Leçon 266 Illustration de la notion d'indépendance en probabilités

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Probabilités de Barbe et Ledoux
2. Les contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne
3. Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch

Développements.

1. Théorème central limite et intervalle de confiance
2. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$

Table des matières

1 Notion d'indépendance

1.1 Evénements et tribus indépendants

(Chapitre IV.1 de Probabilités de Barbe et Ledoux)
On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Définition : Soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, alors on dit que A et B indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
2. Remarque : Autrement dit si $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$
3. Exemple : Si on note X le résultat d'un lancer de dé rouge et Y le résultat d'un lancer de dé bleu alors $A = (X \leq 4)$ et $B = (Y = 6)$ sont indépendants
4. Définition : Soit $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}^I$, alors on dit que $(A_i)_{i\in I}$ est mutuellement indépendante si $\forall J \subset I, |J| < +\infty \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$
5. Définition : Soit $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}^I$, alors on dit que $(A_i)_{i\in I}$ est deux à deux indépendants si $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(A_i \cap A_J) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$
6. Proposition : Soit $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}^I$ mutuellement indépendantes, alors $(A_i)_{i\in I}$ est deux à deux indépendants
7. Remarque : La réciproque est fausse : On considère X le résultat d'un lancer de dé tetraédrique, $A = (X \in \{1,2\}), B = (X \in \{1,3\}), C = (X \in \{2,3\})$, alors A, B, C sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants
8. Remarque : On peut avoir A indépendant de B et C eux-mêmes indépendants entre eux mais A pas indépendant de $B \cap C$ (A, B, C de l'exemple précédent)
9. Définition : Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ famille de sous-tribus de $\mathcal{A}$, alors on dit que $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est mutuellement indépendante si tout $(A_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$, $(A_i)_{i\in I}$ est mutuellement indépendante

1.2 Variables aléatoires indépendantes

(Chapitre IV.1 de Probabilités de Barbe et Ledoux)
On considère $(X_i)_{i\in I}$ famille de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Définition : On dit que les $(X_i)_{i\in I}$ sont indépendantes si les $\sigma(X_i)$ (tribu engendré par X_i) sont mutuellement indépendants
2. Remarque : Autrement dit $\forall J \subset I, |J| < +\infty \Rightarrow \forall (B_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} \mathcal{B}, \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} (X_j \in B_j)\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(X_j \in B_j)$
3. Exemple : Soit X_1 et X_2 les projections sur $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$ de la première et seconde composante d'un lancer de deux dés, alors X_1 et X_2 sont indépendants
4. Proposition : $(X_1, ..., X_d)$ indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}_{(X_1,...,X_d)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes ... \otimes \mathbb{P}_{X_d}$
5. Exemple : Si (X_1, X_2) de densité $(x_1, x_2) \longmapsto f_1(x_1)f_2(x_2)$ alors X et Y sont indépendantes de densités respectives f_1 et f_2 si $\int f_1 = 1$ (et donc $\int f_2 = 1$)

6. Proposition : Les $(X_i)_{i\in I}$ sont indépendantes si et seulement si pour tout $J \subset I$ fini, pour toute famille $(\varphi_i)_{i\in J}$ de fonctions boréliennes telle que $\varphi_i(X_i) \in L^1(\Omega)$, $\mathbb{E}\left(\prod_{j\in J}\varphi_i(X_i)\right) = \prod_{j\in J}\mathbb{E}(\varphi_i(X_i))$
7. Corollaire : $(X_1, ..., X_n)$ indépendantes si et seulement si $\varphi_{(X_1,...,X_n)} = \varphi_{X_1} \otimes ...\varphi_{X_n}$

1.3 Construction de suites de variables aléatoires indépendantes

(Chapitre IV.3 de Probabilités de Barbe et Ledoux)

1. Remarque : On se pose la question : étant données des lois $\mathbb{P}_i$ sur $\mathbb{R}$, existe-t-il des variables aléatoires X_i défini sur un $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de lois respectives $\mathbb{P}_i$?
2. Proposition : Si $I = [\![1, n]\!]$ fini alors on considère $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes ... \otimes \mathbb{P}_n$ et X_i les applications coordonnées, ainsi les X_i vérifient le problème précédent
3. Exemple : Si $A_n = \bigcup_{1\leq k\leq 2^{n-1}} \left]\frac{2(k-1)}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\right]$ et $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$ alors les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants et identiquement distribués de loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ définie sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$
4. Remarque : On considère $E_i \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^d\}$, $\Omega := \prod_{i\in\mathbb{N}} E_i$, X_i la projection sur la i-ième coordonnée, $\mathcal{A} := \sigma(X_i, i \in \mathbb{N})$
5. Proposition : $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ avec $\mathcal{C}$ l'algèbre des cylindres $A = C_n \times E_{n+1} \times ...$ avec $C_n \in \mathcal{B}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{B}_n$ base du cylindre
6. Remarque : On considère $\forall A \in \mathcal{C}, Q(A) := P_1 \otimes ... \otimes P_n(C_n)$
7. Théorème de Kolmogorov (admis) : Q se prolonge en une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et sous $\mathbb{P}$ les X_i sont indépendants et de loi $\mathbb{P}_i$

2 Propriétés probabilistes liées à l'indépendance

2.1 Loi du 0-1 de Kolmogorov et lemme de Borell-Cantelli

(Chapitre IV.3 de Probabilités de Barbe et Ledoux)

1. Définition : Soit $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille de tribus indépendantes, alors on définit $\mathcal{A}_n := \sigma(\mathcal{T}_n, ...)$ et $\mathcal{A}_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ la tribu terminale
2. Exemple : $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} A_m \in \mathcal{A}_\infty$
3. Exemple : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes et $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors l'événement $A = \left(\left(\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \text{converge}\right) \in \mathcal{A}_\infty$
4. Théorème : Loi du 0-1 de Kolmogorov : Soit $A \in \mathcal{A}_\infty$, alors $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$
5. Théorème : Lemme de Borel-Cantelli : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, alors :

— Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors $\mathbb{P}(\underset{n\to+\infty}{limsup} A_n) = 0$ (presque sûrement seulement un nombre fini d'événements A_n sont réalisés

— Si les $(A_n)_{nin\mathbb{N}}$ sont indépendants et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ alors $\mathbb{P}(\underset{n\to+\infty}{limsup} A_n) = 1$ (presque sûrement une infinité de A_n sont réalisés)

6. Corollaire : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors :
   — $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < +\infty \Longrightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} X$
   — Si les X_n sont mutuellement indépendants alors
   $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) < +\infty$
   (Chapitre V.1 de Probabilités de Barbe et Ledoux)

2.2 Sommes de variables aléatoires indépendentes

(Chapitre IV.2 de Probabilités de Barbe et Ledoux)
On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Proposition : La loi de $X + Y$ est donnée par $\mathbb{P}_{X+Y} = P_X * P_Y$
2. Proposition : La fonction caractéristique de $X + Y$ $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \times \varphi_Y$
3. Remarque : A ne pas confondre avec la fonction caractéristique de (X, Y) donnée par $\varphi_{(X,Y)}(s, t) = \varphi_X(s)\varphi_X(t)$
4. Exemple : Si $X = a$ et $Y = b$ alors X et Y indépendants et $X + Y = a + b$ ie $\mathbb{P}_{X+Y} = \delta_{a+b}$ et $(X, Y) = (a, b)$ ie $\mathbb{P}_{(X,Y)}(x, y) = \delta_a(x)\delta_b(y)$
5. Exemple : Si X et Y de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$
6. Exemple : Si $(X_1, ..., X_n)$ independantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{B}(n, p)$
7. Proposition : Si X et Y de densités respectives f et g alors $X + Y$ est de densité $h = f * g$

2.3 Comportement à l'infini de ces sommes

(Chapitres V.5 de Probabilités de Barbe et Ledoux et IV.2, IV.3, IV.6 et IV.7 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.

1. Remarque : On ne connaît pas la limite presque sûre en appliquant le lemme de Borel-Cantelli
2. Exemple : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $U_n = \sum\limits_{1\leq k\leq n} 2^{-k} X_k$ converge presque sûrement
3. Théorème : Loi faible des grands nombres : Si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$ alors $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$

4. Théorème : Loi faible des grands nombres (version L^2) : Si $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$ alors $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} \mathbb{E}(X_1)$
5. Théorème : Loi forte des grands nombres : Si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$ alors $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} \mathbb{E}(X_1)$
6. Application : La moyenne empirique est un estimateur fortement consistent de la moyenne
7. Théorème central limite : Si $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty, m = \mathbb{E}(X_1), \sigma^2 = Var(X_1)$ alors $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - nm\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$
8. Application : Si $\sigma^2 = Var(X_1)$ est connue alors la moyenne empirique est un estimateur asymotptiquement normal de la moyenne, on obtient donc un intervalle de confiance et un test paramétrique de la moyenne
9. Théorème : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de loi uniforme sur $\{e_1,-e_1,e_2,-e_2,...,e_d,-e_d\}$, avec $(e_1,...,e_d)$ base canonique de $\mathbb{R}^d$, et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}, S_0 = 0$ alors le nombre moyen de passages en 0 est fini si et seulement si $d \geq 0$
10. Corollaire : Si $d \geq 3$ alors la marche aléatoire précédente part presque sûrement à l'infini, ie $\mathbb{P}(\|S_n\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty) = 1$
11. Corollaire : Si $d \leq 2$ alors presque sûrement la marche passe une infinité de fois par 0, ie $\mathbb{P}\left(\sup(n\in\mathbb{N}, S_n = 0) = +\infty\right) = 1$

3 Cas particulier des vecteurs aléatoires gaussiens

3.1 Définitions

(Chapitre IX.2 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)
On considère X un vecteur aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

1. Définition : On dit que X est un vecteur gaussien si $\forall a \in \mathbb{R}^d, a^tX \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$
2. Remarque : Si X est gaussien alors les composantes de X sont gaussiennes mais l'inverse est faux
3. Exemple : Soit $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\varepsilon \sim \frac{1}{2}(\delta_{-1}+\delta_1)$ indépendantes alors $Y, \varepsilon\varepsilon Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ mais $(Y,\varepsilon Y)$ n'est pas un vecteur gaussien
4. Théorème : Si $X \sim \mathcal{N}_d(m,\Gamma)$ alors $\varphi_X(u) = exp\left(iu^tm - \frac{1}{2}u^t\Gamma u\right)$
5. Théorème : Si $X \sim \mathcal{N}_d(m,\Gamma)$ avec Γ inversible alors $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d det(\Gamma)}} exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^t\Gamma^{-1}(x-m)\right)$

3.2 Différence entre indépendance et non corrélation

(Chapitres IV.1 de Probabilités de Barbe et Ledoux et IX.2 de Probabilités et statistiques de Chabanol et Ruch)
On considère X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

1. Définition : On dit que $(X, Y) \in L^2$ sont non corrélées si $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
2. Remarque : Autrement dit $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = 0$ et on dit que $X - \mathbb{E}(X)$ et $Y - \mathbb{E}(Y)$ sont orthogonales
3. Proposition : Si X et Y sont indépendantes alors X et Y sont non corrélées
4. Remarque : La réciproque est fausse en générale
5. Exemple : Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y = X^2$ alors X et Y sont non corrélées mais ne sont pas indépendantes
6. Exemple : Si $\mathbb{P}_X = \frac{1}{3}(\delta_{-1} + \delta_0 + \delta_1)$ et $Y = X^2$ alors X et Y sont non corrélées mais ne sont pas indépendantes (Exemple 19 7 des Contre-exemples en mathématiques de Bertrand Hauchecorne)
7. Théorème : Si X gaussien alors les assertions suivantes sont équivalentes :
   — $(X_1, ..., X_d)$ sont mutuellement indépendantes
   — $(X_1, ..., X_d)$ sont deux à deux indépendantes
   — $(X_1, ..., X_d)$ sont deux à deux non corrélées
   — Γ est diagonale