Le Mans Université

Licence 2

Année Universitaire 2020-2021

Jeudi 22 octobre 2020

Examen 1 - Algèbre linéaire 3 - Première Session

— *Le problème et les deux exercices sont indépendants.*
— *On prendra un soin particulier à la rédaction des réponses.*
— *L'usage des téléphones portables, calculatrices, montres connectées ... est strictement INTERDIT.*
— *Le barème indiqué n'est pas définitif.*

Problème ($\sim$ 12/14 points)

1. (*Questions de cours*) Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie p, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, et F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(f)$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$.
   (a) Quelle est le nombre de lignes et le nombre de colonne de A.
   (b) On note (a_{ij}) les coefficients de la matrice A. Pour $j \in \{1, \dots, p\}$, exprimer $f(e_j)$ en fonction des coefficients de A et de $\mathcal{F}$.
   (c) En reprenant les notations de cette question, énoncer soigneusement le théorème du rang.
   (d) Si f est injective, quelle relation vérifient n et p ?
   (e) Quelle est l'application f la dimension de son noyaux est égale à p ?
2. (*Questions de cours*) Soit $\mathcal{C}$ une base de E.
   (a) On rappelle que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est définie par
   $$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(Id).$$
   Monter que $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est inversible et déterminer son inverse.
   (b) En la démontrant, énoncer quelle formule relie A à $\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{F}}(f)$.
3. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la $\mathcal{B}$ est
   $$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Soient $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, 1, 1)$. Montrer que $v, w \in \ker(\phi)$.
   (b) En déduire (sans calculs), que
   $$\ker(\phi) = vect(\{v, w\}).$$
   Quelle est la dimension de $Im(\phi)$?
   (c) A est-elle une matrice inversible ?
4. Soit $u = (1, 0, 0)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

(c) En déduire $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\phi)$. Ce résultat est-il cohérent avec la question 3.(b) ?

5. (a) Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\phi \circ \phi)$.

   (b) En déduire que $Im(\phi) \subset \ker(\phi)$.

   (c) Déterminer A^n pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 1 Trace ($\sim$ 5 points)

1. (*Question de cours*) Soit A et B deux matrices carrées de taille n. Montrer que
$$Tr(AB) = Tr(BA).$$

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et
$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto \ Tr(AM). \end{aligned}$$

   (a) Montrer que f est une application linéaire.

   (b) Déterminer $\ker(f)$.

   (c) En déduire la dimension de $Im(f)$.

Exercice 2 Permutation ($\sim$ 4 points)

1. (*Question de cours*) Donner la définition d'une permutation et d'une transposition.

2. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer σ^{-1} et $\sigma \circ \sigma'$.

   (b) Calculer la signature de σ.