Leçon 239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Théorie de l'intégration de Briane et Pagès
2. Analyse complexe d'Amar et Matheron
3. Analyse de Xavier Gourdon
4. Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li
5. Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch

Développements.

1. Prolongement holomorphe de la fonction Γ d'Euler
2. Transformation de Fourier sur L^2 et théorème de Plancherel

Table des matières

1 Propriétés sur les intégrales à paramètres **2**
1.1 Théorèmes de régularité . . . 2
1.2 Comportement asymptotique . . . 2

2 Produit de convolution **3**
2.1 Définition et propriétés . . . 3
2.2 Approximation de l'unité et suite régularisante . . . 3

3 Transformation de Fourier **4**
3.1 Sur l'espace L^1 . . . 4
3.2 Sur l'espace L^2 . . . 4
3.3 Diagonalisation de la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ (pas adaptée à la leçon) . . . 5

4 Utilisation en probabilités **5**
4.1 Fonctions caractéristiques . . . 5
4.2 Application à la convergence en loi . . . 5

1 Propriétés sur les intégrales à paramètres

1.1 Théorèmes de régularité

(Chapitres III.8.3 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès et 3.5.3 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron)

On considère I intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Théorème : de convergence dominée : Si $f_n \in L^1(I)$, presque partout $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ et il existe $g \in L^1(I)$ positif tel que presque partout $|f_n| \leq g$ alors $f \in L^1(I)$ et $\int_I f_n(x)d\mu(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(x)d\mu(x)$ et même $\int_I |f_n(x) - f(x)|d\mu(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
2. Théorème : de continuité sous le signe intégrale : Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{K}$ tel que $f(x,\cdot)$ mesurable sur J, presque partout $f(\cdot,t)$ est continue et il existe $g \in L^1$ positif tel que presque partout $|f(t,\cdot)| \leq g$, alors $f(t,\cdot) \in L^1$ et $F = \int_X f(\cdot,x)d\mu(x)$ continue
3. Application : Si $f \in L^1$ alors $F(u) = \int_x^a f(x)dx$ est continue sur $\mathbb{R}$
4. Théorème de dérivabilité sous le signe intégrale : Si $f(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$, presque partout, $f(\cdot,x)$ est dérivable et il existe $g \in L^1$ positif tel que presque partout $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)\right| \leq g$ alors $F = \int_X f(\cdot,x)d\mu(x)$ est dérivable et $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,c)dx$
5. Exemple : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}e^{-tx}dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit $\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}dx = F(0) = \frac{\pi}{2}$
6. Théorème d'holomorphie sous le signe intégrale : Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $f(z,\cdot)$ mesurable, et $f(\cdot,t)$ holomorphe et pour tout compact K de Ω, il existe $g \in L^1$ tel que $|f(z,\cdot)| \leq |g|$ sur K, alors $F(z) = \int_I f(z,t)dt$ est holomorphe et ses dérivées s'obtiennent en dérivant termes à termes
7. Application : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ se prolonge de manière en une fonction holomorphe sur $\mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R}$
8. Théorème : Γ se prolonge de façon unique en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{\mathbb{Z}_-\}$

1.2 Comportement asymptotique

(Chapitre 3.4.2 d'Analyse de Xavier Gourdon)

On considère $[a,b[\subset \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f, g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{C}, \mathbb{R}_+$ continues par morceaux.

1. Théorème d'intégration des relations de comparaison :
   - Si $\int_a^b g(t)dt$ est divergente alors, pour $x \to b$, si $f = O(g), = o(g), \sim g$ alors $\int_a^x f(t)dt = O\left(\int_a^x g(t)dt\right), = o\left(\int_a^x g(t)dt\right), \sim \int_a^x g(t)dt$
   - Si $\int_a^b g(t)dt$ est convergente alors, pour $x \to b$, si $f = O(g), = o(g), \sim g$ alors $\int_x^b f(t)dt = O\left(\int_x^b g(t)dt\right), = o\left(\int_x^b g(t)dt\right), \sim \int_x^b g(t)dt$
2. Exemple : Comme $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^{1-\alpha}}\right)$, on a $log(x) = o(x^\alpha)$
3. Lemme : Si $\alpha > -1, \beta > 0, c > 0, 0 < b \leq +\infty$ alors $J(t) = \int_0^b x^\alpha e^{-tcx^\beta}dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(ct)^{-\frac{\alpha}{\beta}}$

4. Théorème : Méthode de Laplace : Soit $g, h :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $x \longmapsto g(x)e^{h(x)} \in L^1(]0, +\infty[)$, $\exists \delta_0, \forall \delta \in]0, \delta_0[, \forall x \geq \delta, h(x) \leq h(\delta)$ et $g(x) \sim Ax^\alpha, h(x) = a - cx^\beta + o(\beta)$, alors $I(t) = \int_0^{+\infty} g(x)e^{th(x)}dx \sim \frac{A}{B}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) e^{at}(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}$
5. Corollaire : Si g, h de classe C^2 sur $]a, b[$ telles que $x \longmapsto g(x)e^{h(x)} \in L^1(]a, b[)$ et h' ne change de signe qu'un seul point $c \in]a, b[$ où de plus h atteint son maximum et où $g'(c) \neq 0, h''(c) > 0$ alors $\int_a^b g(x)e^{th(x)}dt \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) g(c)e^{th(c)}\sqrt{\frac{2}{-th''(c)}}$
6. Application : Comportement de $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}$

2 Produit de convolution

2.1 Définition et propriétés

(Chapitres 14.2, 14.3 et 14.5 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

1. Définition : $f * g(x) = \int_\mathbb{R} f(y)g(x-y)dy$ quand cette quantité a du sens
2. Théorème : Si :
   — $(f, g) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \times L^\infty_c(\mathbb{R})$ alors $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$
   — $(f, g) \in L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $f * g$ uniformément continue bornée par $\|f\|_p \|g\|_q$
   — $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
   — $(f, g) \in L^p(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$ alors $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$
3. Exemple : $\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]} = x\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + (2-x)\mathbb{1}_{]1,2]}(x)$ (Exercice III.1 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
4. Exemple : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ et $p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[-\varepsilon,0]}$, alors $(p_\varepsilon * f)(t) = \frac{1}{\varepsilon}(F(t+\varepsilon) - F(t))$ (Exercice III.2 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
5. Corollaire : La convolution est bilinéaire sur $L^1_{loc}(\mathbb{R}) \times L^\infty_c(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$ et sur $L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$
6. Corollaire : Soit $f, g \in C_c(\mathbb{R})$, alors $f * g \in C_c(\mathbb{R})$
7. Corollaire : $L^1(\mathbb{R})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre sans unité
8. Proposition : Si $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ alors $f * \varphi \in C^\infty$ et $(f * \varphi)'(x) = f * \varphi'(x)$

2.2 Approximation de l'unité et suite régularisante

(Chapitres 14.4 et 14.5 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès et X.2.1 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : On dit que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R})^\mathbb{N}$ est une unité approchée si $\int_\mathbb{R} \alpha_n d\lambda = 1, \underset{n\in\mathbb{N}}{sup} \int_\mathbb{R} |\alpha_n| d\lambda < +\infty$ et $\underset{n\to+\infty}{lim} \int_{(|x|>\varepsilon)} |\alpha_n| d\lambda = 0$
2. Exemple : Soit $\alpha \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\int_\mathbb{R} \alpha d\lambda = 1$ et $\alpha_n(x) = n^d\alpha(nx)$, alors $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité
3. Théorème : Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ alors $f * \alpha_n \xrightarrow[a\to 0]{L^p} f$

4. Définition : On dit que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une unité approchée et $\alpha_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$
5. Exemple : $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme précédemment avec $\alpha = \frac{\varphi}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx}$ et $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} \mathbb{1}_{]-1,1[}$
6. Théorème : $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$
7. Proposition : Soit K compact de $\mathbb{R}$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}$ tels que $K \subset \Omega$, alors il existe $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $f_{|K} = 1, f_{|\Omega^c} = 0, 0 \leq f \leq 1$
8. Application : $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ s'injecte dans l'espace des distributions $D'(\mathbb{R})$

3 Transformation de Fourier

3.1 Sur l'espace L^1

(Chapitre III.2.1 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi x\xi}dx$
2. Théorème : $\mathcal{F} \in L(L^1(\mathbb{R}), C_0(\mathbb{R}))$
3. Théorème : Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$
4. Corollaire : $\mathcal{F}$ est continue de norme 1
5. Théorème d'inversion : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, alors presque partout $f(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f \circ -id_{\mathbb{R}}))(x)$
6. Corollaire : $\mathcal{F}$ est injective

3.2 Sur l'espace L^2

(Chapitre III.2.3 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : $A(\mathbb{R}) = \{f \in L^1(\mathbb{R}), \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})\}$
2. Proposition : $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$
3. Théorème de Plancherel : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ se prolonge de façon unique en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui même
4. Proposition : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\varphi_A(y) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-2i\pi xy}dx$ alors, $\varphi_A \underset{A\to+\infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} \mathcal{F}(f)$
5. Proposition : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \mathcal{F}(y)e^{2i\pi xy}dy$, alors $\psi_A \underset{A\to+\infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} f$
6. Corollaire : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(y)e^{2i\pi xy}dy$
7. Exemple : Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\mathcal{F}\left(\frac{sin(2\pi\lambda x)}{2\pi\lambda x}\right)(y) = \frac{1}{2\lambda}\mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]}(y)$ (Exercice III.3.14 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
8. Proposition : Si $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ tel que $f' \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(f')(\xi) = 2i\pi\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$ (Exercice III.3.11 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
9. Proposition : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $x \longmapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(f) \in C^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f)'(\xi) = -2i\pi\mathcal{F}(xf(x))(\xi)$ (Exercice III.3.11 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

3.3 Diagonalisation de la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ (pas adaptée à la leçon)

(Exercices III.3.29 et III.3.30 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : On considère $\omega(t) = e^{-t^2}$ et $L^2(\omega) = L^2(\mathbb{R}, \mu)$ avec $d\mu = \omega d\lambda$
2. Théorème : Les polynômes sont denses dans $L^2(\omega)$
3. Lemme : $\omega^{(n)}(t) = (-1)^n H_n(t)\omega(t)$ avec H_n polynôme de degré n de coefficient dominant 2^n et appelé n-ième polynôme de Hermite
4. Théorème : $\left((\sqrt{\pi}2^n n!)^{-\frac{1}{2}} H_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\omega)$
5. Corollaire : Il existe une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ associées aux valeurs propres $(-i)^n$

4 Utilisation en probabilités

4.1 Fonctions caractéristiques

(Chapitre III.6 de Probabilités et statisitques de Chabanol et Ruch)
On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle.

1. Définition : $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}}, e^{itx} d\mathbb{P}_X(x)$ est la foncion caractéristique de X
2. Remarque : On l'appelle ainsi car la fonction caractéristique caractérise la loi de X
3. Proposition : ϕ_X est continue et bornée sur $\mathbb{R}$
4. Proposition : $\phi_{aX}(t) = \phi_X(at)$ et $\phi_{X+b}(t) = e^{itb}\phi_X(t)$
5. Proposition : Si X est symétrique alors ϕ_X est à valeurs réelles
6. Théorème : Si X admet un moment d'ordre k alors ϕ_X est k-fois dérivable et $\phi^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}(X^k)$
7. Proposition : Si X et Y deux variables aléatoires alors X et Y indépendantes si et seulement si $\phi_{(X,Y)}(t,s) = \phi_X(t)\phi_Y(s)$

4.2 Application à la convergence en loi

(Chapitre IV.4 et IV.6 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires.

1. Définition : On dit que $X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{loi}} X$ si $\forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}), \mathbb{E}(\varphi(X_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(\varphi(X))$
2. Théorème de Lévy : $X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{loi}} X$ si et seulement si $\phi_{X_n} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{CVS}} \phi_X$
3. Application : Théorème central limite : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes identiquement distribuées de moyenne $m = \mathbb{E}(X_1) \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 = Var(X_1) \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - nm\right) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{loi}} \mathcal{N}(0,1)$

4. Application : Dans ce cas si m inconnue et σ^2 connue alors la moyenne empirique est un estimateur asymptotiquement normal de m et on peut en déduire un intervalle de confiance