Leçon 236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Analyse de Xavier Gourdon
2. Théorie de l'intégration de Briane et Pagès
3. Suites et séries de Mohammed El Amrani
4. Les contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne
5. Analyse complexe de Patrice Tauvel
6. Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly

Développements.

1. Calcul d'une intégrale par un développement en série entière
2. Calcul d'une intégrale par théorème des résidus

Table des matières

1 Méthodes directes

1.1 Par une primitive

(Chapitre 3.2 d'Analyse de Xavier Gourdon)

1. Définition : Soit $f \in C^1([a,b])$, alors on dit que $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f si $\int_a^b f'(t)dt = F(b) - F(a)$
2. Remarque : Il n'y a pas unicité d'une primitive, $F(t) = \int_a^t f(s)ds + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
3. Exemple : Des primitives de x^α, $\frac{1}{x}$, e^x, a^x, $\frac{1}{1+x^2}$ sont $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, ln(x), e^x, \frac{a^x}{log(a)}, arctan(x)$
4. Application : $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$
5. Proposition : $\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^h} = \left[\frac{1}{(1-h)(x-c)^{h-1}}\right]_a^b$ si $h \neq 1$ et $\int_a^b \frac{dx}{x-c} = [ln(|x-c|)]_a^b$
6. Proposition : $\frac{ax+b}{(x^2+xs+d)^h} = \frac{2\alpha(x-p)}{((x-p)^2+q^2)^h} + \frac{\beta}{((x-p)^2+q^2)^h}$, une primitive du premier terme est $\frac{\alpha}{(1-h)((x-p)^2+q^2)^{h-1}}$ si $h \geq 2$ et $\alpha ln((x-p)^2+q^2)$ si $k=1$, et une primitive du second terme s'obtient par intégrations par parties successives
7. Théorème : L'intégrale d'une fonction rationnelle f s'obtient en décomposant f en éléments simples sur $\mathbb{R}$, puis on calcule les intégrales des éléments et on utilise la linéarité de l'intégration
8. Exemple : $\int_a^b \frac{1-x}{(x^2+x+1)^2}dx = \left[\frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_a^b$

1.2 Par intégration par parties

(Chapitres 1.5 et 11.3 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès et Exercice 3.1.4.1 d'Analyse de Xavier Gourdon)

1. Théorème : Soit $f, g \in C^1([a,b])$, alors $\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$
2. Exemple : $\int_0^x arctan(u)du = xarctan(x) - \frac{1}{2}ln(1+x^2)$
3. Définition : La n-ième intégrale de Wallis est $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)^n dx$
4. Proposition : $I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)...1}{2p(2p-2)...2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)...2}{(2p+1)(2p-1)...1}$
5. Application : Formule de Wallis : $\pi = \lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{p}\left(\frac{2p(2p-2)...2}{(2p-1)(2p-3)...1}\right)^2\right)$
6. Application : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$
7. Théorème : Soit $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $F(x) := \int_0^x f(t)dt, G(x) := \int_0^x g(t)dt$, alors $\int_0^x f(t)G(t)dt = F(x)G(x) - \int_0^x F(t)g(t)dt$

1.3 Par changement de variables

(Chapitres 3.1, 3.2 et 5.4.3 d'Analyse de Xavier Gourdon, 6.3 de Suites et séries de Mohammed El Amrani et 12.2 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

1. Théorème : Soit $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, $f : I \longrightarrow E$ continue par morceaux telle que $\varphi([a,b]) \subset I$, alors $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$
2. Application : Soit $f : [-a,a] \longrightarrow E$ continue par morceaux, si f paire alors $\int_a^{-a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ et si f impaire alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$
3. Exemple : En notant $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier réels de f, si f paire alors $b_n(f) = 0$ et si f impaire alors $a_n(f) = 0$
4. Application : Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ continue par morceaux et T-périodique alors $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$
5. Théorème : Soit U mesurable compact de $\mathbb{R}^n$, φ un C^1-difféomorphisme de $\overset{\circ}{U}$ vers $\varphi(\overset{\circ}{U})$ tel que J_φ se prolonge continûment surr U, alors $V = \varphi(U)$ est un compact mesurable de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\int_V f(v)dv = \int_U f(\varphi(u))|J_\varphi(u)|du$
6. Application : Soit $\varphi(r,\theta) = (rcos(\theta), rsin(\theta))$, alors φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{R}_- \times \{0\}]$ et pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$,
$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(rcos(\theta), sin(\theta))rdrd\theta$
7. Exemple : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
8. Proposition : Pour calculer $\int_0^1 sin(x)^m cos(x)^n dx$ on distingue deux cas :
— Si m ou n est impair alors on effectue le changement de variable $t = sin(x)$
— Si m et n sont impairs alors on linéarise cos^n et sin^m par les formules avec e^{ix}
9. Exemple : $\int_0^1 sin(x)^3 cos(x)^3 dx = \int_0^1 sin^3(1 - sin(x)^2)^2 cos(x)dx = \int_0^{sin(1)} t^3(1-t^2)^2 dt$ puis $\int_0^{sin(1)} t^3(1-t^2)^2dt = \int_0^{sin(1)}(t^3 - 2t^5 + t^7)dt = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{3} + \frac{t^8}{8}\right]_0^{sin(1)}$
10. Exemple : $\int_0^1 cos(x)^4 dx = \int_0^1 \left(\frac{cos(4x)}{8} + \frac{cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}\right) dx$

2 Méthodes indirectes

2.1 Interversion d'intégrales

(Chapitre 11.3 et 11.5 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

1. Théorème de Fubini-Tonelli : Soit $f : I \times J \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable, alors les fonctions $x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy$ et $y \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx$ sont définies presque partout et sont mesurables, de plus $\int_{I\times J} f(x,y)dxdy = \int_I \left(\int_J f(x,y)dy\right) dx = \int_J \left(\int_I f(x,y)dx\right) dy$
2. Exemple : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}dx = \sqrt{\pi}^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$
3. Application : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $F(x) := \int_0^x f(t)dt$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{F(ax)-F(x)}{x}dx = ln(a)\int_{\mathbb{R}_+} f(x)dx$
4. Théorème de Fubini : Soit $f \in L^1(I \times J)$, alors pour presque tout x, y, $f(x,\cdot) \in L^1(J), f(\cdot,y) \in L^1(I)$, de plus $x \longmapsto \int_J f(x,y)dy \in L^1(I), y \longmapsto \int_I f(x,y)dx \in L^1(J)$ et $\int_{I\times J} f(x,y)dxdy = \int_I \left(\int_J f(x,y)dy\right) dx = \int_J \left(\int_I f(x,y)dx\right) dy$

5. Application : La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^2 \longrightarrow L^2$ est auto-adjointe, ie $\int_{\mathbb{R}} f\mathcal{F}(g) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)g$
6. Remarque : On ne peut pas intervertir les intégrales mêmes si les fonctions partielles sont intégrables
7. Exemple : Soit $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, f(0,0) = 0$ sur $[0,1]^2$, alors $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right) dx$ (Exemple 14.19 des Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne)

2.2 Interversion limite et intégrale

(Chapitres 8.1, 8.2, 8.3 et 8.5 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

1. Théorème de convergence monotone : Soit f_n mesurable positive, alors $\underset{n\to+\infty}{lim} f_n$ est mesurable et $\int_I \underset{n\to+\infty}{lim} (f_n) = \underset{n\to+\infty}{lim} \left(\int_I f_n\right) \in \overline{\mathbb{R}}_+$
2. Théorème : Lemme de Fatou : Soit f_n mesurable positive, alors $0 \leq \int_I \underset{n\to+\infty}{liminf}(f_n) \leq \underset{n\to+\infty}{liminf} \left(\int_I f_n\right) \leq +\infty$
3. Théorème de convergence dominée : Soit $f_n \in L^1(I)$ tels que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{pp}{\longrightarrow}} f$ et il existe $g \in L^1(I)$ positive tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \overset{pp}{\leq} g$, alors $\int_I |f_n - f| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi $\int_I f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f$
4. Exemple : Soit $I_n(\alpha) := \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}dx$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $I_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si $\alpha \leq 1$ et $I_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha-1}$ si $\alpha > 1$
5. Théorème : Soit $\varphi_n : I \longrightarrow \overline{R}$ mesurable, alors si φ_n positive alors $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I \varphi_n$, et si $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |\varphi_n| < +\infty$ alors $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I \varphi_n$
6. Exemple : L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)}dx$ est convergente et $\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)}dx = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

2.3 Par théorème des résidus

(Chapitres 8.4, 15.1 et 15.2 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)

1. Définition : Soit U ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in M(U)$ et $a \in U$ pôle d'ordre m de f, alors le résidu de f en a est $Res(f,\alpha) := \alpha_{-1}$ avec $P(z) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{-k}(z-a)^{-k}$ la partie principale de f est a
2. Lemme : Soit γ chemin fermé dans U tel que $a \notin Im(\gamma)$, alors $\int_\gamma P(z)dz = Ind_\gamma(a)Res(f,a)$
3. Remarque : En pratique pour calculer $Res(f,a)$, on écrit $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ avec g, h holomorphes, alors si $m = 1$ alors $Res(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$ et si $m > 1$ alors $Res(f,a) = \underset{z\to a}{lim} \left(\frac{1}{(m-1)!}((z-a)^m f(z))^{(m-1)}\right)$

4. Théorème des résidus : Si U convexe, soit $a_1, ..., a_n \in U$ deux à deux distincts, si $f \in H(U \backslash \{a_1, ..., a_n\})$ et a_k est un pôle de f, si γ chemin fermé dans U tel que $a_k \notin Im(\gamma)$, alors $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} Ind_\gamma(a_k) Res(f, a_k)$
5. Application : Soit $I = \int_0^{2\pi} R(sin(t), cos(t))dt$ avec R fonction rationnelle sans pôle sur le cercle $Im(\gamma) = C(0,1)$, alors $I = 2\pi \sum Res\left(R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)\right)$ avec la somme portant sur les pôles appartenant à $D(0,1)$
6. Exemple : Si $R(x,y) = \frac{1}{a+y}$ avec $a > 1$ alors $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+cos(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$
7. Exemple : Soit $\alpha \in]-1,1[$, alors $I := \int_0^\infty \frac{t^\alpha ln(t)}{t^2-1} dt = \frac{\pi^2}{4cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^2}$

3 Méthodes numériques

3.1 Méthodes de quadrature

(Chapitres III.1 de Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly et 3.1.3 d'Analyse de Xavier Gourdon)

On considère $f : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Lemme : Formule de Chasles : Soit $\alpha = \alpha_0 < ... < \alpha_k = \beta$ une subdivision de $[\alpha, \beta]$, alors $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_i+1} f(x)dx$
2. Proposition : On approxime $\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx$ par $(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \sum_{j=0}^{l_i} \omega_{i,j} f(\xi_{i,j})$ avec $\xi_{i,j} \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}], 0 \leq j \leq l_i$ et $\sum_{j=0}^{l_i} \omega_{i,j} = 1$
3. Définition : La méthode de quadrature associée sera $\sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \sum_{j=0}^{l_i} \omega_{i,j} f(\xi_{i,j})$
4. Proposition : Pour $l_i = 0$ il s'agit de la somme de Riemann, $\sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\xi_i) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \int_\alpha^\beta f(x)dx$
5. Exemple : La méthode des rectangles à gauche (respectivement à droite) est pour $l_i = 0, \xi_i = \alpha_i$ (respectivement $\xi_i = \alpha_{i+1}$)
6. Exemple : La méthode du point milieu est pour $l_i = 0$ et $\xi_i = \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}$
7. Exemple : La méthode des trapèzes est pour $l_i = 1$, $\xi_{i,0} = \alpha_i$ et $\xi_{i,1} = \alpha_{i+1}$
8. Corollaire : Soit $f : [a,b] \longrightarrow E$ continue par morceaux, alors $\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)dx$
9. Exemple : Si $f(t) = \frac{1}{1+t}$ alors $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} log(2)$

3.2 Méthode de Monte-Carlo

(Exercice 10.8 de Probabilités tome 2 de Jean-Yves Ouvrard)

1. Théorème : Loi forte des grands nombres : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} \mathbb{E}(X_1)$
2. Application : Méthode de Monte-Carlo : Soit $f : [0,1]^d \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]^d$, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} \mathbb{E}(f(X)) = \int_{[0,1]^d} f(x)dx$
3. Remarque : Pour calculer $\int_D f(x)g(x)dx$ avec g densité d'une loi connue, on peut alors considérer $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de densité g pour obtenir $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} \mathbb{E}(f(X)) = \int_D f(x)g(x)dx$
4. Exemple : Pour calculer numériquement $\int_{\mathbb{R}} sin(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$, on peut considérer $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $f = sin$