Leçon 220 Equations différentielles ordinaires, exemples de résolution et d'étude de solutions en dimension 1 et 2

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Equations différentielles de Florent Berthelin
2. Analyse de Queffélec et Zuily
3. Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly
4. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière
5. Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles de François Golse

Développements.

1. Théorèmes de Cauchy-Lipschitz globalement lipschitzien et linéaire
2. Théorème de stabilité de Liapounov

Table des matières

1 Théorie des équations différentielles ordinaires

1.1 Mise en place du problème

(Chapitres 1.1, 1.2 et 1.3 de Equations différentielles de Florent Berthelin)
On considère U ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^N$, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ et $(t_0, y_0) \in U$.

1. Définition : On dit que $y' = f(t, y)$ est une équation différentielle (résolue) en y relativement à t
2. Définition : Une solution de cette équation est une fonction dérivable y définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U, y'(t) = f(t, y(t))$
3. Exemple : $y' = 2t, ty' - 2y = 0$ et $(y')^2 - 4y = 0$ sont des équations différentielles dont $y(t) = t^2$ est une solution
4. Remarque : Si $N = 1$ alors on parle d'équation scalaire, sinon d'équation vectorielle
5. Définition : Une équation différentielle est dite d'ordre n si elle est de la forme $y^{(n)} = f(t, y, ..., y^{(n-1)})$ (avec $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ et U ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{(n-1)N}$)
6. Proposition : A partir d'une équation différentielle d'ordre n sur $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^N$ alors on peut se ramener à une équation différentielle d'ordre 1 en dimension nN
7. Proposition : (y, I) est solution du problème de Cauchy $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$ si et seulement si y continue et $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$
8. Définition : On dit que y est une solution maximale (respectivement globale) de $y' = f(t, y)$ si elle n'admet pas de prolongements stricts (respectivement définie sur I dans le cas où $U = I \times U'$)
9. Remarque : Une solution globale est maximale mais pas l'inverse
10. Exemple : Si $\forall (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(t, y) = y^2$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ alors $y : t \in \left]-\infty, \frac{1}{y_0}\right] \longmapsto \frac{y_0}{1-y_0 t}$ est solution maximale non globale

1.2 Existence et unicité de solution maximale

(Chapitres 3.1 et 3.2 de Equations différentielles de Florent Berthelin)
On considère $I \times U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^N$, $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ et $(t_0, y_0) \in I \times U$.

1. Définition : On dit que f est localement lipschizienne par rapport à la variable d'état si pour tout $(t', y') \in I \times U$, il existe un compact $I_c \times U_c \subset I \times U$ contenant (t', y'), et $k \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall (t, y_1, y_2) \in I_c \times U_c^2, \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$
2. Exemple : Si f est de classe C^1 alors f est localement lipschitizienne
3. Définition : On dit que f est globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état si pour tout compact $I_c \subset I$, il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall (t, y_1, y_2) \in I_c \times U^2, \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$
4. Lemme : Soit $(t_0, y_0, \alpha, \beta, r_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^N \times [0, +\infty[^2 \times]0, +\infty]$, $I := [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$, $f : I \times \overline{B}(y_0, r_0) \longrightarrow \mathbb{C}^N$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, $\phi : y \in C(I, \overline{B}(y_0, r_0)) \longrightarrow \left[t \in I \longmapsto \phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds\right]$, si $\phi(C(I, \overline{B}(y_0, r_0))) \subset C(I, \overline{B}(y_0, r_0))$ alors il existe une unique solution globale de $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$

5. Théorème de Cauchy-Lispchitz globalement lipschitzien : Si f continue et globalement lipschitzien par rapport à la variable d'état alors il existe une unique solution globale de $y' = f(t,y), y(t_0) = t_0$
6. Corollaire : Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire : Si $\forall (t,y) \in I \times U, f(t,y) = A(t)y + B(t)$ avec $A \in C(I, M_N(\mathbb{C}))$ et $B \in C(I, \mathbb{C}^N)$ alors il existe une unique solution globale de $y' = Ay + B, y(t_0) = y_0$
7. Théorème de Cauchy-Lispchitz localement lispchizien (admis) : Si f continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état alors il existe une unique solution maximale $y : I \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de $y' = f(t,y), y(t_0) = y_0$
8. Remarque : Sans la locale lispchitziennité l'existence demeure (résultat par le théorème de Cauchy-Arzela-Peano) mais on perd l'unicité
9. Exemple : Si $f : (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto 3(y^2)^{\frac{1}{3}}$ alors pour tout $K \in \mathbb{R}_-$, $y_K : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} (t-K)^3 & si \quad t \leq K \\ 0 & si \quad K < t < 0 \\ t^3 & si \quad t \geq 0 \end{cases}$ est une solution globale de $y' = f(t,y), y(1) = 1$

1.3 Passage du maximal au global

(Chapitres 1.4 et 1.8 de Equations différentielles de Florent Berthelin)

1. Lemme de Grönwall (différentiel) : Soit $w \in C^1(I, \mathbb{R})$ et $v \in C(I, \mathbb{R})$ tels que $\forall t \in I, w'(t) \leq v(t)w(t)$ alors $\forall t \in I, t \geq t_0 \Rightarrow w(t) \leq w(t_0)e^{\int_{t_0}^t v(s)ds}$
2. Lemme de Grônwall (intégral) : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(u,v) \in C(I, \mathbb{R})^2$ tels que $v \geq 0$ et $\forall t \in I, t \geq t_0 \Rightarrow u(t) \leq a + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds$ alors $\forall t \in I, t \geq t_0 \Rightarrow u(t) \leq a^{\int_{t_0}^t v(s)ds}$
3. Corollaire : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(u,v) \in C(I, \mathbb{R})^2$ tels que $u, v \geq 0$ et $\forall t \in I, t \geq t_0 \Rightarrow u(t) \leq a + \left| \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds \right|$ alors $\forall t \in I, t \geq t_0 \Rightarrow u(t) \leq a^{\left| \int_{t_0}^t v(s)ds \right|}$
4. Lemme : Si f continue alors il existe un cylindre $C := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(y_0, r) \subset I \times U$ tel que pour tout $(t', y') \in C$, il existe une solution de $y' = f(t,y), y(t') = y'$
5. Théorème de sortie de tout compact : Si f continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, soit $y :]c, d[\longrightarrow \mathbb{C}^N$ solution maximale de $y' = f(t,y)$ alors $t \longmapsto (t, y(t))$ sort de tout compact quand $t \to d$
6. Corollaire : Théorème des bouts : Si $I =]a, b[$ et $d < b$ alors $\|y(t)\| \underset{t \to d}{\longrightarrow} +\infty$, autrement dit si y est bornée alors $d = b$
7. Corollaire : Si de plus f est bornée alors toute solution maximale de (E) est globale

2 Résolutions d'équations différentielles

2.1 Dans le cadre linéaire et équations différentielles d'Euler à l'ordre 2

(Chapitres 2.3, 2.4, 2.6 et 4.2.3 de Equations différentielles de Florent Berthelin)

On considère $f:(t,y)\in I\times\mathbb{R}^N \longmapsto A(t)y+B(t)$ avec $A\in C(I,M_N(\mathbb{C}))$ et $B\in C(I,\mathbb{C}^N)$, et $(t_0,y_0)\in I\times\mathbb{C}^N$.

1. Proposition : L'ensemble S_H des solutions maximales de $y'=Ay$ est un sous-espace vectoriel de $C(I,\mathbb{C}^N)$ de dimension N
2. Corollaire : L'ensemble des solutions S de $y'=Ay+B$ est un espace affine de dimension N et de direction S_H
3. Proposition : Si $N=1$ alors la solution maximale de $y'=Ay+B, y(t_0)=y_0$ est $y:t\in I\longmapsto y_0e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}+\int_{t_0}^t B(s)e^{\int_s^t A(u)du}ds$
4. Exemple : La solution maximale de $y'+y=e^t, y(1)=0$ est $y:\mathbb{R}\longmapsto \frac{e^t-e^{-t+2}}{2}$
5. Théorème : Si A est constante alors les solutions de $y'=Ay$ sont de la forme $y=e^{tA}C$ avec $C\in\mathbb{C}^N$, et la solution de $y'=Ay, y(t_0)=y_0$ est $y=e^{(t-t_0)A}y_0$
6. Exemple : La solution de $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+2y \\ y' & = & 2x+y \end{array}\right., x(1)=2, y(1)=1$ est $(x,y)=\frac{1}{2}\left(3e^{3(t-1)}+e^{-(t-1)}, 3e^{3(t-1)}-e^{-(t-1)}0\right)$
7. Proposition : Méthode de variation de la constante : Si A constante alors on cherche une solution de $y'=Ay+B, y(t_0)=y_0$ de la forme $y=e^{tA}C(t)$ avec $C\in C^1(I,\mathbb{C}^N)$, on trouve $y=e^{(t-t_0)A}y_0+\int_{t_0}^t e^{(t-s)A}B(s)ds$
8. Corollaire : Soit $(a_0,a_1,b)\in C(I,\mathbb{C})^3$ et y_1,y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $y''+a_1(t)y'+a_0(t)y=0$, alors les solutions de $y''+a_1(t)y'+a_0(t)y=b(t)$ sont de la forme $y=\lambda y_1+\mu y_2$ avec λ,μ vérifiant $\left\{\begin{array}{lcl} \lambda' y_1+\mu' y_2 & = & 0 \\ \lambda' y_1'+\mu' y_2' & = & b \end{array}\right.$
9. Exemple : La solution globale de $y''-2y'+y=e^t, y(-1)=0, y'(-1)=1$ est $y(t)=\left(\frac{t^2}{2}+t(e+1)+e+\frac{1}{2}\right)e^t$
10. Application : Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, alors les équations différentielles d'Euler $t^2y''+aty'+by=0$ se ramènent à $z''+(a-1)z'+bz=0$ sur $\mathbb{R}^*$ avec $z(u)=y(e^u), t=e^u$ pour $t\in\mathbb{R}_+^*$ et $z(u)=y(-e^u), t=-e^u$ pour $t\in\mathbb{R}_-^*$

2.2 D'autres types d'équations différentielles : à variables séparables, homogènes et à solution développable en série entière

(Chapitres 4.2.1 et 4.2.2 de Equations différentielles de Florent Berthelin et X.VI.3 d'Analyse de Quéffelec et Zuily)

1. Définition : On dit que $y'=f(t,y)$ est à variables séparables si $f(t,y)=g(y)h(t)$
2. Proposition : Soit $\Omega=\{y\in\mathbb{R}, g(y)\neq 0\}$, $]y_1,y_2[\subset\Omega$, $\mathcal{G}$ primitive de $\frac{1}{g}$ et H primitive de h, alors les solutions de $y'=f(t,y)$ sont de la forme $y_C=\mathcal{G}^{-1}(H+C)$ avec $C\in\mathbb{R}$
3. Exemple : Les solutions de $tln(t)y'-y-1=0$ sont de la forme $y_C:t\in]0,+\infty[\longmapsto -1+Cln(t)$ avec $C\in\mathbb{R}$
4. Définition : On dit que $y'=f(t,y)$ est une équation homogène si $f(t,y)=g\left(\frac{y}{t}\right)$
5. Proposition : Par changement de variable $z=\frac{y}{t}$ on se ramène à $z'=\frac{g(z)-z}{t}$ à variables séparables

6. Exemple : Les solutions de $t^2y'-2ty+t^2=0$ sont de la forme $y_{C,K}=\left\{\begin{array}{lll} t+Ct^2 & si & t\geq 0 \\ t+Kt^2 & si & t<0\end{array}\right.$ avec $(C,K)\in\mathbb{R}^2$
7. Remarque : On considère (E) : $y''+py'+qy=0$ avec $p,q:I\longrightarrow\mathbb{R}$, et $x_0\in I$.
8. Théorème : Si $p(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_nx^n$ et $q(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}q_nx^n$ séries entières de rayon de convergence R, alors pour tout $(a_0,a_1)\in\mathbb{R}^2$, (E) admet une unique solution y telle que $y(0)=a_0, y'(0)=a_1$, de plus y est développable en série entière convergente sur $]-R,R[$
9. Exemple : La solution de l'équation d'Airy $y''+xy=0, y(0)=1, y'(0)=0$ est donnée par $\sum a_nx^n$ avec $a_{3p+1}=a_{3p+2}=0, a_0=1, a_{3p}=(-1)^p\prod\limits_{j=1}^{p}\frac{1}{(3j-1)3j}$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$
10. Remarque : Cette méthode s'adapte pour des équations linéaires d'ordre plus élevé du type $y'''+py''+qy'+sy=0$

2.3 Résolution numérique et méthode d'Euler

(Chapitres V.2.2 et V.2.3 d'Analyse numérique et équations différentielles de Florent Berthelin)

1. Lemme : Il existe $(T_0,r_0)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $C_0=[t_0-T_0,t_0+T_0]\times\overline{B}(y_0,r_0)\subset I\times U$ et $M:=\underset{(t,y)\in C_0}{sup}\|f(t,y)\|<+\infty$
2. Définition : Méthode d'Euler : Soit $T\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $[t_0,t_0+T]\subset I$, $t_0<...<t_N=t_0+T$ subdivision de $[t_0,t_0+T]$, $h_n=t_{n+1}-t_n$, alors on définit y par $y(t)=y_n+(t-t_n)f(t_n,y_n)$ avec $\left\{\begin{array}{l} y_{n+1}=y_n+h_nf(t_n,y_n) \\ t_{n+1}=t_n+h_{n+1}\end{array}\right.$
3. Remarque : On approxime la courbe intégrale sur $[t_n,t_{n+1}]$ avec sa tangente en (t_n,y_n) (schéma en annexe)
4. Remarque : On construit de même une solution approchée sur $[t_0-T,t_0]$
5. Lemme : Soit $C:=[t_0-T,t_0+T]\times\overline{B}(y_0,r_0)$ tel que toute solution de $y'=f(t,y), y(t_0)=y_0$ reste dans $\overline{B}(y_0,r_0)$ et $T\leq min\left(T_0,\frac{r_0}{M}\right)$, alors toute solution approchée y donnée par la méthode d'Euler reste dans $\overline{B}(y_0,r_0)$
6. Définition : Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, alors on dit que $y:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^N$ est une solution ε-approchée de $y'=f(t,y)$ si $\forall t\in[a,b], (t,y(t))\in I\times U$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in[a,b]$ où y est dérivable, $\|y'(t)-f(t,y(t))\|\leq\varepsilon$
7. Définition : Le module de continuité de f sur C est $\omega_f(u):=max(\|f(t_1,y_1)-f(t_2,y_2)\|,|t_1-t_2|+\|y_1-y_2\|\leq u)$
8. Proposition : Soit $y:[t_0-T,t_0+T]\longrightarrow\mathbb{R}^N$ une solution approchée construite par la méthode d'Euler avec comme pas maximum h_{max}, alors l'erreur ε vérifie $\varepsilon\leq\omega_f\left((M+1)h_{max}\right)$
9. Corollaire : Soit $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}:[t_0-T,t_0+T]\longrightarrow\mathbb{R}^N$ suite de solutions ε_p-approchées contenues dans C telles que $y_p(t_0)=y_0$, $\varepsilon_p\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $y_p\underset{p\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}}y$, alors y est la solution de $y'=f(t,y), y(t_0)=y_0$

3 Etude qualitative

3.1 Equations autonomes

(Chapitre 5.1 de Equations différentielles de Florent Berthelin)

1. Définition : On dit que l'équation est autonome si elle est $y' = f(y)$ ie f est constant par rapport au temps
2. Exemple : Les équations différentielles linéaires à coefficients constants sont autonomes
3. Définition : La trajectoire d'une solution (y, J) de $y' = f(y)$ est $\{y(t), t \in J\}$, et $f : U \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est appelé un champs de vecteurs
4. Définition : Si $N = 2$ et $f = (f_1, f_2)$ alors l'isocline verticale (respectivement horizontale) est $\{(x, y) \in U^2, f_1(x, y) = 0\}$ (respectivement $f_2(x, y) = 0$)
5. Exemple : Etude qualitative de $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y + x - 1 \\ y' & = & 2x - y \end{array} \right.$ en annexe

3.2 Stabilité des solutions

(Chapitre 6.1 de Equations différentielles de Florent Berthelin)

On suppose f continue et localement lipschitzienne et on considère (y_{t_0,y_0}, J) la solution maximale de $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$.

1. Définition : On dit que y_{t_0,y_0} est stable à droite :
   — S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $y_1 \in U$ tel que $\|y_1 - y_0\| \leq \alpha$, la solution y_{t_0,y_1} est définie sur $J \cap [t_0, +\infty[$
   — Si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\delta \in]0, \alpha]$ tel que pour tout $y_1 \in U$ tel que $\|y_1 - y_0\| \leq \delta$, $\forall t \in J \cap [t_0, +\infty[, \|y_{t_0,y_1}(t) - y_{t_0,y_0}(t)\| \leq \varepsilon$
2. Définition : On dit que y_{t_0,y_0} est asymptotiquement stable à droite :
   — Si y_{t_0,y_0} est stable à droite
   — S'il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $y_1 \in U$ tel que $\|y_1 - y_0\| \leq \delta$, $y_{t_0,y_1}(t) - y_{t_0,y_0}(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
3. Remarque : On définit de même la stabilité et l'asympotique stabilité à gauche
4. Exemple : Les solutions de $y' = y$ sont asymtotiquement stables à gauche mais pas stables à droites
5. Théorème : Si $f(y) = Ay$ avec $A \in M_N(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, ...\lambda_m$ alors les solutions de $y' = Ay$ sont
   — Stables si et seulement si pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, $Re(\lambda_j) < 0$ ou le bloc de Jordan correspondant est diagonalisable
   — Asymptotiquement stables si et seulement si $\forall j \in [\![1, m]\!], Re(\lambda_j) < 0$
6. Corollaire : Cas $N = 2$ en annexe (Chapitre X.2.2 d'Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly)
7. Théorème de stabilité de Liapounov : Si $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est de classe C^1, $f(0) = 0$ et $A = Df(0)$ de valeurs propres dans $\mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$ alors 0 est une solution asymptotiquement stable de $y' = Ay$ (Exercice 3.46 du Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière)

4 Utilisation pour les équations aux dérivées partielles

4.1 Equation de transport

(Chapitre 2.1 de Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles de François Golse)

1. Définition : L'équation de transport est $\frac{\partial f}{\partial t} + \langle v, \nabla_x f\rangle = 0$ d'inconnue $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ et de paramètre $v \in \mathbb{R}^N$
2. Proposition : Soit $y \in \mathbb{R}^N$, alors $\gamma : t \in \mathbb{R} \longmapsto y + tv$ est de classe C^1 et $\frac{d\gamma}{dt}(t) = v$, de plus $\{\gamma(t), t \in \mathbb{R}\}$ est appelé courbe caractéristique de y pour l'opérateur de transport $\frac{\partial}{\partial t} + \langle v, \nabla_x\rangle$
3. Corollaire : Toute solution de l'équation de transport reste constante le long de chaque courbe caractéristique
4. Théorème : Soit $f_0 \in C^1(\mathbb{R}^N)$, alors le problème de Cauchy $\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \langle v, \nabla_x f(t,x)\rangle = 0, f(0,x) = f_0(x)$ admet une unique solution $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ donnée par $f(t,x) = f_0(x - tv)$

4.2 Cas des coefficents variables

(Chapitres 2.2 de Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles de François Golse et 12.5.4 de Equations différentielles de Florent Berthelin)

1. Définition : Dans ce cas l'équation de transport est de la forme $\frac{\partial f}{\partial t} + \langle V, \nabla_x f\rangle = 0$ avec $V : [0,T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ champ de vecteurs continue admettant des dérivées partielles d'ordre 1 et tel que $\nabla_x V$ soit continue et qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|V(t,x)| \leq k(1+|x|)$
2. Proposition : Soit $x \in \mathbb{R}^N, t \in [0,T]$, alors il existe localement une unique solution γ de $\gamma'(s) = V(s, \gamma(s))$ tel que $\gamma(t) = x$, appelé courbe intégrale de V, de plus $s \longmapsto (s, \gamma(s))$ est appelé courbe caractéristique de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} + \langle V(t,x), \nabla_x\rangle$ passant par x à l'instant t
3. Proposition : Soit $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^N$, alors la courbe intégrale γ de V passant par x à l'instant t est définie pour tout $s \in [0,T]$, on note $X(\cdot, t, x)$ cette courbe intégrale, ie la solution de $\frac{\partial X}{\partial s}(s,t,x) = V(s, X(s,t,x)), X(t,t,x) = x$
4. Corollaire : L'application $X : [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est appelée flot caractéristique de $\frac{\partial}{\partial t} + \langle V, \nabla_x\rangle$ et vérifie :
   - Pour tous $t_1, t_2, t_3 \in [0,T], x \in \mathbb{R}^N$, $X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x)$
   - $\frac{\partial^2 X}{\partial s \partial x_j}(s,t,x)$ et $\frac{\partial^2 X}{\partial x_j \partial s}(s,t,x)$ existent pour tout $(s,t,x) \in]0,T[^2 \times \mathbb{R}^N$ et se prolongent continûment sur $[0,T]^2 \times \mathbb{R}^N$ et $\frac{\partial^2 X}{\partial s \partial x_j} = \frac{\partial^2 X}{\partial x_j \partial s}$
   - Pour tout $s,t \in [0,T]$, $X(s,t,\cdot)$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^N$
   - $X \in C^1([0,T]^2 \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$
5. Remarque : L'hypothèse $|V(t,x)| \leq k(1+|x|)$ sert à définir le flot X de façon globale
6. Exemple : Si $N = 1$ et $V(t,x) = x^2$ alors V ne vérifie pas l'hypothèse précédente et $X(s,t,x)$ n'est définie que pour $s < t + \frac{1}{x}$ si $x > 0$ et que pour $s > t - \frac{1}{x}$ si $x < 0$

7. Théorème : Le problème de Cauchy $\forall t \in]0, T[, x \in \mathbb{R}^N$, $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \langle V(t,x), \nabla_x f(t,x)\rangle = 0$, $f(0,x) = f_0(x)$ admet une unique solution $f \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ définie par $f(t,x) = f_0(X(0,t,x))$
8. Exemple : La solution du problème de Cauchy $\frac{\partial f}{\partial t} + x\frac{\partial f}{\partial x} = 0, f(0,x) = f_0(x)$ est donnée par $f(x,t) = f_0(xe^{-t})$
9. Exemple : La solution du problème de Cauchy $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, x \in \mathbb{R}^N$, $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + a\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = f(t,x), f(0,x) = f_0(x)$ où $a \in \mathbb{R}$ est donnée par $f(t,x) = f_0(x-at)e^t$