Leçon 241 Suites et séries de fonctions, exemples et contre-exemples

Dorian Cacitti-Holland

21 mai 2021

Références.

1. Suites et séries numériques et de fonctions de Mohammed El Amrani
2. Analyse de Xavier Gourdon
3. Analyse de Queffélec et Zuily
4. Objectif agrégation
5. Analyse numérique et équations différentielles de Florent Berthelin
6. Théorie de l'intégration de Briane et Pagès
7. Les contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne
8. Analyse complexe d'Amar et Matheron (pas la place)
9. Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch
10. Probabilités tome 1 de Jean-Yves Ouvrard

Développements.

1. Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein
2. Théorème de convergence de Féjer

Table des matières

1 Suites de fonctions

1.1 Convergences simple et uniforme

(Chapitre 3.1 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)
On considère un ensemble X, un espace vectoriel normé E et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (E^X)^{\mathbb{N}}$.

1. Définition : On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(E^X\right)^{\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : X \longrightarrow E$ si $\forall x \in X, f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$
2. Exemple : Sur $[0,1]$, $x^n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} \delta_1$
3. Définition : On dit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$
4. Proposition : $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f \Rightarrow f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$
5. Remarque : La réciproque est fausse en général, $(x^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers δ_1 sur $[0,1]$
6. Théorèmes de Dini : Si $X = [a,b] \subset \mathbb{R}, E = \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite croissante de fonctions (ou suite de fonctions croissantes) continues convergeant simplement vers f continue alors la convergence est uniforme (Exercice 4.3.5 d'Analyse de Xavier Gourdon)
7. Théorème : Si E est complet alors $B(X,E)$,muni de $\|\cdot\|_\infty = \underset{x\in X}{sup}\|\cdot(x)\|$ est un espace vectoriel normé complet

1.2 Continuité et dérivabilité des suites de fonctions

(Chapitres 3.2 et 3.3 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)

1. Théorème : Si f_n continue et $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ alors f continue
2. Remarque : La convergence simple n'est pas suffisante, si $f_n(x) = e^{-nx}$ alors $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} \delta_0$ non continue
3. Théorème de la double limite : Si $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CU}{\longrightarrow}} f$, $f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b_n$ et E complet alors $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$, ie $\underset{n\to+\infty}{lim}\underset{x\to a}{lim}(f_n(x)) = \underset{x\to a}{lim}\underset{n\to+\infty}{lim}(f_n(x))$
4. Théorème : Si f_n dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ et $f_n' \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} g$ alors f dérivable et $f' = g$
5. Remarque : La convergence uniforme des f_n ne suffit pas, si $f_n(x) = \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ alors $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} |\cdot|$ non dérivable en 0
6. Théorème de Weierstrass : Les fonctions polynomiales sont denses dans $C([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, autrement dit pour tout f continue sur $[a,b]$ il existe une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f (Chapitre XIII.II.1.c d'Analyse de Queffélec et Zuily)

2 Les suites de fonctions au service de la densité dans L^p

2.1 Dans $L^2(I,\rho)$ avec les polynômes orthogonaux

(Chapitres 3.1.5 d'Objectif agrégation et II.5 d'Analyse numérique et équations différentielles de Florent Berthelin)

1. Définition : Soit $\rho : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurable, alors on dit que ρ est une fonction poids si $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x)dx < +\infty$
2. Exemple : $\rho(x) = e^{-x^2}$ est une fonction poids
3. Proposition : $L^2(I,\rho) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{C}, \int_I |f(x)|^2 \rho(x)dx < +\infty\}$ est un espace de Hilbert pour $\langle f, g\rangle = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$
4. Théorème : Il existe une unique suite de polynômes unitaires $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de degrés respectifs n, deux à deux orthogonaux, appelés polynômes orthogonaux pour ρ
5. Remarque : Ils s'obtiennent par procédé d'othogonalisation de Gram-Schmidt de la famille libre $(1, x, ...x^n, ...)$
6. Exemple : Si $I = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \rho(x) = e^{-x^2}$ alors il s'agit des polynômes de Hermite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, x, x^2 - \frac{1}{2}, x^3 - \frac{3}{2}x, ...\right), H_n = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d(e^{-\frac{x^2}{2}})}{dx}$
7. Lemme : Soit $f \in L^2(I,\rho)$, alors il existe un unique polynôme $r_n \in \mathcal{P}_n$, appelé polynôme de meilleur approximation quadratique de f à l'ordre n, tel que $\|f - r_n\| = d(f, \mathcal{P}_n)$ et r_n
8. Théorème : Si I est borné et $f \in L^2(I,\rho)$ alors $\|f - r_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
9. Théorème : S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$ alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$
10. Corollaire : Les polynômes de Hermite forment une base hilbertienne de $L^2(I, e^{-x^2})$

2.2 Dans $L^p(I)$ avec les suites régularisantes

(Chapitres 14.4 et 14.5 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

1. Définition : On dit que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ est une unité approchée si $\int_{\mathbb{R}} \alpha_n d\lambda = 1, \underset{n\in\mathbb{N}}{sup} \int_{\mathbb{R}} |\alpha_n| d\lambda < +\infty$ et $\underset{n\to+\infty}{lim} \int_{(|x|>\varepsilon)} |\alpha_n| d\lambda = 0$
2. Exemple : Soit $\alpha \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\int_{\mathbb{R}} \alpha d\lambda = 1$ et $\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx)$, alors $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité
3. Théorème : Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ alors $f * \alpha_n \xrightarrow[a\to 0]{L^p} f$
4. Définition : On dit que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une unité approchée et $\alpha_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$
5. Exemple : $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme précédemment avec $\alpha = \frac{\varphi}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx}$ et $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} \mathbb{1}_{]-1,1[}$
6. Théorème : $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$
7. Proposition : Soit K compact de $\mathbb{R}$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}$ tels que $K \subset \Omega$, alors il existe $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $f_{|K} = 1, f_{|\Omega^c} = 0, 0 \le f \le 1$

3 Séries de fonctions

3.1 Différentes convergences

(Chapitre 4.1 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)

1. Définition : On dit que $\sum f_n$ converge simplement si $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement
2. Exemple : $\sum xe^{-kx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \sum_{k=0}^{+\infty} xe^{-kx} = \frac{x}{1-e^{-x}}$
3. Définition : On dit que $\sum f_n$ converge uniformément si $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément
4. Remarque : Si $\sum f_n$ converge uniformément alors $\sum f_n$ converge simplement
5. Proposition : Si $\sum f_n$ converge uniformément alors (f_n) converge uniformément vers 0
6. Remarque : La réciproque est fausse, $\left(\frac{1}{n^x}\right)$ converge uniformément vers 0 sur $]1, +\infty[$ mais $\sum \frac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$
7. Remarque : On peut également parler de convergence uniforme sur tout compact
8. Exemple : $\sum xe^{kx}$ converge uniformément sur tout compact
9. Définition : On dit que $\sum f_n$ converge normalement si $f_n \in B(X, E)$ et $\sum \|f_n\|_\infty$ converge
10. Théorème : Si $\sum f_n$ converge normalement alors $\sum f_n$ converge uniformément et $\|\sum f_n\|_\infty \leq \sum \|f_n\|_\infty$

3.2 Préservation de la régularité

(Chapitres 4.2, 4.3 et 4.4 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)

1. Théorème d'interversion entre limite et série : Si $f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_n$ et $\sum f_n$ converge uniformément alors $\sum l_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$
2. Remarque : Autrement dit on peut intervertir limite et sommation
3. Théorème de continuité sous le signe somme : Si f_n continue et $\sum f_n$ converge uniformément (sur tout compact) alors $\sum f_n$ continue
4. Exemple : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n|x|}}{n^2}$ continue sur $\mathbb{R}$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ continue sur $]1, +\infty[$
5. Remarque : La convergence simple ne suffit pas
6. Exemple : $\sum (1-x)x^n$ converge simplement sur $[0, 1]$ de fonction somme δ_1 non continue (Exemple 13.9 des Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne)
7. Théorème de dérivation sous le signe somme : Si f_n dérivable, $\sum f_n$ converge simplement et $\sum f_n'$ converge uniformément (sur tout compact) alors $\sum f_n$ dérivable et $(\sum f_n)' = \sum f_n'$
8. Exemple : $\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ln(n)}{n^x}$

4 Séries entières (pas la place)

4.1 Cas de séries de fonctions définies avec un rayon de convergence

(Chapitres 5.1, 5.3 et 5.4 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)

1. Définition : On appelle série entière toute série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n(z) = a_n z^n$
2. Lemme d'Abel : Si $(a_n z_0^n)$ bornée alors $\sum a_n z^n$ converge absolument sur $D(0, |z_0|)$
3. Théorème : Il existe un unique $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, appelé rayon de convergence, tel que :
   — $\sum a_n z^n$ converge absolument sur $D(0, R)$
   — $\sum a_n z^n$ diverge sur $\mathbb{C} \backslash \overline{D}(0, R)$
4. Remarque : R est la borne supérieure des $r \in \mathbb{R}_+$ tels que $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée
5. Proposition : Règle de D'Alembert : Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} L \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ alors $R = \frac{1}{L}$
6. Théorème : Formule de Hadamard : $R = \left(\underset{n \to +\infty}{limsup} |a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$
7. Corollaire : Règle de Cauchy : Si $|a_n|^{\frac{1}{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alors $R = \frac{1}{L}$
8. Théorème : $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact de $D(0, R)$
9. Corollaire : $\sum a_n z^n$ est coninue sur $D(0, R)$

4.2 Fonctions développables en série entière

(Chapitres 5.5 de Suites et séries de Mohammed El Amrani et 3.4 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron)

1. Définition : On dit que f est développable en série entière (en 0) s'il existe une série $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in]0, R]$ tel que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sur $D(0, r)$
2. Exemple : Tout polynôme est développable en série entière grâce à la formule de Taylor
3. Théorème : Si f développable en série entière alors il existe un voisinage de 0 sur lequel f est de classe C^∞ et son développement est $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$
4. Remarque : La réciproque est fausse, $e^{-\frac{1}{x^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ est de classe C^∞ mais non développable en série entière
5. Théorème : Si $f \in H(D(0, R))$ alors $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ avec convergence normale sur tout compact de $D(0, R)$
6. Remarque : On a également $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$
7. Corollaire : Si $f \in H(\Omega)$ avec Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$ tel que $f^{(n)}(0)$ alors $f = 0$
8. Application : Principe de prolongement analytique : Si $f, g \in H(\Omega)$ coïncident sur un ouvert non vide alors $f = g$

5 Séries de Fourier

5.1 Coefficients de Fourier et noyaux

(Chapitres IV.I.2, IV.II.1 et IV.II.2 Analyse de Queffélec et Zuily)

1. Définition : Le n-ième coefficient de Fourier de $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ est $c_n(f) = \langle e_n, f \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$, et on note $S_N(f)(x) = \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$
2. Théorème : $\gamma : f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}) \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ est un morphisme d'algèbre continue de norme 1
3. Définition : Le noyau de Dirichlet est $D_N = \sum\limits_{n=-N}^{N} e_n$
4. Proposition : D_N pair, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 1, D_N(x) = \frac{sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}, S_N(f) = f * D_N$
5. Définition : Le noyau de Féjer est $K_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} D_n$
6. Remarque : Il s'agit de la suite des moyennes de Cesàro du noyau de Dirichlet
7. Proposition : $K_N = \sum\limits_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e_n, K_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2, \|K_N\|_1 = 1, 0 < \delta \leq \pi \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|x|\leq\pi} K_N(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sigma_N(f) := \frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} S_n(f) = f * K_N = \sum\limits_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)c_n(f)e_n$

5.2 Convergence des séries de Fourier

(Chapitre IV.III.1, IV.III.2 et IV.III.3 d'Analyse de Queffélec et Zuily)

1. Théorème de convergence de Féjer : Si $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\sigma_N(f) \underset{N\to+\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ et si $f \in L^p_{2\pi}$ alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\sigma_N(f) \underset{N\to+\infty}{\overset{L^p}{\longrightarrow}} f$
2. Corollaire : Si $f, g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ alors $\gamma(f) = \gamma(g) \iff f = g$
3. Corollaire : Si $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ de classe C^1 par morceaux alors $f = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$
4. Application : Les polynômes trigonométriques sont denses dans $C_{2\pi}(\mathbb{R})$
5. Application : $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$
6. Théorème de Dirichlet : Si $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ tel que f admette des limites à droite et à gauche de x_0 et des dérivées à droite et à gauche en x_0 alors $S_N(f)(x_0) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(f^+ + f^-)$

6 Suites et séries de fonctions en probabilités

6.1 Fonctions caractéristiques d'une suite de variables aléatoires

(Chapitres IV.4 et III.6 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)

On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variables aléatoires et X une variable aléatoire réelle.

1. Définition : $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}}, e^{itx} d\mathbb{P}_X(x)$ est la foncion caractéristique de X
2. Remarque : On l'appelle ainsi car la fonction caractéristique caractérise la loi de X
3. Proposition : ϕ_X est continue et bornée sur $\mathbb{R}$
4. Théorème : Si X admet un moment d'ordre k alors ϕ_X est k-fois dérivable et $\phi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$
5. Théorème de Lévy : $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{loi} X$ si et seulement si $\phi_{X_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{CVS} \phi_X$
6. Application : Théorème central limite : Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indépendantes identiquement distribuées de moyenne $m = \mathbb{E}(X_1) \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 = Var(X_1) \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k - nm \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1)$
7. Application : Dans ce cas si m inconnue et σ^2 connue alors la moyenne empirique est un estimateur asymptotiquement normal de m et on peut en déduire un intervalle de confiance

6.2 Fonctions génératrices

(Chapitre 5.3 de Probabilités tome 1 de Jean-Yves Ouvrard et IV.7 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)

On considère X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Définition : $G_X = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) s^n$
2. Exemple : Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $G_X = (sp + 1 - p)^n$
3. Théorème : G_X est continue sur $[-1, 1]$ et de classe C^∞ sur $]-1, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$
4. Corollaire : G_X caractérise la loi de X
5. Proposition : Si X, Y indépendantes alors $G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)$
6. Théorème : X admet un moment d'ordre k si et seulement si G_X est k-fois dérivable à gauche en 1, dans ce cas pour $k = 1$, $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$
7. Application : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires discrètes, T variable aléatoire dans $\mathbb{N}$ toutes indépendantes, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $S = S_T$, alors $G_S = G_T \circ G_{X_1}$
8. Théorème : $(G_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers G_X si et seulement si $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{loi} X$
9. Application : Si $X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ alors $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{loi} \mathcal{P}(\lambda)$