivement immersion) en a si $df(a)$ est surjectif (respectivement injectif)
2. Exemple : $f(x,y) = x^2 - y^2 - 1$ est une submersion en tout $(x,y) \neq 0$
3. Définition : $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension d de classe C^k dans $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x \in M$, il existe $U \in \mathcal{V}(x)$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k et $y_0 \in \mathbb{R}^{n-d}$ tels que $U \cap M = f^{-1}(x_0)$ et f soit une submersion en a
4. Exemple : Les sous-variétés de dimension n de $\mathbb{R}^n$ sous les ouverts de $\mathbb{R}^n$
5. Exemple : Par inversion locale, les sous-variétés de dimension 0 de $\mathbb{R}^n$ sont les ensembles dont tous les points sont isolés
6. Définition : Les courbes, surfaces et hypersurfaces sont les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de dimension $1, 2$ et $n-1$
7. Exemple : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 = 1\}$ est une courbe mais pas $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 = 0\}$
8. Exemple : $S(0,1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une hypersurface
9. Exemple : Le graphe d'une application de classe C^k est une sous-variété
10. Proposition : Soit M sous-variété de dimension d et de classe C^k dans $\mathbb{R}^n$ et $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ un C^l-difféomorphisme sur son image, alors $\phi(U \cap M)$ est vide ou une sous-variété de $\mathbb{R}^p$ de dimension d et classe $C^{min(k,l)}$

3.2 Différentes caractérisations des sous-variétés

(Chapitre 6.5 et Exercice 6.18 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)

1. Théorème de caractérisation par redressements locaux : Soit $M \subset \mathbb{R}^n$, alors M est une sous-variété de classe C^k et de dimension d si et seulement si pour tout $x \in M$, il existe $U \in \mathcal{V}(x), V \in \mathcal{V}(0)$ et $\phi : U \longrightarrow V$ un C^k-difféomorphisme tel que $\phi(x) = 0$ et $\phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0_{n-d}\})$
2. Exemple : Pour $S(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, un redressement est $\phi : (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longmapsto \left(arctan\left(\frac{y}{x}\right), x^2+y^2-1\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times]-1,+\infty[$
3. Théorème de caractérisation locale par graphe : Soit $M \subset \mathbb{R}^n$, alors M est une sous-variété de classe C^k de dimension d de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ si et seulement si pour tout $x \in M$, il existe $U \in \mathcal{V}(x), U_1 \in \mathcal{V}(x_1), U_2 \in \mathcal{V}(x_2)$ et $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$ de classe C^k tels que $M \cap (U_1 \times U_2)$ soit le graphe de φ, ie $U \cap M = \{(y, \varphi(y)), y \in U_1\}$
4. Exemple : $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = x - 3(x^2+y^2)\}$ est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$, il s'agit du graphe de $f(x,y) = x - 3(x^2+y^2)$
5. Définition : On dit que $f : E \longrightarrow F$ est un homéomorphisme si f bijective continue de bijection réciproque continue
6. Théorème de caractérisation par paramétrisations locales : Soit $M \subset \mathbb{R}^n$, alors M est une sous-variété de classe C^k de dimension d si et seulement si pour tout $x \in M$, il existe $U \in \mathcal{V}(x)$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k homéomorphisme de Ω sur $M \cap U$ et immersion en $g^{-1}(x)$
7. Exemple : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y \geq 0\}$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$

4 Applications aux changements de coordonnées

4.1 Définition et théorème

(Chapitre 5.2 du Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière)

1. Définition : Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors un changement de coordonnées sur V est la donnée de n fonctions $f_1, ..., f_n : V \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $x \longmapsto (f_1(x), ..., f_n(x)) = (u_1, ..., u_n)$ soit un C^1-difféomorphisme sur V sur un ouvert W de $\mathbb{R}^n$
2. Exemple : Les relations $u_i \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x_j$ définissent un changement linéaire de coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ si A est une matrice inversible
3. Exemple : $(x,y) \longmapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$ définit le passage en coordonnées polaires sur $\{x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$
4. Théorème : Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $U \in \mathcal{V}(a)$ et $f_1, ..., f_p : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 alors $(f_1, ..., f_p)$ peut être complété en un changement de coordonnées sur U si et seulement si $df_1(a), ..., df_p(a)$ sont linéairement indépendants

4.2 Pour résoudre des équations aux dérivées partielles

(Exercices 72 et 64 du Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière)

1. Proposition : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n, a \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1 tel que f soit une submersion en a, alors on peut compléter les fonctions $X_1 = f_1(x_1, ..., x_n), ..., X_p = f_p(x_1, ..., x_n)$ en un système de coordonnées locales $X_1, ..., X_n$ sur $\mathbb{R}^n$ sur un voisinage V de a
2. Corollaire : Dans ce l'application f devient la projection $X = (X_1, ..., X_n) \longmapsto (X_1, ..., X_p)$, de plus f est ouvert sur V, il n'existe aucune fonction non nulle φ tel que $\varphi \circ f = 0$ sur V et f admet localement un inverse à droite
3. Application : On considère une équation aux dérivées partielles linéaires du premier ordre $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ avec v_i continues et non simultanément nuls sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, soit $f_1, ..., f_p$ des solutions particulières de classes C^1 de différentielles en $a \in U$ linéairement indépendantes, alors $p < n$ et l'équation peut se ramener localement à une équation du même type à $n - p$ variables
4. Exemple : On considère l'équation aux dérivées partielles $x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, alors les solutions de classe C^1 sont de la forme $f(x, y) = h(xy)$ avec h de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (Exemple 3.7.6 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)
5. Exemple : On considère l'équation aux dérivées partielles $(y-z)\frac{\partial f}{\partial x} + (z-x)\frac{\partial f}{\partial y} + (x-y)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, alors les solutions sont de la forme $f(x, y, z) = \phi(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$ avec ϕ de classe C^1 sur l'ouvert $W = \{u^2 < 3v\} \subset \mathbb{R}^2$

4.3 Pour transformer une fonction en une forme quadratique

(Exercices 109, 66, 114 du Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière)

1. Proposition : Lemme de Morse à 2 variables : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0, 0)$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 de hessienne $H_f(0, 0)$ non dégénérée, alors il existe $\alpha, \beta, \gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que $f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y = \alpha(x, y)x^2 + 2\beta(x, y)xy + \gamma(x, y)y^2$
2. Corollaire : Dans ce cas, si $sign(H_f(0, 0)) = (1, 1)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \neq 0$ alors il existe $u, v : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que $f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y = u(x, y)^2 - v(x, y)^2$ et l'application $\varphi(x, y) = (u, v)$ est un C^1-difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine
3. Application : On suppose $df(0, 0) = 0$ et $sign(H_f(0, 0)) = (1, 1)$, alors la courbe de niveau $f(x, y) = f(0, 0)$ admet un point double à l'origine et le couple des tangentes en ce point a pour équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y^2 = 0$
4. Lemme : Réduction des formes quadratiques : Soit $A_0 \in S_n(R) \cap GL_n(\mathbb{R})$ et $\varphi(M) = {}^tMA_0M$, alors $d\varphi(I_n)$ est surjective de noyau $\{H \in M_n(\mathbb{R}), A_0H \in A_n(\mathbb{R})\}$ et il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi(A) = M$ de V dans $GL_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 telle que $\forall A \in V, A = {}^tMA_0M$

5. Proposition : Lemme de Morse à n variables : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 tel que $df(0) = 0$ et $sign(H_f(0)) = (p, n-p)$, alors il existe un C^1-difféomorphisme $x \longmapsto u = \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + ... + u_p^2 - u_{p+1}^2 - ... - u_n^2$