Leçon 253 Utilisation de la notion de convexité en analyse

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan
2. Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li
3. Objectif agrégation
4. Algèbre d'Aviva Szpirglas
5. Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi
6. Calcul différentiel de Mohammed El Amrani
7. Théorie de l'intégration de Briane et Pagès
8. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière
9. Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly
10. Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi
11. Oraux X-ENS Analyse 4

Développements.

1. Théorème de projection sur un convexe fermé non vide
2. Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$
3. Méthode de gradient à pas optimal

Table des matières

1 Utilisation de parties convexes

1.1 Définitions et propriétés

(Chapitre 6.1 de Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan)
On considère E un espace vectoriel normé et $C \subset E$.

1. Définition : On dit que C est convexe si $\forall t \in [0,1], tC + (1-t)C \subset C$
2. Exemple : Soit F sous-espace vectoriel de E et $a \in E$, alors $a + F$ est convexe
3. Exemple : Les convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles
4. Proposition : Si C convexe, soit $x_1, ..., x_n \in C$ et $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, alors $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in C$
5. Proposition : Soit C' un autre convexe de E et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda C, C + C'$ et $C \cap C'$ sont convexes
6. Remarque : Une réunion de convexes n'est pas nécessairement convexe
7. Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, on a $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}$ convexes mais pas la réunion des deux

1.2 Théorème de projection et conséquences

(Chapitres II.2 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li et 3.1.3 d'Objectif agrégation)

On considère H un espace de Hilbert.

1. Théorème de projection sur convexe fermé non vide : Soit C convexe fermé non vide de H, alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - p_C(x)\|$, de plus on a la caratérisation, pour $y \in H$, $y = p_C(x)$ si et seulement si $y \in C, \forall z \in C, Re(\langle x - y, z - y \rangle) \leq 0$
2. Corollaire : Soit C convexe fermé non vide de H, alors $p_C : C \longrightarrow H$ est 1-lipschizienne donc continue
3. Corollaire : Soit F sous-espace vectoriel fermé de H, alors p_F est linéaires et pour $x, y \in H$, on a la caractérisation $x = p_F(y)$ si et seulement si $y \in F, x - y \in F^\perp$
4. Application : Soit F sous-espace vectoriel fermé de H, alors F dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$
5. Exemple : Les fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$ sont denses dans $L^2(\mathbb{R})$
6. Application : Théorème de représentation de Riesz : Soit H de Hilbert et $\phi \in H^*$, alors il existe un unique $y \in H$ tel que $\forall x \in H, \phi(x) = \langle y, x \rangle$
7. Corollaire : Dans ce cas, soit $\psi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - Re(\varphi(x))$, alors ψ admet un minimum qu'elle atteint en un unique poitn $y \in H$
8. Théorème de Lax-Milgram : Soit H de Hilbert, B forme bilinéaire continue coercive (ie il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in H, B(x,x) \geq \alpha \|x\|^2$) et $L \in H^*$, alors il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall y \in H, L(y) = B(u, y)$ (Exercice II.5.14 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

9. Corollaire : Dans ce cas, si B est symétrique et $J(x) = B(x,x) - 2L(x)$ alors u est caractérisé par $J(u) = \underset{x \in H}{min}(J(x))$ (Exercice II.5.14 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1.3 Théorème de Hahn-Banach forme géométrique

(Chapitres IV.3 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li et 7.IV.2 d'Algèbre d'Aviva Szpirglas)

1. Théorème de Hahn-Banach forme géométrique : Soit C convexe fermé non vide et K convexe compacte non vide de E, alors il existe une forme linéaire continue $\varphi \in E^*$ telle que $\underset{x \in C}{sup}\varphi(x) < \underset{y \in K}{inf}\varphi(y)$
2. Remarque : Dans ce cas, s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\underset{x \in C}{sup}\varphi(x) < \alpha < \underset{y \in K}{inf}\varphi(y)$ alors on dit que l'hyperplan affine $H_\alpha = \{x \in E, \varphi(x) = \alpha\}$ sépare strictement C et K
3. Exemple : Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\}$ et $B = \{(x,y), x \in \mathbb{R}, y \geq e^x\}$, alors A et B sont deux convexes fermés disjoints non vides mais ils ne peuvent pas être séparés strictement par un hyperplan affine (Exercice 7.11.45 de Topologie générale et espaces normés de Nawfal El Hage Hassan)
4. Application : Théorème du point fixe de Markov-Kakutani : Soit C convexe compact non vide de E et $(f_i)_{i \in I}$ famille commutante d'applications affines de K dans K, alors les f_i possèdent un point fixe commun (Exercice VI.4.4 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)
5. Définition : Soit $H \subset E$, alors on dit que H est un demi-espace fermé s'il existe $\varphi \in Ej$ non nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $H = \{x \in E, \varphi(x) \geq \alpha\}$
6. Théorème de Minkowski : Soit C convexe fermée de E, alors C est égale à l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent
7. Lemme : L'espace dual de $M_n(\mathbb{R})$ est $(M_n(\mathbb{R}))' = \{tr(A \times id_{M_n(\mathbb{R})}), A \in M_n(\mathbb{R})\}$
8. Lemme : Soit C un convexe fermé non vide de $M_n(\mathbb{R})$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall \varphi \in (M_n(\mathbb{R}))', \varphi(M) \leq \underset{N \in C}{sup}(\varphi(N))$, alors $M \in C$
9. Application : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermé pour la norme $\|\cdot\|_2$, ie $Conv(O_n(\mathbb{R})) = \overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0,1)$

2 Utilisations de fonctions convexes

2.1 Définitions et propriétés

(Chapitres 8 de Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi et 5.3.9 de Calcul différentiel de Mohammed El Amrani)

On considère C convexe de E et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Définition : On dit que f est convexe si $\forall x, y \in C, \forall t \in [0,1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)x + ty$

2. Exemple : La norme $\|\cdot\|$ sur E est convexe par inégalité triangulaire et homogénéité
3. Théorème : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, alors f convexe si et seulement si son graphe si situe en dessous de toutes ses cordes
4. Théorème : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable deux fois, alors f convexe si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}^n, H_f(x) \in S_n^+(\mathbb{R})$
5. Exemple : Si $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ alors $H_f(x) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc f est strictement convexe
6. Théorème : Si f admet un extremum et f convexe alors cet extremum est un minimum et si f est strictement convexe alors ce minimum est unique

2.2 Inégalités de convexité

(Chapitres 8.3 de Eléments d'analyse réelle de Jean-Etienne Rombaldi et III.9.2 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

1. Proposition : Inégalité de Young : Soit $u, v \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in]0,1[$, alors $u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha)v$ avec égalité si et seulement si $u = v$
2. Corollaire : Soit $u, v \in \mathbb{R}_+^*$ et $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v$ et $uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q$
3. Application : Inégalité de Hölder : Soit $(f,g) \in L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$ avec $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|fg\| \leq \|f\|_p \|g\|_q$
4. Application : Inégalité de Minkoswki : Soit $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, autrement dit $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $L^p(\mathbb{R})$
5. Corollaire : Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $p \leq q \in \mathbb{R}$, alors $L^q([a,b]) \subset L^p([a,b])$
6. Proposition : Inégalité de Jordan : Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, alors $\frac{2}{\pi}x < sin(x) < x$
7. Théorème de Jensen : Soit C convexe de E et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$, alors f convexe si et seulement si pour toute combinaison linéaire convexe $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i x_i$ de C, $f\left(\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i)$
8. Corollaire : Dans ce cas, si f convexe alors pour toute combinaison linéaire $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i x_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ et $\lambda := \sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i \neq 0$, $f\left(\frac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\right) \leq \frac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i)$
9. Exemple : Comme exp est convexe, avec les notations précédentes, $exp^{\frac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i x_i} \leq \frac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i e^{x_i}$
10. Exemple : Inégalité arithmético-géométrique : Soit $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+^*$, alors $(x_1...x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$
11. Théorème de Jensen : Soit $f \in L^1(I)$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, alors $\varphi\left(\int_I f(x)dx\right) \leq \int_I \varphi(f(x))dx$ (Exercice 7.5.10 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

12. Application : Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et X variable aléatoire réelle telle que X et $\varphi(X)$ admette une espérance, alors $\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X))$
13. Application : Soit X variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 alors X admet un moment d'ordre 1 par convexité de la fonction carrée

2.3 Méthode de Newton avec une fonction convexe

(Chapitres 4.49 du Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière et IV.2.4 et IV.3.3 d'Analyse numérique et équations différentielles de Jean-Pierre Demailly)

On considère $f : [c, d] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec $f(c) < 0 < f(d), f' > 0, f'' > 0$.

1. Lemme : f admet un admet un unique point fixe $a \in]c, d[$ et pour tout $x \in [c, d]$, il existe $z \in [a, x]$ tel que $F(x) - a := x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$
2. Lemme : Il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in [c, d], |F(x) - a| \leq C|x-a|^2$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ soit stable par F
3. Théorème : Méthode de Newton : Soit $x_0 \in I$, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ avec $x_{n+1} = F(x_n)$
4. Corollaire : Comme f convexe, $I = [a, d]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in I$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) avec $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$ et $x_{n+1} - a \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$
5. Application : Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = x^2 - y$ convexe, alors la méthode de Newton permet d'approcher $\sqrt{y}$
6. Théorème : Méthode de Newton-Raphson : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 et $a \in U$ tel que $f(a) = 0$ et $df : U \longrightarrow GL(\mathbb{R}^n)$, alors a est un point fixe attractif que l'on peut approcher par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = u_n - df(u_n)^{-1}(f(u_n))$
7. Exemple : On peut approcher la solution (x, y) de $\left\{\begin{array}{rcl} x^2 + xy - 2y^2 & = & 4 \\ xe^x + ye^y & = & 0 \end{array}\right.$

2.4 Minimisation de fonctionnelle quadratique

(Chapitre 5.15 d'Analyse matricielle de Jean-Etienne Rombaldi et Oraux X-ENS Analyse 4)

On considère $A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^p$.

1. Définition : La fonctionnelle quadratique associée à A et b est $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$
2. Lemme : Soit $\alpha = inf(Sp(A)) \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^p, \langle Ax, x\rangle \geq \alpha \|x\|^2$
3. Proposition : La fonctionnelle quadratique précédente φ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $\nabla f(x) = Ax - b$
4. Corollaire : Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $H_f(x) = A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$, donc f est strictement convexe
5. Propositon : f est coercive, ie $f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
6. Théorème : La solution de $Ax = b$ réalise l'unique minimum global de la fonctionnelle φ

7. Théorème : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_{n+1} = x_n - \rho_n \nabla f(x_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, \rho_n = \underset{\rho\in\mathbb{R}_+^*}{argmin}(f(x_n - \rho\nabla f(x_n))$, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_*$ avec $x_* \in \mathbb{R}^p$ unique minimum global de f
8. Application : On peut donc approcher numériquement la solution $x \in \mathbb{R}^p$ de $Ax = b$