Leçon 245 Fonctions d'une variable complexe, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Analyse complexe d'Amar et Matheron
2. Analyse complexe et applications de Queffélecs
3. Suites et séries de Mohammed El Amrani
4. Analyse complexe de Patrice Tauvel
5. Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan
6. Analyse de Queffélec et Zuily

Développements.

1. Théorème des familles normales de Montel
2. Prolongement holomorphe de la fonction Γ d'Euler
3. Calcul d'une intégrale par théorème des résidus

Table des matières

1 Des polynômes aux fonctions analytiques

1.1 Polynômes complexes

(Chapitres 4.7 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron et Analyse complexe et applications de Queffélecs)

On considère Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

1. Définition : On dit que P est une fonction polynomiale sur Ω s'il existe $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$ tels que $\forall z \in \Omega, P(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$ et $a_n \neq 0$, le degré de P est alors n
2. Exemple : $P(z) = z^2 + 1$ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$
3. Proposition : Toute fonction polynômiale P sur $\mathbb{C}$ est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable, $P^{(n+1)} = 0$ et $P(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}}{k!}(a)(z-a)^k$ pour tout $a \in \mathbb{C}$
4. Théorème : Soit P fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$ de degré $n \geq 1$, alors $|P(z)| \underset{|z| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) \neq 0$, alors a n'est pas un maximum local, et P possède une racine dans $\mathbb{C}$
5. Corollaire : Théorème de D'Alembert Gauss : Tout polynôme sur $\mathbb{C}$ est scindé
6. Application : Toute matrice complexe admet une valeur propre

1.2 Séries entières

(Chapitres 5.1, 5.3 et 5.4 de Suites et séries de Mohammed El Amrani et 3.1 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron)

1. Définition : Une série entière est une suite de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n(z) = a_n z^n$
2. Lemme d'Abel : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée, alors pour tout $z \in D(0, |z_0|)$, $\sum a_n z^n$ converge
3. Définition : La rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R = sup(r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}\text{bornée})$
4. Exemple : Le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$
5. Théorème : $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact de $D(0, R)$
6. Corollaire : $\sum a_n z^n$ est continue sur $D(0, R)$
7. Théorème : $\sum a_n z^n$ est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(0, R)$ et ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme

1.3 Fonctions analytiques

(Chapitres 3.1 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron et 5.5 et 5.7 de Suites et séries de Mohammed El Amrani)

1. Définition : On dit que f est développable en série entière en 0 s'il existe $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in]0, R[$ tel que $D(0, r) \subset \Omega$ et $\forall z \in D(0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, et on dit que f est développable en série entière en $z_0 \in \Omega$ si $f(\cdot - z_0)$ l'est en 0, dans ce cas on dit que f est analytique

2. Exemple : Les polynômes sont analytiques et leur développement est donné par la formule de Taylor
3. Théorème : Si f analytique alors f est $\mathbb{C}$-dérivable
4. Remarque : Ce n'est pas le cas pour les fonctions réelles de classe C^∞
5. Exemple : Si $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ alors f n'est pas développable en série entière
6. Application : C'est à partir du développement en série entière réel qu'on pense à prolonger la fonction sur $\mathbb{C}$
7. Exemple : On peut définir $e^z, cos(z), sin(z), ch(z), sh(z)$ à partir de leur développement en série entière réelle

1.4 Argmuments et logarithmes complexes

(Chapitre 5.3 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)

1. Définition : Soit U ouvert de $\mathbb{C}^*$, alors on appelle détermination continue de l'argument sur U toute application continue $\theta : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $z \in U$, $\theta(z)$ soit un argument de z, ie $e^{i\theta(z)} = \frac{z}{|z|}$
2. Exemple : Un argument de i est $\frac{\pi}{2}$
3. Proposition : Soit U ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$ et θ_1, θ_2 deux déterminations continues de l'argument sur U, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$
4. Exemple : La détermination continue principale de l'argument sur $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ est celle à valeurs dans $]-\pi, \pi[$ et est noté Arg
5. Définition : Soit U ouvert de $\mathbb{C}^*$, alors on appelle détermination continue du logarithme sur U toute application continue $log : U \longrightarrow \mathbb{C}^*$ telle que, pour tout $z \in U$, $log(z)$ soit un logarithme de z, ie $e^{log(z)} = z$
6. Exemple : Un logarithme de $2i$ est $ln(2) + i\frac{\pi}{2}$
7. Proposition : Soit U ouvert de $\mathbb{C}^*$, alors toute détermination continue du logarithme sur U s'écrit $ln(|\cdot|) + iarg$ avec arg détermination continue de l'argument sur U
8. Exemple : On appelle détermination continue principale du logarithme celle associée à Arg et on la note Log
9. Proposition : Soit $z \in D(0,1)$, alors $Log(1+z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$

2 Fonctions holomorphes

2.1 Dérivabilité au sens complexe

(Chapitre 3.1 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron)

1. Définition : On dit que f est holomorphe sur Ω si f est de classe C^1 et $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω, on note $H(\Omega)$ leur ensemble
2. Exemple : $id_{\mathbb{C}}$ est holomorphe mais $z \longmapsto \overline{z}$ bien qu'elle soit C^∞ sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

3. Proposition : $H(\Omega)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre et si f, g holomorphes alors $f \circ g$ et $\frac{f}{g}$ sont holomorphes quand elles sont bien définies
4. Théorème : Equations de Cauchy-Riemann : f holomorphe si et seulement si $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ avec $u = Re(f), v = Im(f)$

2.2 Intégrale curviligne

(Chapitres 6.2 et 6.3 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)

1. Définition : Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ un chemin continu, alors $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$
2. Exemple : Soit $D(z_0, r) \subset \Omega$, alors $\int_{C(z_0,r)} f(z)dz = ir \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})e^{it}dt$
3. Définition : Soit γ un chermin fermé de $\mathbb{C}$ et $U = \mathbb{C} \backslash Im(\gamma)$ (ouvert) et $z \in U$, alors $Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ est appelé l'indice de z par rapport à γ
4. Théorème : Dans ce cas, l'application Ind_γ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur les composantes de U et nulle sur la composant connexe non bornée de U
5. Remarque : Intuitivement $Ind_\gamma(z)$ est le nombre de tours comptés algébriquement que fait γ autour de z
6. Exemple : Si $Im(\gamma) = C(0, r)$ alors $Ind_\Gamma(D(0, r)) = 1$ et $Ind_\gamma(\mathbb{C} \backslash \overline{D}(0, r)) = 0$

2.3 Théorèmes de Cauhy et conséquences

(Chapitres 3.3, 3.4, 3.5, 4.4 et 4.7 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron et 6.4 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)

1. Théorème de Goursat : Soit $z \in \Omega$, si f holomorphe sur $\Omega \backslash \{z\}$ et continue sur Ω alors pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$, $\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = 0$
2. Théorème de Cauchy : Dans ce cas, si Ω convexe alors pour tout chemin fermé γ dans Ω, $\int_\gamma f(z)dz = 0$
3. Corollaire : Formule de Cauchy : Dans ce cas, $f(z)Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$
4. Théorème : Si f holomorphe sur $D(z_0, r) \subset \Omega$ alors f analytique sur $D(z_0, r)$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{[n)}(z_0)}{n!} z^n$ avec convergence normale sur tout compact
5. Corollaire : Si $f \in H(\Omega)$ alors f est analytique sur Ω, et si toutes les dérivées de f s'annulent en un point alors $f = 0$
6. Théorème : Principe du prolongement analytique : Si Ω connexe, soit $f, g \in H(\Omega)$ coïncidant sur un ouvert de Ω, alors $f = g$
7. Application : Dans ce cas, $H(\Omega)$ est un anneau intègre, ce qui n'est pas le cas de $C^\infty(\Omega)$
8. Théorème : Principe des zéros isolés : Si Ω connexe et f holomorphe non nulle, soit $a \in \Omega$ tel que $f(a) = 0$, alors f ne s'ennule pas sur un voisinage de a
9. Théorème de Liouville : Si $\Omega = \mathbb{C}$ et $f \in H(\Omega)$ bornée alors f est constante
10. Application : On retrouve le théorème de D'Alembert Gauss avec $\frac{1}{f}$ polynomiale

2.4 Métrique de l'espace des fonctions holomorphes

(Chapitres VII.4 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li, 5.4 de Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan, V.III.2.a d'Analyse de Queffélec et Zuily et 3.5.2 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron)

1. Définition : Soit $A \subset C(X,Y)$, alors on dit que A est équicontinue si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x, y \in X, \forall f \in A, d(x,y) \leq \delta \Longrightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$
2. Théorème d'Ascoli : Si X compact, soit $A \subset C(X,Y)$, alors A est relativement compact si et seulement si A est équicontinue et pour tout $x \in X, A(x)$ est relativement compact
3. Corollaire : Si X compact et Y vectoriel normé de dimension finie, soit $A \subset C(X,Y)$, A équicontinue bornée si et seulement si A relativement compact
4. Définition : On considère K_n compacts Ω tels que $\Omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n, p_n(f) = \underset{z \in K_n}{sup} |f(z)|$, et $\delta(f,g) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$
5. Théorème : $(H(\Omega), \delta)$ est un espace métrique complet
6. Proposition : Soit $(f_p)_{p \in \mathbb{N}} \in H(\Omega)^{\mathbb{N}}$ et $f \in H(\Omega)$, alors $f_p \underset{p \to +\infty}{\overset{CVUSTC}{\longrightarrow}} f$ si et seulement si $\delta(f_p, f) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
7. Théorème de convergence de Weierstrass : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H(\Omega)^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur tout compact de Ω, alors la limite f est holomorphe et $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ converge sur tout compact vers f'
8. Exemple : La fonction $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ définit une fonction holomorphe sur $]1, +\infty[+ i\mathbb{R}$
9. Définition : Soit $A \subset H(\Omega)$, alors on dit que A est localement bornée si pour tout compact K de Ω, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall z \in K, \forall f \in A, |f(z)| \leq M$
10. Théorème de Montel : Soit $A \subset H(\Omega)$, alors A est localement bornée si et seulement si A est relativement compacte
11. Exemple : Si $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ tel que $sup(|P_n(z)|, |z| = 1, n \in \mathbb{N}) < +\infty$, alors $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille normale, ainsi il n'existe pas de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(0) = 1, \forall z \in \mathbb{C}^*, P_n(z) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $sup(|P_n(z)|, |z| = 1, n \in \mathbb{N}) < +\infty$ (Exercice 13.1 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)

3 Des fonctions presque holomorphes

3.1 Séries de Laurent

(Chapitre 4.5 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron)

1. Lemme : Soit $C = C(a, r_1, r_2)$ couronne de $\mathbb{C}$, si f holomorphe sur C alors $\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$ est indépendant de $r \in]r_1, r_2[$
2. Définition : Le n-ième coefficient de Laurent de f est $c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$, et la série de fonctions $\sum c_n (z-a)^n$ s'appelle la série de Laurent de f en a

3. Exemple : Si f holomorphe sur $D(a, r_2)$ alors la série de Laurent de f est la série de Taylor de f
4. Théorème : $\sum\limits_{n\geq 0} c_n(z-a)^n$ converge normalement sur tout compact de $D(a, r_2)$, $\sum\limits_{n>0} c_{-n}(z-a)^{-n}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash D(a, r_1)$, et $\forall z \in C, f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$

3.2 Singularités

(Chapitre 4.6 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron)
On considère $f \in H(\Omega)$.

1. Définition : Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $\Omega \cup \{a\}$ soit encore un ouvert, alors on dit que a est une singularité isolée pour f, de plus si f est prolongeable en une fonction holomorphe sur $\Omega \cup \{a\}$ alors on dit que la singularité est effaçable
2. Théorème : Si f est bornée au voisinage de a alors a est une singularité effaçable de f
3. Théorème : Soit $\sum a_n(z-a)^n$ la série de Laurent de f en a, alors trois cas sont possibles :
   — a est une singularité effaçable de f, a lieu si et seulement si $\forall n \in \mathbb{Z}_-^*, c_n = 0$
   — $\lim\limits_{z\to a}|f(z)| = +\infty$, a lieu si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $c_{-m} \neq 0$ et $\forall n < -m, c_n = 0$, on dit que alors que a est un pôle d'ordre m de f
   — L'image de tout voisinage de a par f est dense dans $\mathbb{C}$, a lieu si et seulement si $\forall n \in \mathbb{Z}_-^*, c_n \neq 0$, on dit alors que a est une singularité essentielle de f
4. Exemple : Si f rationnelle alors les singularités de f sont des pôles
5. Définition : On dit que f est méromorphe si f holomorphe sur $\Omega\backslash S$ avec S fermé discret
6. Exemple : La fonction Γ d'Euler, définie par $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}dx$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, se prolonge en une fonciton holomorphe sur $\mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R}$ et une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les singularités sont des pôles d'ordre 1 en les $-n$ pour $n \in \mathbb{N}$

3.3 Théorème des résidus

(Chapitres 8.1 d'Analyse complexe d'Amar et Matheron et 8.4 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)

1. Lemme : Si f holomorphe sur $C = C(0, r_1, r_2)$, soit γ chemin continu dans C, alors $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi Ind_\gamma(0)c_{-1}$
2. Définition : Si f holomorphe sur $C(a, r_1, r_2)$ alors le résidu de f en a est le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement de Laurent de f en a, on le note $Res(f, a)$
3. Théorème des résidus : Si Ω convexe, soit $a_1, ..., a_n \in \Omega$, si f holomorphe sur $\Omega\backslash\{a_1, ..., a_n\}$ tel que a_i soit un pôle de f, soit γ chemin fermé dans Ω tel que $Im(\gamma)$ ne contienne pas de a_i, alors $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum\limits_{k=1}^{n} Ind_\gamma(a_k)Res(f, a_k)$
4. Application : Ce théorème permet de calculer des intégrales
5. Exemple : $\int_0^{+\infty} \frac{sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

6. Exemple : Soit $\alpha \in \,]-1,1[$, alors $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha ln(t)}{t^2-1} dt = \frac{\pi^2}{4cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^2}$