Leçon 243 Séries entières, propriétés de la somme, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Suites et séries de Mohammed El Amrani
2. Analyse de Xavierr Gourdon
3. Analyse complexe d'Amar et Matheron
4. Analyse complexe de Patrice Tauvel
5. Probabilités tome 1 de Jean-Yves Ouvrard
6. Analyse de Queffélec et Zuily
7. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi

Développements.

1. Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible
2. Calcul d'une intégrale par un développement en série entière

Table des matières

1 Séries de fonctions particulières

1.1 Sur un disque avec un rayon de convergence

(Chapitre 5.1 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)
On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

1. Définition : Une série entière est une série de fonctions $\sum a_n z^n$ et la somme de la série entière est la fonction $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n z^n$ converge
2. Lemme d'Abel : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors pour $z \in D(0, |z_0|)$, $\sum a_n z^n$ converge absolument
3. Corollaire : Il existe un unique $R \in \mathbb{R}_+^*$ (appelé rayon de convergence) tel que pour $z \in \mathbb{C}$, si $|z| < R$ alors $\sum a_n z^n$ converge et si $|z| > R$ alors $\sum a_n z^n$ diverge
4. Remarque : On a $R = sup(r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée)
5. Remarque : $D(0, R)$ est le disque de convergence, $C(0, R)$ est le cercle d'incertitude : $R\left(\sum z^n\right) = 1$ mais $\sum 1^n$ diverge, $R\left(\sum \frac{z^n}{n^2}\right) = 1$ mais $\sum \frac{1^n}{n^2}$ converge
6. Proposition : Règle de Cauchy : Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \in \overline{\mathbb{R}}_+$ alors $R = \frac{1}{L}$
7. Exemple : $R\left(\sum \frac{z^n}{n!}\right) = +\infty$
8. Théorème : Formule de Hadamard : $R = \left(\underset{n\to+\infty}{limsup} |a_n|^{\frac{1}{n}}\right)$
9. Exemple : $R\left(\sum 2^n z^{2n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
10. Corollaire : Règle de Cauchy : Si $|a_n|^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$ alors $R = \frac{1}{L}$

1.2 Opérations sur les séries entières

(Chapitre 5.2 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)
On considère $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

1. Définition : La série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ est appelée somme des séries entières
2. Proposition : $R(\sum (a_n + b_n) z^n) \geq min(R_a, R_b)$
3. Remarque : On peut avoir $R > max(R_a, R_b)$
4. Exemple : $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ sont de rayon de convergence 1 mais la série somme est la fonction nulle donc de rayon de convergence infini
5. Définition : La série entière $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est appelé le produit de Cauchy des séries entières
6. Proposition : $R(\sum c_n z^n) \geq min(R_a, R_b)$ et si $|z| < min(R_a, R_b)$ alors $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$
7. Définition : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, alors la série entière $\sum \lambda a_n z^n$ est appelé la série produit

8. Remarque : On peut avoir $R > max(R_a, R_b)$
9. Exemple : Si $a_n = 2^n, a_0 = 2, b_n = 1, b_0 = -1$ alors $R_a = \frac{1}{2}, R_b = 1$ mais leur produit de Cauchy est la fonction nulle donc de rayon de convergence infini
10. Proposition : $R(\sum \lambda a_n z^n) = R_a$
11. Définition : La série entière dérivée de $\sum a_n z^n$ est $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$
12. Proposition : Une série entière a même rayon de convergence que sa série entière dérivée

1.3 Régularité de la fonction somme

(Chapitres 5.3 et 5.4 de Suites et séries de Mohammed El Amrani et 4.4 d'Analyse de Xavier Gourdon)

1. Théorème : $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact de $D(0, R)$
2. Corollaire : La fonction somme S est continue sur $D(0, R)$
3. Remarque : En général il n'y pas convergence uniforme sur le disque de convergence
4. Exemple : $\sum z^n$ ne converge pas uniformément sur $D(0, 1)$ car $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle
5. Théorème d'Abel angulaire : Si $R = 1$ et $\sum a_n$ converge, soit $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, Δ_{θ_0} défini en annexe, alors $S(z) \underset{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}}{\longrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ (Exercice 4.10 d'Analyse de Xavier Gourdon)
6. Remarque : La réciproque est fausse
7. Exemple : $\sum (-1)^n$ diverge mais $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n \underset{\substack{z\to+\infty\\ |z|<1}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$
8. Théorème taubérien faible : Si $R = 1$, il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) \underset{\substack{z\to+\infty\\ |z|<1}}{\longrightarrow} S$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $\sum a_n$ converge et $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ (Exercice 4.11 d'Analyse de Xavier Gourdon)
9. Théorème : Si $\sum a_n x^n$ série entière entière de variable réelle alors la fonction somme S est de classe C^∞ sur $]-R, R[$

2 Lien avec l'analycité

2.1 Fonctions analytiques, développables en série entière

(Chapitres 3.1 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron et 5.5 et 5.7 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)

1. Définition : On dit que f est développable en série entière en 0 s'il existe $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in]0, R[$ tel que $D(0, r) \subset \Omega$ et $\forall z \in D(0, r), f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, et on dit que f est développable en série entière en $z_0 \in \Omega$ si $f(\cdot - z_0)$ l'est en 0, dans ce cas on dit que f est analytique

2. Exemple : Les polynômes sont analytiques et leur développement est donné par la formule de Taylor
3. Théorème : Si f analytique alors f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable
4. Remarque : La réciproque est fausse dans le cas réel
5. Exemple : Si $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ alors f n'est pas développable en série entière
6. Application : C'est à partir du développement en série entière réel qu'on pense à prolonger la fonction sur $\mathbb{C}$
7. Exemple : On peut définir $cos(z), sin(z), ch(z), sh(z)$ à partir de leur développement en série entière réelle
8. Exemple : Le développement en série entière de la fonction $\frac{1}{1+z^2}$ est $\sum(-1)^n z^{2n}$ de rayon de convergence 1
9. Application : L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)} dx$ est convergente et $\int_0^{+\infty} \frac{x}{ch(x)} dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

2.2 Fonctions holomorphes et principe du prolongement analytique

(Chapitres 3.3, 3.4, 3.5, 4.4 et 4.7 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron et 6.4 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)

On considère Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

1. Théorème de Cauchy : Si $f \in H(\Omega)$ et Ω convexe alors pour tout chemin fermé γ dans Ω, $\int_\gamma f(z)dz = 0$
2. Corollaire : Formule de Cauchy : Dans ce cas, $f(z) Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$
3. Théorème : Si f holomorphe sur $D(z_0, r) \subset \Omega$ alors f analytique sur $D(z_0, r)$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{[n)}(z_0)}{n!} z^n$ avec convergence normale sur tout compact
4. Corollaire : Si $f \in H(D(0, R))$ alors les coefficients c_n de son développement en série entière dans $D(0, R)$ sont déterminés de manière unique, plus précisément, $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$
5. Corollaire : Si $f \in H(\Omega)$ alors f est analytique sur Ω, et si toutes les dérivées de f s'annulent en un point alors $f = 0$
6. Théorème : Principe du prolongement analytique : Si Ω connexe, soit $f, g \in H(\Omega)$ coïncidant sur un ouvert de Ω, alors $f = g$
7. Application : Dans ce cas, $H(\Omega)$ est un anneau intègre, ce qui n'est pas le cas de $C^\infty(\Omega)$
8. Théorème : Si Ω connexe et f holomorphe non nulle, soit $a \in \Omega$ tel que $f(a) = 0$, alors f ne s'annule pas sur un voisinage de a
9. Théorème de Liouville : Si $\Omega = \mathbb{C}$ et $f \in H(\Omega)$ bornée alors f est constante
10. Application : Théorème de D'Alembert-Gauss : Tout polynôme complexe est scindé

2.3 Séries de Laurent

(Chapitre 4.5 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron)

1. Lemme : Soit $C = C(a, r_1, r_2)$ couronne de $\mathbb{C}$, si f holomorphe sur C alors $\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$ est indépendant de $r \in]r_1, r_2[$
2. Définition : Le n-ième coefficient de Laurent de f est $c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$, et la série de fonctions $\sum c_n(z-a)^n$ s'appelle la série de Laurent de f en a
3. Exemple : Si f holomorphe sur $D(a, r_2)$ alors la série de Laurent de f est la série de Taylor de f
4. Théorème : $\sum\limits_{n \geq 0} c_n(z-a)^n$ converge normalement sur tout compact de $D(a, r_2)$, $\sum\limits_{n>0} c_{-n}(z-a)^{-n}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C} \backslash D(a, r_1)$, et $\forall z \in C, f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$

3 Utilisation dans divers domaines

3.1 En probabilités avec les fonctions génératrices

(Chapitre 5.3 de Probabilités tome 1 de Jean-Yves Ouvrard et IV.7 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)

On considère X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Définition : $G_X = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)s^n$
2. Exemple : Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $G_X = (sp + 1 - p)^n$
3. Théorème : G_X est continue sur $[-1, 1]$ et de classe C^∞ sur $]-1, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$
4. Corollaire : G_X caractérise la loi de X
5. Proposition : Si X, Y indépendantes alors $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$
6. Théorème : X admet un moment d'ordre k si et seulement si G_X est k-fois dérivable à gauche en 1, dans ce cas pour $k = 1$, $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$
7. Application : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires discrètes, T variable aléatoire dans $\mathbb{N}$ toutes indépendantes, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $S = S_T$, alors $G_S = G_T \circ G_{X_1}$
8. Théorème : $(G_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers G_X si et seulement si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} X$
9. Application : Si $X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} \mathcal{P}(\lambda)$

3.2 En équations différentielles avec les solutions développables en série entière

(Chapitre X.VI.3 d'Analyse de Queffélec et Zuily)

1. Remarque : Pour l'équation $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, il est intéressant de chercher une solution particulière développable en série entière si p et q le sont, en particulier si ce sont des polynomes
2. Théorème : Si $p = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n x^n$ et $q = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} q_n x^n$ sont convergentes sur $B(0,R)$ alors pour tout $(a_0, a_1) \in K^2$, il existe une unique solution y de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, y(0) = a_0, y'(0) = a_1$, de plus y est développable en série entière convergente sur $]-R, R[$
3. Exemple : La solution de l'équation d'Airy $y'' + xy = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$ est donnée par $\sum a_n x^n$ avec $a_{3p+1} = a_{3p+2} = 0, a_0 = 1, a_{3p} = (-1)^p \prod\limits_{j=1}^{p} \frac{1}{(3j-1)3j}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$
4. Remarque : Cette méthode s'adapte pour des équations linéaires d'ordre plus élevé du type $y''' + py'' + qy' + sy = 0$

3.3 En algèbre linéaire avec les séries matricielles

(Chapitres 23.1 et 23.2 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)

1. Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors le rayon spectral de A est $\rho(A) = sup(|\lambda|, \lambda \in Sp(A))$
2. Remarque : Dans ce cas, $\rho(A^k) = \rho(A)^k$ et $\rho(A) \leq \|A\|$ pour toute norme matricielle
3. Théorème : Soit $\sum a_n z^n$ série entirère de rayon de convergence $R > 0$, si $\rho(A) < R$, alors $\sum a_n A^n$ est normalement convergente et si $\rho(A) > R$ alors $\sum a_n A^n$ diverge
4. Théorème : Dans ce cas, si $\rho(A) < R$ alors $f(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$ est un polynôme en A
5. Théorème : Dans ce cas, si $\rho(A) = 0$ alors $\varphi(t) = f(tA)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et si $0 < \rho(A) < R$ alors elle est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{R}{\rho(A)}, \frac{R}{\rho(A)}\right[$, dans les deux cas $\varphi'(t) = Af'(tA)$
6. Exemple : La fonction $exp(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est continue sur $M_n(\mathbb{C})$, et même différentiable sur $M_n(\mathbb{C})$