Leçon 223 Suites numériques, convergence, valeurs d'adhérence, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Suites et séries numériques et de fonctions de Mohammed El Amrani
2. Oraux X-ENS Analyse 1
3. Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi
4. Analyse de Xavier Gourdon
5. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière
6. Oraux X-ENS analyse 2
7. Les contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne

Développements.

1. Connexité des valeurs d'adhérence et critère de convergence
2. Méthode de Newton

Table des matières

1 Convergence d'une suite numérique

1.1 Limite d'une suite

(Chapitre 1.2 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)
On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ avec $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes.

1. Définition : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge s'il existe $l \in \mathbb{K}$, appelé limite, tel que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$, dans le cas contraire on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge
2. Exemple : Si $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite 1
3. Remarque : Il faut faire attention quand on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, cela signifie que $\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| > A$
4. Théorème : Unicité de la limite : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors la limite est unique
5. Proposition : Si u convergente alors u bornée
6. Remarque : La réciproque est fausse, si $u_n = (-1)^n$ alors u bornée mais non convergente
7. Proposition : Les suites convergentes forment une $\mathbb{K}$-algèbre, l'application limite est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \neq 0$ alors $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{l}$
8. Proposition : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
9. Théorème de caractérisation séquentielle de la continuité : Soit $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, alors f continue si et seulement $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \Rightarrow f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(l)$

1.2 Cas particulier de la convergence réelle

(Chapitres 1.2 et 1.3 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)
On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Définition : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (respectivement majorée) s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq A$ (respectivement $\leq$), et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée et majorée alors on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
2. Théorème : de la limite monotone : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (respectivement décroissante et minorée) alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \underset{n\in\mathbb{N}}{sup}(u_n)$ (respectivement $\underset{n\in\mathbb{N}}{inf}(u_n)$)
3. Théorème : des gendarmes : Soit $v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u \leq v \leq w$ et u, w convergentes alors v converge et $lim(u) \leq lim(v) \leq lim(w)$
4. Définition : Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors on dit que u et v sont adjacentes si u croissante, v décroissante et $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
5. Théorème : Dans ce cas, u, v convergent vers l et on a $u_n \leq l \leq v_n$
6. Exemple : Si $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ alors u et v sont adjacentes et convergent vers 1
7. Application : Critère des séries alternées : Si $u \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ décroissante de limite 0 alors la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente, $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ et $|R_n| \leq a_{n+1}$
8. Exemple : $\sum(-1)^{n-1} n^{-\alpha}$ est alternée donc convergente

2 Notions plus faibles que la convergence

2.1 Les suites de Cauchy

(Chapitre 1.4 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)

1. Définition : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |u_n - u_m| \leq \varepsilon$
2. Proposition : Si u converge alors u de Cauchy
3. Exemple : Si $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ alors u non de Cauchy donc non convergente
4. Proposition : Si u de Cauchy alors u bornée
5. Lemme : Si u de Cauchy et admet une suite extraite convergente alors u converge de même limite
6. Théorème : $\mathbb{K}$ est complet, ie toute suite de Cauchy est convergente
7. Application : Si $\sum u_n$ absolument convergente alors $\sum u_n$ convergente (Théorème 1.21 de Suites et série de Mohammed El Amrani)

2.2 Convergence en moyenne de Cesàro

(Exercice 1.8 de Suite et séries de Mohammed El Amrani)

1. Définition : On dit que v est la suite des moyennes de Cesàro de u si $v_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, et on dit que u convergence au sens de Cesàro si v converge
2. Théorème : Si u convergente alors u convergente au sens de Cesàro
3. Remarque : La réciproque est fausse
4. Exemple : Si $u_n = (-1)^n$ alors u ne converge pas mais converge au sens de Cesàro
5. Théorème : Si $u_n \in \mathbb{R}_+, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ et σ la suite des moyennes de Cesàro de S monotone alors S converge si et seulement si σ converge (Exercice 2.9 des Oraux X-ENS Analyse 1)

3 Valeurs d'adhérence de suites numériques

3.1 Lien entre valeurs d'adhérence et suites convergentes

(Chapitres 1.2 de Suites et séries de Mohammed El Amrani et 4.2 de Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : On dit que l est une valeur d'adhérence de u s'il existe une suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de u convergeant vers l
2. Exemple : Si $u_n = (-1)^n$ alors les valeurs d'adhérence de u sont -1 et 1

3. Proposition : Si u convergeante alors toutes les suites extraites convergent vers la même limite, autrement dit u n'admet qu'une seule valeur d'adhérence
4. Remarque : Il ne suffit pas qu'une sous-suite converge
5. Exemple : Si $u_n = n\mathbb{1}_{2\mathbb{Z}}(n)$ alors u admet 0 comme valeur d'adhérence mais ne converge pas
6. Théorème : u converge vers l si et seulement si l unique valeur d'adhérence de u et u bornée
7. Théorème de Bolzano-Weierstrass : Si u bornée alors u admet une valeur d'adhérence, ie une suite extraite convergente
8. Proposition : Si $u \in E^{\mathbb{N}}$ avec E compact et $d(u_n, u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors les valeurs d'adhérence de u forment un compact connexe de E
9. Application : Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, si $u_{n+1} = f(u_n)$ alors u converge si et seulement si $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

3.2 Cas particulier des valeurs d'adhérence des suites réelles et limites inférieures et supérieures

(Chapitre 4.7 de Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Proposition : Les suites $\underset{k\geq n}{sup}(u)$ et $\underset{k\geq n}{inf}(u)$ convergent dans $\overline{R}$
2. Définition : $\underset{n\in\mathbb{N}}{limsup}(u_n) = \underset{n\to+\infty}{lim}\underset{k\geq n}{sup}(u_k), \underset{n\in\mathbb{N}}{liminf}(u_n) = \underset{n\to+\infty}{lim}\underset{k\geq n}{inf}(u_k)$
3. Proposition : $\underset{n\in\mathbb{N}}{limsup}(u_n)$ et $\underset{n\in\mathbb{N}}{liminf}(u_n)$ sont deux valeurs d'adhérence de u
4. Corollaire : $\underset{n\in\mathbb{N}}{limsup}(u_n)$ est la plus grande valeur d'adhérence de u et $\underset{n\in\mathbb{N}}{liminf}(u_n)$ la plus petite
5. Exemple : Les valeurs des d'adhérence de $(e^{in})_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathbb{U}$, celles de $(cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont $[-1,1]$ (Exercice 4.16 de Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi)
6. Théorème : u converge si et seulement si $liminf(u) = limsup(u)$, dans ce cas $lim(u) = liminf(u) = limsup(u)$

4 Suite récurrente d'ordre 1 et applications

4.1 Définitions et exemples linéaires

(Chapitre 4.1.2 d'Analyse de Xavier Gourdon)
On considère $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$.

1. Définition : On dit que u est une suite récurrente d'ordre 1 si $u_{n+1} = f(u_n)$
2. Proposition : Si f croissante alors u monotone
3. Corollaire : Si f décroissante alors u_{2n} et u_{2n+1} monotones de sens opposés

4. Définition : On dit que u est arithmétique si $f(x) = x + a$ avec $a \in \mathbb{K}$
5. Proposition : Dans ce cas $u_n = u_0 + na$ et u converge si et seulement si $a = 0$
6. Définition : On dit que u est géométrique si $f(x) = qx$ avec $q \in \mathbb{K}$
7. Proposition : Dans ce cas $u_n = u_0 q^n$ et :
   — Si $q = 1$ alors $u_n = u_0$
   — Si $|q| < 1$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   — Si $|q| > 1$ alors u diverge
8. Définition : On dit que u est arithmético-géométrique si $f(x) = qx + a$ avec $a \in \mathbb{K}^*, q \in \mathbb{K}\backslash\{1\}$
9. Proposition : Dans ce cas $u_n = q^n(u_0 - r) + r$ avec $r = \frac{a}{1-q}$

4.2 Approche de points particuliers

(Chapitre 12.1 de Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi, Exercice 4.49 du Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière)

1. Théorème de point fixe de Picard : Soit F fermé de $\mathbb{K}$ et $f : F \longrightarrow F$ λ-contractante, alors f admet un unique point fixe $a \in \mathbb{K}$ et si $u_{n+1} = f(u_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ avec $d(a, u_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(u_1, u_0)$
2. Lemme : Soit $f : [c, d] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$, alors f admet un admet un unique point fixe $a \in]c, d[$ et pour tout $x \in [c, d]$, il existe $z \in [a, x]$ tel que $F(x) - a := x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x - a)^2$
3. Lemme : Dans ce cas il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in [c, d], |F(x) - a| \leq C|x - a|^2$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ soit stable par F
4. Théorème : Méthode de Newton : Dans ce cas, soit $x_0 \in I$, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ avec $x_{n+1} = F(x_n)$
5. Corollaire : Si de plus $f'' > 0$ alors $I = [a, d]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in I$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) avec $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$ et $x_{n+1} - a \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$
6. Application : Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = x^2 - y$, alors la méthode de Newton permet d'approcher $\sqrt{y}$