# Leçon 265 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

**Références.**

1. Analyse complexe de Patrice Tauvel
2. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi
3. Histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 1 de Caldero et Germoni
4. Théorie de l'intégration de Briane et Pagès
5. Analyse de Quéffelec et Zuily
6. Objectif agrégation
7. Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch
8. Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li
9. Analyse de Xavier Gourdon

**Développements.**

1. Homéomorphisme de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$
2. Prolongement holomorphe de la fonction $\Gamma$ d'Euler

## Table des matières

# 1 Multiples utilités de la fonction usuelle exponentielle

## 1.1 La fonction exponentielle complexe

(Chapitre 3.7 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)

1. Définition : L'exponentielle complexe est la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ de rayon de convergence infini
2. Proposition : La fonction exponentielle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{C}$ de dérivées successives $exp$
3. Lemme : Soit $(z,\zeta) \in \mathbb{C}^2$, alors $e^{z+\zeta} = e^z z^\zeta$, $e^z \neq 0$, $(e^z)^{-1} = e^{-z}$, $|e^z| = e^{Re(z)}$, $|e^z| = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$
4. Théorème : $exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes surjectif non injectif
5. Corollaire : L'application $t \longmapsto e^{it}$ est un morphisme de groupes surjectif non injectif de noyau $a\mathbb{Z}$ avec $a =: 2\pi$

## 1.2 Application à la trigonométrie avec les fonctions cosinus et sinus

(Chapitre 3.8 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)

1. Définition : Les cosinus et sinus réels sont définis par $cos(t) = Re(e^{it})$ et $sin(t) = Im(e^{it})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
2. Proposition : Soit $t \in \mathbb{R}$, alors $cos(t) + isin(t) = e^{it} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!}$
3. Corollaire : Soit $t \in \mathbb{R}$, alors $cos(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$ et $sin(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$
4. Proposition : $cos$ est paire $2\pi$-périodique infiniment dérivable et $cos' = -sin$
5. Proposition : $sin$ est impaire $2\pi$-périodique infiniment dérivable et $sin' = cos$
6. Remarque : On a les formules suivantes, pour $t \in \mathbb{R}$, $cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, $sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$, donc $cos(t)^2 + sin(t)^2 = 1$
7. Proposition : Soit $(t,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, alors $(cos(t) + isin(t))^n = cos(nt) + isin(nt)$

## 1.3 Construction de logarithmes complexes

(Chapitre 5.3 d'Analyse complexe de Patrice Tauvel)
On considère $U$ ouvert de $\mathbb{C}$.

1. Définition : Soit $z \in \mathbb{C}$, on appelle argument de $z$, tout réel $t \in \mathbb{R}$ tel que $e^{it} = \frac{z}{|z|}$
2. Exemple : Des arguments de $i$ sont $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$
3. Définition : On appelle détermination continue de l'argument sur $U$ toute application continue $\theta : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $z \in U$, $\theta(z)$ soit un argument de $z$
4. Remarque : Si $U$ est connexe, soit $\theta_1$ et $\theta_2$ deux déterminations continues de l'argument sur $U$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$

5. Définition : Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle logarithme de $z$, tout $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $e^\zeta = z$
6. Exemple : Un logarithme de $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ est $ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}$
7. Définition : On appelle détermination continue du logarithme sur $U$ toute application continue $l : U \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in U$, $l(z)$ soit un logarithme de $z$
8. Proposition : Les déterminations continues du logarithme sur $U$ sont les fonctions de la forme $ln(|\cdot|) + i\theta$
9. Exemple : La détermination principale de l'argument sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ est définie par $Arg(z) \in ]-\pi, \pi[$ pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, et la détermination du logarithme associée est appelé détermination principale du logarithme
10. Proposition : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, alors $Log(1 + z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$

## 1.4 Exponentielles de matrices

(Chapitre 23.2 et 23.4 d'Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi)
On considère $K$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Définition : Soit $A \in M_n(K)$, alors $exp(A) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$
2. Remarque : Cette définition a bien du sens car $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^n}{n!}$ est convergente pour tout $A \in M_n(K)$
3. Théorème : $exp : M_n(K) \longrightarrow M_n(K)$ est continue
4. Proposition : Soit $A \in M_n(K)$, alors $det(exp(A)) = e^{Tr(A)}$
5. Théorème : Soit $(A, B) \in M_n(K)^2$, alors $exp(A) \in GL_n(K)$ avec $exp(A)^{-1} = exp(-A)$, et $exp(A + B) = exp(A)exp(B)$ si $AB = BA$
6. Théorème : $exp$ réalise un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ (Chapitre VI.2 de H2G2 tome 1 de Caldero et Germoni)

# 2 Etude la fonction spéciale $\Gamma$ d'Euler

## 2.1 Définition et propriétés réelles

(Exercice 8.18 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)

1. Définition : Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\Gamma(t) := \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx$
2. Exemple : $\Gamma(1) = 1$
3. Théorème : $\Gamma$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
4. Lemme : Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\Gamma(t + 1) = t\Gamma(t)$
5. Proposition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\Gamma(n + 1) = n!$
6. Lemme : $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}$
7. Lemme : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$
8. Théorème : $\Gamma(t + 1) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t}t^t e^{-t}$

## 2.2 Prolongements holomorphes

(Chapitre IX.II.1 d'Analyse de Queffélec et Zuily et Exercice 2.10 Objectif agrégation)

1. Théorème : $\Gamma$ se prolonge une fonction holomorphe sur $\mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R}$
2. Proposition : Soit $z \in \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R}$, alors $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
3. Lemme : Soit $z \in \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R}$, alors $\Gamma(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$
4. Lemme : $z \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$
5. Théorème : $\Gamma$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$ et les $-n$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont des pôles simples de ce prolongement

## 2.3 Utilisation en probabilités

(Chapitres IX.3 et XIII.2 de Probabilités et Statistiques de Chabanol et Ruch)

1. Définition : Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribués de loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors la loi du $\chi^2$ à $n$ degrés de liberté est la loi de $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2$
2. Proposition : Soit $X \sim \chi^2(n)$, alors la densité de $X$ est donnée par $f_X(u) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(u)$
3. Théorème de Cochran (admis pour cette leçon) : Soit $X \sim \mathcal{N}_n(m, \sigma^2 I_n)$, $\mathbb{R}^n = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{1\leq k\leq p}} E_k$, $\pi_k$ matrice de projection orthogonale sur $E_k$ et $Y_k = \pi_k X$, alors $Y_1, ..., Y_p$ sont indépendants de lois respectives $\mathcal{N}(\pi_k m, \sigma^2\pi_k)$ et $\|Y_1 - \pi_1 m\|^2, ..., \|Y_p - \pi_p m\|^2$ sont indépendants de lois respectives $\sigma^2\chi^2(dim(E_k))$
4. Corollaire : Soit $(X_1, ..., X_n)$ un $n$-échantillon de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et $\hat{S^2}_n := \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$, alors $\overline{X}_n$ et $\hat{S^2}_n$ sont indépendants de lois respectives $\mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ et $\frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2(n-1)$
5. Application : Soit $(X_1, ..., X_n)$ un $n$-échantillon de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m$ connue, alors on rejette l'hypothèse $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contre $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ si $\frac{n}{\sigma_0^2}\overline{S^2}_n \notin [q_{\frac{\alpha}{2},n}, q_{1-\frac{\alpha}{2},n}]$ avec $q_{\beta,n}$ quantiles de $\chi^2(n)$

# 3 Utilisation de la transformation de Fourier

## 3.1 Définition et propriétés dans $L^1(\mathbb{R})$

(Chapitres III.2.1 et III.2.2 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi}dx$

2. Exemple : $\mathcal{F}(e^{-\pi x^2})(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$
3. Lemme : Soit $(f, g) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$
4. Théorème : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ est une application linéaire continue de norme 1
5. Théorème d'inversion : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f) \circ (-id_{\mathbb{R}}))(x)$
6. Exemple : $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = \frac{1}{2} e^{-2\pi|x|}$ (Chapitre 15.2 de Théorie de l'intégration de Briane et Pagès)
7. Corollaire : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ est injective

## 3.2 Prolongement à $L^2(\mathbb{R})$

(Chapitre III.2.3 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

1. Définition : $A(\mathbb{R}) := \{f \in L^1(\mathbb{R}), \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})\}$
2. Proposition : $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$
3. Théorème : La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ se prolonge de façon unique en un automorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$
4. Remarque : Comme $\mathcal{F}$ a été définie sur $L^2(\mathbb{R})$ par densité, le calcul de $\mathcal{F}(f)$ pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ doit faire intervenir un passage à la limite
5. Proposition : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\varphi_A(\xi) = \int_{-A}^{A} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx$, alors $\varphi_A \underset{A \to +\infty}{\xrightarrow{L^2}} \mathcal{F}(f)$
6. Proposition : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi$, alors $\psi_A \underset{A \to +\infty}{\xrightarrow{L^2}} f$
7. Exemple : Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]})(\xi) = \frac{sin(2\pi\lambda\xi)}{\pi\xi}$ si $\xi \neq 0$ et $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]})(0) = 2\lambda$ donc $\mathcal{F}\left(\frac{sin(2\pi\lambda x)}{2\pi\lambda x}\right) = \frac{1}{2\lambda}\mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]}$ (Exercice III.14 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li)

## 3.3 Formule sommatoire de Poisson et fonction $\theta$ de Jacobi

(Exercices III.3.24 du Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li et Problème 4.6.4 d'Analyse de Xavier Gourdon)

1. Théorème : Formule sommatoire de Poisson : Soit $f$ de classe $C^1$ telle que $f(x) \underset{|x| \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) \underset{|x| \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n) e^{2i\pi nx}$
2. Lemme : Soit $\delta_{\mathbb{Z}} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$, alors $\delta_{\mathbb{Z}} \in S'(\mathbb{R})$ $\delta_{\mathbb{Z}} = \mathcal{F}(\delta_{\mathbb{Z}})$
3. Application : Inversion de Fourier : Soit $\varphi \in S(\mathbb{R})$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\varphi)(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi$
4. Définition : La fonction $\theta$ de Jacobi est définie par $\theta(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s n^2}$ pour $s \in \mathbb{R}_+^*$
5. Théorème : La fonction $\theta$ de Jacobi vérie l'équation fonctionnelle $\forall s \in \mathbb{R}_+^*, \theta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \theta\left(\frac{1}{s}\right)$