Leçon 221 Équations différentielles linéaires, systèmes d'équations différentielles linéaires, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Equations différentielles de Florent Berthelin
2. Analyse de Queffélec et Zuily
3. Algèbre linéaire de Joseph Grifone
4. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière

Développements.

1. Théorèmes de Cauchy-Lipschitz globalement lipschitzien et linéaire
2. Théorème de stabilité de Liapounov

Table des matières

1 Théorie des équations différentielles linéaires

1.1 Existence et unicité

(Chapitres 1.1 et 3.2 d'Equations différentielles de Florent Berthelin)
On considère I intervalle de $\mathbb{R}, U$ ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : I \times U \longrightarrow U$.

1. Définition : Une équation différentielle (résolue) est de la forme $y' = f(t, y)$ d'inconnue y, et on dit qu'il s'agit d'une équation différentielle linéaire si $f(t, y) = A(t)y + B(t)$ avec $A : I \longrightarrow M_N(K)$ et $B : I \longrightarrow K^N$
2. Remarque : A partir d'une équation différentielle scalaire (linéaire) d'ordre n, on peut se ramener à une équation différentielle vectorielle (linéaire) d'ordre 1
3. Définition : On dit que f est globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état si pour tout compact $I_c \subset I$, il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall (t, y_1, y_2) \in I_c \times U^2, \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$
4. Lemme : Soit $(t_0, y_0, \alpha, \beta, r_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^N \times [0, +\infty[^2 \times \,]0, +\infty]$, $I := [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$, $f : I \times \overline{B}(y_0, r_0) \longrightarrow \mathbb{C}^N$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, $\phi : y \in C(I, \overline{B}(y_0, r_0)) \longrightarrow \left[t \in I \longmapsto \phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds\right]$, si $\phi(C(I, \overline{B}(y_0, r_0))) \subset C(I, \overline{B}(y_0, r_0))$ alors il existe une unique solution globale de $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$
5. Théorème de Cauchy-Lispchitz globalement lipschitzien : Si f continue et globalement lipschitzien par rapport à la variable d'état alors il existe une unique solution globale de $y' = f(t, y), y(t_0) = t_0$
6. Corollaire : Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire : Si $\forall (t, y) \in I \times U, f(t, y) = A(t)y + B(t)$ avec $A \in C(I, M_N(\mathbb{C}))$ et $B \in C(I, \mathbb{C}^N)$ alors il existe une unique solution globale de $y' = Ay + B, y(t_0) = y_0$
7. Définition : L'équation différentielle homogène associée à $y' = A(t)y + B(t)$ est $y' = A(t)y$

1.2 Structure de l'espace des solutions de l'équation homogène

(Chapitre 2.3 d'Equations différentielles de Florent Berthelin)

1. Théorème : L'ensemble des solutions S_H de $y' = A(t)y$ est un espace vectoriel de dimension N
2. Corollaire : L'ensemble des solutions S de $y' = A(t)y + B(t)$ est un espace affine de dimension N et de direction S_H
3. Remarque : Autrement dit les solutions de $y' = A(t)y + B(t)$ sont de la forme $y = \overline{y} + \tilde{y}$ avec $\overline{y}$ solution de $y' = Ay$ et $\tilde{y}$ solution particulière de $y' = A(t)y + B(t)$
4. Exemple : Les solutions de $y'' - 2y' + y = 0$ sont de la forme $y(t) = ae^t + bte^t$
5. Proposition : Si $N = 1$ alors la solution globale de $y' = A(t)y + B(t), y(t_0) = y_0$ est $y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t b(s) e^{\int_s^t a(u)du} ds$
6. Exemple : Les solutions de $y' = 2y + 1$ sont de la forme $y(t) = \lambda e^{2t} - \frac{1}{2}$ avec $\lambda \in K$

1.3 Matrice fondamentale et Wronksien

(Chapitre 2.4 d'Equations différentielles de Florent Berthelin)

1. Définition : Un système fondamental de solutions de $y' = A(t)y$ est une famille $(y_1, ..., y_N)$ de solutions linéairement indépendantes de $y' = A(t)y$, la matrice $\phi(t) = (y_1, ..., y_N)$ est appelée matrice fondamentale et $W(t) = det(\phi(t))$ le wronskien
2. Proposition : Soit $(y_1, ..., y_N)$ système fondamental de solutions et y solution de $y' = A(t)y$, alors $y(t) = \lambda_1 y_1 + ...\lambda_N y_N = \phi(t)C$ avec $(\lambda_1, ..., \lambda_N, C) \in K \times ... \times K \times K^N$
3. Corollaire : Soit ϕ matrice fondamentale de $y' = A(t)y$, alors la solution de $y' = A(t)y, y(t_0) = t_0$ est $y(t) = \phi(t)\phi(t_0)^{-1}y_0$
4. Exemple : La solution de $y'' - 2y' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$ est $y(t) = (t + 1)e^t$

2 Résolution explicite

2.1 Cas des coefficients constants

(Chapitres 2.4 et 2.7 d'Equations différentielles de Florent Berthelin et Exercice 6.2.3.4 d'Analyse de Xavier Gourdon)

On considère $A \in M_N(K)$.

1. Lemme : Une matrice fondamentale de $y' = Ay$ est $\phi = e^{tA}$
2. Proposition : Les solutions de $y' = Ay$ sont de la forme $y = e^{tA}C$ avec $C \in K^N$
3. Corollaire : L'unique solution du problème de Cauchy $y' = Ay, y(t_0) = y_0$ est $Y = e^{(t-t_0)A}y_0$
4. Proposition : Les solutions de $y' = Ay + B(t)$ sont les $y(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-x)A}B(x)dx + e^{tA}C$ avec $C \in K^n$
5. Corollaire : L'unique solution du problème de Cauchy $y' = Ay + B(t), y(t_0) = y_0$ est $y(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-x)A}B(x)dx + e^{tA}y_0$
6. Lemme : Soit $P_n = (X - \alpha)^n \in \mathbb{C}[X]$ et D le morphisme de dérivation, alors les solutions de l'équation différentielle $P_n(D)(y) = 0$ sont de la forme $t \longmapsto e^{\alpha t}F(t)$ avec F fonction polynomiale de degré au plus $n - 1$
7. Théorème : Soit $P = \sum_{j=1}^{n} a_j X^j = \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{n_i}$, alors les solutions de $P(D)(y) = 0$ sont de la forme $t \longmapsto e^{\alpha_1 t}F_1(t) + ... + e^{\alpha_k t}F_k(t)$ avec $F_1, ..., F_k$ fonctions polynomiales de degré au plus $n_1 - 1, ..., n_k - 1$
8. Proposition : On considère $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$, avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ de polynôme caractéristique $P = X^2 + aX + b$, alors :
   — Si P admet deux racines distinctes $(r_1, r_2) \in \mathbb{C}^2$ alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$
   — Si P admet une unique racine $r \in \mathbb{C}$ alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t)e^{rt}$
9. Corollaire : On considère $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de polynôme caractéristique $P = X^2 + aX + b$, alors :

— Si P admet deux racines distinctes $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$

— Si P admet une unique racine $r \in \mathbb{R}$ alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t)e^{rt}$

— Sinon P admet deux racines complexes conjuguées $\rho + i\sigma, \rho - i\sigma$, dans ce cas il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(t) = e^{\rho t}(\lambda_1 cos(\sigma t) + \lambda_2 sin(\sigma t))$

10. Exemple : Les solutions de $y'' - 3y' - 4y = 0$ sont de la forme $y(t) = \lambda e^{-t} + \mu 4 e^{t}$

2.2 Cas des coefficients non constants et méthode de la variation des constantes

(Chapitre 2.6 d'Equations différentielles de Florent Berthelin)

1. Remarque : Il n'existe pas de méthode générale pour résoudre une équation différentielle homogène mais à partir d'un système fondamental de solutions on peut résoudre l'équation différentielle
2. Proposition : Soit ϕ matrice fondamentale de $y' = A(t)y$, alors on cherche une solution de $y' = A(t)y + B(t)$ de la forme $y(t) = \phi(t)C(t)$ avec $C : I \longrightarrow K^N$
3. Corollaire : Soit ϕ matrice fondamentale de $y' = A(t)y$, alors la solution de $y' = A(t)y + B(t), y(t_0) = y_0$ est $y(t) = \phi(t)\phi(t_0)^{-1}y_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(t)\phi(s)^{-1}B(s)ds$
4. Remarque : Soit (y_1, y_2) système fondamental de solutions de $y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$, les solutions de $y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$ sont de la forme $y = \lambda_1(t)y_1 + \lambda_2(t)y_2$ avec $\begin{cases} \lambda_1'(t)y_1 + \lambda_2'(t)y_2 = 0 \\ \lambda_1'(t)y_1' + \lambda_2'(t)y_2' = 0 \end{cases}$
5. Exemple : La solution de $y'' - 2y' + y = e^t, y(-1) = 0, y'(-1) = 1$ est $y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + t(e+1) + e + \frac{1}{2}\right)e^t$

2.3 Cas des coefficients non constants développables en série entière

(Chapitre X.VI.3 d'Analyse de Queffélec et Zuily)

1. Remarque : Pour l'équation $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, il est intéressant de chercher une solution particulière développable en série entière si p et q le sont, en particulier si ce sont des polynomes
2. Théorème : Si $p = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n x^n$ et $q = \sum_{n \in \mathbb{N}} q_n x^n$ sont convergentes sur $B(0, R)$ alors pour tout $(a_0, a_1) \in K^2$, il existe une unique solution y de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, y(0) = a_0, y'(0) = a_1$, de plus y est développable en série entière convergente sur $]-R, R[$
3. Exemple : La solution de l'équation d'Airy $y'' + xy = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$ est donnée par $\sum a_n x^n$ avec $a_{3p+1} = a_{3p+2} = 0, a_0 = 1, a_{3p} = (-1)^p \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{(3j-1)3j}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$
4. Remarque : Cette méthode s'adapte pour des équations linéaires d'ordre plus élevé du type $y''' + py'' + qy' + sy = 0$

3 Etude qualitative de la stabilité

3.1 Points stationnaires et solutions stables

(Chapitres 5.1, 5.4 et 6.1 d'Equations différentielles de Florent Berthelin)
On considère U ouvert de R^N $f : \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ continue et localement lipschizienne.

1. Définition : On dit que $y' = f(t, y)$ est autonome si f ne dépend pas de t ie $y' = f(y)$
2. Définition : Soit $y \in U$, alors on dit que y est un point stationnaire si $f(y) = 0$
3. Remarque : Si $f(y) = Ay$ avec A inversible alors l'unique point stationnaire est $y = 0$
4. Définition : Soit y_{t_0,y_0} solution de $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$, alors on dit que y_{t_0,y_0} est stable si :
   — Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $y_1 \in U$ tel que $\|y_0 - y_1\| \leq \alpha$, y_{t_0,y_1} est définie pour tout $t \in [t_0, +\infty[$
   — $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in]0, \alpha], \forall y_1 \in U, \|y_1 - y_0\| \leq \delta \Rightarrow \forall t \in [t_0, +\infty[, \|y_{t_0,y_1}(t) - y_{t_0,y_0}(t)\| \leq \varepsilon$
5. Remarque : Si $f(t, y) = A(t) \in GL_N(K)$ alors toute solution proche de 0 reste proche de 0
6. Définition : On dit que y_{t_0,y_0} est solution asymptotiquement stable si elle est stable et s'il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall y_1 \in U, \|y_0 - y_1\| \leq \delta \Rightarrow y_{t_0,y_0}(t) - y_{t_0,y_1}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
7. Remarque : Si $f(t, y) = A(t) \in GL_N(K)$ alors toute solution proche de 0 tend vers 0

3.2 Cas des systèmes linéaires à coefficients constants dans $\mathbb{R}^2$

(Chapitres 5.4 d'Equations différentielles de Florent Berthelin et A.13 d'Algèbre linéaire de Joseph Grifone)
On considère $A \in M_2(K)$ et y solution de $y' = Ay$.

1. Proposition : Si A a deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2, soit v_1 et v_2 deux vecteurs propres associés, alors $y = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$
2. Corollaire : Dans ce cas, si :
   — $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable
   — $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ alors 0 est un point d'équilibre instable
   — λ_1 et λ_2 de signes contraires alors 0 est un point col
3. Proposition : Si A a deux valeurs propres complexes conjugués λ et $\overline{\lambda}$, soit v_1 et v_2 deux vecteurs propres associés alors $x = ce^{\lambda t} v_1 + \overline{c} e^{\overline{\lambda} t} v_2 = \xi_1 w_1 + \xi_2 w_2$ avec $w_1, w_2 \in (\mathbb{R}^2)^2$
4. Corollaire : Dans ce cas, en coordonnées polaires, la trajectoire est décrite par $\xi = ce^{\lambda t}$, et on peut obtenir des spirales logarithmiques, 0 foyer stable, instable ou des solutions périodiques
5. Proposition : Si A a une unique valeur propre réelle alors :
   — Si A est diagonalisable alors les trajectoires sont des demi-droites partant de l'origine
   — Si A n'est pas diagonalisable alors 0 est un noeud dégénéré stable ou instable

3.3 Stabilité dans un système non linéaire grâce à un système linéaire

(Chapitres 6.1 de Equations différentielles de Florent Berthelin et exercice 3.46 du Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière)

1. Théorème : Si $f(y) = Ay$ avec $A \in M_N(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, ...\lambda_m$ alors les solutions de $y' = Ay$ sont
   — Stables si et seulement si pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, $Re(\lambda_j) < 0$ ou le bloc de Jordan correspondant est diagonalisable
   — Asymptotiquement stables si et seulement si $\forall j \in [\![1, m]\!], Re(\lambda_j) < 0$
2. Théorème de stabilité de Liapounov : Si $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est de classe C^1, $f(0) = 0$ et $A = Df(0)$ de valeurs propres dans $\mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$ alors 0 est une solution asymptotiquement stable de $y' = Ay$
3. Exemple : Soit $y'' + Csin(y) = 0$ avec $C \in \mathbb{R}_+^*$, alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable (Exercice 6.5 d'Equations différentielles de Florent Berthelin)