Leçon 262 Convergences d'une suite de variables aléatoires, théorèmes limite, exemples et applications

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Probabilité de Barbe et Ledoux
2. Les contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne
3. Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch

Développements.

1. Théorème central limite et intervalle de confiance
2. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$

Table des matières

1 Différents modes de convergence

1.1 Convergence presque sure

(Chapitres V.1 de Probabilités de Barbe et Ledoux et IV.1 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire définies sur un espace probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Définition : On dit que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} X$ si $\mathbb{P}(X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X) = 1$
2. Critère de Cauchy : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} X \iff \forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\geq n}(|X_n - X_m| < \varepsilon)\right) = 1$
3. Remarque : Le critère de Cauchy nous assure la convergence mais ne nous donne pas la limite
4. Lemme de Borel-Cantelli sur la convergence presque sûre :
   - Si $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < +\infty$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} X$
   - Si les X_n sont indépendants alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} 0 \iff \forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) < +\infty$
5. Remarque : Pour le second cas il faut supposer la limite nulle (ou constante) car sinon les $X_n - X$ ne sont pas nécessairement indépendants pour appliquer le lemme de Borel-Cantelli
6. Exemple : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ IID de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $\left(\sum_{i=1}^{n} 2^{-i}X_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement
7. Proposition : Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} Y$ alors :
   - Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} f(X)$
   - Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors $\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} \alpha X + \beta Y$

1.2 Convergence dans L^p

(Chapitres V.3 de Probabilités de Barbe et Ledoux et IV.1 et IV.4 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)

1. Définition : On dit que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} X$ si $\mathbb{E}(|X_n - X|^p) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
2. Proposition : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de carrées intégrables, d'espérance a et $Var(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} a$
3. Proposition Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} Y$ alors $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} \alpha X + \beta Y$
4. Lemme de Scheffé dans L^1 : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de densités respectives f_n et X de densité f tel que pour presque tout $x \in \mathbb{R}, f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1} X$

1.3 Convergence en probabilité

(Chapitres V.2 de Probabilités de Barbe et Ledoux et IV.1 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)

1. Définition : On dit que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ si $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
2. Exemple : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non correlées centrées de variance σ^2 alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$
3. Exemple : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes de loi respectives $\mathcal{B}(p_n)$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0 \iff p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
4. Définition : $d(X,Y) = \mathbb{E}(|X-Y| \wedge 1)$
5. Proposition : $d(X,Y) = 0$ si et seulement si $X = Y$ presque sûrement
6. Corollaire : d est une distance sur l'espace des variables aléatoires quotienté par la relation d'équivalence d'égalité presque partout, de plus cette espace est complet pour cette distance
7. Théorème : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \iff d(X_n, X) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
8. Proposition : Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} Y$ alors :
   — Si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue alors $\varphi(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \varphi(X)$
   — Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors $\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \alpha X + \beta Y$
   — $\langle X_n, Y_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \langle X, Y\rangle$

1.4 Convergence en loi

(Chapitres V.4 de Probabilités de Barbe et Ledoux et IV.4 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)

1. Défintion : On dit que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} X$ si $\forall\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d), \mathbb{E}(\varphi(X_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(\varphi(X_n))$
2. Remarque : La limite X n'est pas unique, seule sa loi l'est
3. Exemple : Si $S_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ alors $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} \mathcal{P}(\lambda)$ (Chapitre IV.7 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)
4. Théorème de Lévy : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} X \iff \forall t \in \mathbb{R}^d, \phi_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_X(t)$
5. Théorème : Si $\forall t \in \mathbb{R}^d, \phi_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(t)$ avec ϕ continue en 0 alors ϕ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X et $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} X$
6. Théorème : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} X$ si et seulement si pour tout point t de continuité de F_X, $F_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_X(t)$

7. Exemple : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de lois respectives $\delta_{\frac{1}{n}}$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} X$ avec $\mathcal{L}(X) = \delta_0$
8. Proposition : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et X à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} X \Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = k)$
9. Proposition : Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} X$ et $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} f(X)$
10. Lemme de Scheffé en loi : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de densités respectives f_n et X de densité f tel que pour presque tout $x \in \mathbb{R}, f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} X$

2 Lien entre les différentes convergence

2.1 Implications directes

(Chapitres V.2, V.3 et V.4 de Probabilités de Barbe et Ledoux et IV.5 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)

1. Proposition : Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} X$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$
2. Remarque : La réciproque est fausse, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$ mais ne converge pas presque sûrement vers 0
3. Proposition : Si $p < q$ et $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^q} X$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} X$
4. Remarque : La réciproque est fausse, si $X_n(\omega) = \sqrt{n}$ si $\omega \in \left]0, \frac{1}{n}\right[$ et $X_n(\omega) = 0$ si $\omega \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1} 0$ mais pas dans L^2 (Exemple 19.17 des Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne)
5. Proposition : Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1} X$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$
6. Remarque : La réciproque est fausse, si $X_n(\omega) = n$ si $\omega \in \left]0, \frac{1}{n}\right[$ et $X_n(\omega) = 0$ si $\omega \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} 0$ donc $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$ mais pas dans L^1 (Exemple 19.16 des Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne)
7. Proposition : Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} X$
8. Remarque : La réciproque est fausse, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ IID de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} X$ avec $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(p)$ mais ne converge pas en probabilité (Exemple 19.10 des Contre-exemles de Bertrand Hauchecorne)

2.2 Implications sous conditions

(Chapitre V.2, V.3 et V.4 de Probabilités de Barbe et Ledoux et IV.5 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)

1. Proposition : Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ alors il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que $X_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} X$
2. Proposition : Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ et il existe $q \in]1,+\infty[$ tel que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée dans L^r alors $\forall p \in [1,r[, X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} X$
3. Définition : On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable (ou équiintégrable) si $\underset{n\in\mathbb{N}}{sup} \int_{(|X_n|>c)} |X_n| d\mathbb{P} \xrightarrow[c\to+\infty]{} 0$
4. Lemme : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable si et seulement si :
   — $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A) \leq \delta \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \int_A |X_n| d\mathbb{P} \leq \varepsilon$
   — $\underset{n\in\mathbb{N}}{sup} \int |X_n| d\mathbb{P} < +\infty$
5. Proposition : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformément intégrable et $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ alors X intégrable et $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1} X$
6. Corollaire : S'il existe $q \in]1,+\infty$ tel que $\underset{n\in\mathbb{N}}{sup}\mathbb{E}(|X_n|^q) < +\infty$ et $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ alors $\forall p \in [1,q[, X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} X$
7. Proposition : Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} X$ alors il existe $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}'), X_n', X'$ tel que $X_n \overset{loi}{=} X_n', X \overset{loi}{=} X'$ et $X_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} X'$
8. Proposition : Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} c$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} c$

3 Comportement asymptotique

3.1 Lois faible et forte des grands nombres

(Chapitres V.5 de Probabilités de Barbe et Ledoux et IV.2 et IV.3 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)

1. Loi faible des grands nombres : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ IID de carrés intégrables alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} \mathbb{E}(X_1)$
2. Remarque : On peut, à la place, supposer que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1)$, que $(\mathbb{E}(X_n^2))_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée et $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m \neq n \Longrightarrow Cov(X_m, X_n) = 0$
3. Proposition : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ IID admettant un moment d'ordre 4 alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} \mathbb{E}(X_1)$
4. Loi forte des grands nombres : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ IID intégrables alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} \mathbb{E}(X_1)$
5. Corollaire : Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendants de même probabilité alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} \mathbb{P}(A_1)$

6. Application : Méthode de Monte-Carlo : On peut approcher des intégrales $\int_X g(x)f(x)dx$ par $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k)$ si f est la densité des X_k

3.2 Théorème central limite et lemme de Slutsky

(Chapitres V.5 de Probabilités de Barbe et Ledoux et IV.6 de Probabilités et statistiques)

1. Théorème central limite : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ IID de moyennes m et de variance σ^2 alors $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - nm\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$
2. Corollaire : Si $\sigma^2 \neq 0$ alors $\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - nm\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1)$
3. Application : La moyenne empirique $\hat{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ est un estimateur sans biais, fortement consistent et asymptotiquement normal de $m = \mathbb{E}(X_1)$, et si σ^2 connue alors un interalle de confiance asymptotique est $ICA_{1-\alpha}(m) = \left[\hat{X}_n - \sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}q_{1-\frac{\alpha}{2}}, \hat{X}_n + \sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ avec $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de $\mathcal{N}(0,1)$
4. Proposition : δ-méthode : Si $\sqrt{n}(X_n-\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en θ de dérivée non nulle alors $\sqrt{n}(g(X_n)-g(\theta)) \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} \mathcal{N}(0,\sigma^2 g'(\theta)^2)$
5. Lemme de Slutsky : Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} X, Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} a$ alors $(X_n,Y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} (X,a)$
6. Corollaire : Dans ce cas $X_n+Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} X+a$ et $X_nY_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Xa$
7. Application : Ces deux résultats permettent d'obtenir un intervalle de confiance d'un paramètre quand le théorème central limite ne suffit pas

3.3 Comportement des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$

(Chapitres VIII.1 et VIII.4 de Probabiltés de Barbe et Ledoux)

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes valeurs dans $\mathbb{Z}^d, S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k)$

1. Définition : S_n est appelé une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$
2. Proposition : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov
3. Théorème : Si $d=1$ et $X_n \sim \mathcal{B}(p)$ alors il existe des mesures invariantes de cette chaîne de Markov si et seulement si $p=\frac{1}{2}$, dans ce cas il s'agit des multiples de la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$
4. Corollaire : Il n'existe pas de probabilités invariantes pour cette chaîne de Markov
5. Théorème : Si $X_k \sim \mathcal{U}(e_1,-e_1,...,e_d,-e_d)$ alors le nombre moyen de passages en 0 est fini si et seulement si $d \geq 3$
6. Corollaire : Si $d \geq 3$ alors presque sûrement la marche aléatoire part à l'infini ie $\mathbb{P}(\|S_n\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty) = 1$

7. Corollaire : Si $d \leq 2$ alors presque sûrement la marche passe une infinité de fois par 0, ie $\mathbb{P}\left(\sup(n \in \mathbb{N}, S_n = 0) = +\infty\right) = 1$